

CORRIGE MINES-PONTS 1 PC 2014 - INTERACTIONS MICROSCOPIQUES

Corrigé rédigé par Marc STRUBEL(marc.strubel@wanadoo.fr), relu par Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr).

Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !
Ce corrigé peut être diffusé à vos élèves dès 2014.

I. Etude microscopique:

I.A. La vapeur d'eau :

I.A.1. La loi des gaz parfaits s'écrit :

$$P.V = n.RT$$

On en déduit :

$$n_v = P.N_A/RT = P/k_B.T = 1,94.10^{25} \text{ molécules.m}^{-3}.$$

La distance moyenne est donc :

$$d_v = \frac{1}{\sqrt[3]{n_v}} = 3,72 \text{ nm}$$

Cette valeur est confirmée à la question 8.

2. Les interactions intermoléculaires sont négligées dans un gaz parfait.

A pression constante, l'équation des gaz parfaits montre que le volume molaire décroît linéairement avec la température lorsqu'on le refroidit.

B. Un modèle atomique simple :

3. Par symétrie et invariances :

$$\vec{E} = E(r). \vec{u}_r$$

Le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon $r = \|\vec{PN}\|$ fournit :

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \text{ avec } \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

On en déduit finalement :

$$\vec{E}_+(N) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{r}$$

4. On néglige le poids de l'électron devant la force exercée par le noyau.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{r}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence propre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

On calcule :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m a^3}{e^2}} = 4,19.10^{-8} \text{ m} = 41,9 \text{ nm}$$

Ce rayonnement est dans l'UV.

C. Notion de polarisabilité :

5. A l'équilibre de l'électron, on a :

$$\vec{E}_+(N) + \vec{E}_0 = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{r}_{eq} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} \vec{E}_0$$

$$\vec{p} = -e\vec{r}_{eq} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0$$

La polarisabilité est :

$$\alpha = 4\pi a^3 = 3V$$

6. Bien que le nuage concerné par la question précédente ne soit pas le nuage électronique, le volume V est de l'ordre de grandeur du volume de l'atome.

On peut ainsi penser que la polarisabilité croît avec le volume de l'atome, qui décroît avec Z dans une période. Ainsi le néon sera moins polarisable que le lithium.

Concernant les molécules diatomiques, la polarisabilité croît également avec le volume des atomes qui la constituent, ainsi le diiode est plus polarisable que le difluor.

II. Interactions intermoléculaires :

II. A. Interaction entre deux molécules polaires :

7. Le module du champ $\vec{E}_{1,0,2}$ est :

$$\|\vec{E}_{1,0,2}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_1}$$

Il est maximal pour $\theta_1 = 0$ ou $\theta_1 = \pi$.

La valeur minimale de $e_{p,i}$ s'obtient pour $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$ et vaut $e_{\min} = \frac{-2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}$.



La valeur maximale de $e_{p,i}$ s'obtient pour $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$ et vaut $e_{\max} = \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}$.



On en déduit :

$$\Delta e = \frac{p^2}{\pi\epsilon_0 d^3}$$

8. $e_{\max} = -e_{\min} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J}$; $\Delta e = 2,73 \cdot 10^{-23} \text{ J}$; $e_{th} = 5,15 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

On constate que :

$$e_{th} \gg \Delta e$$

Les deux configurations sont donc facilement accessibles.

9. Pour le système à deux états :

$$P(e_{\min}) + P(e_{\max}) = 1.$$

On en déduit :

$$A = \frac{1}{\exp\left(-\frac{e_{min}}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)}$$

On a alors :

$$e_1 = P(e_{min}) \cdot e_{min} + P(e_{max}) \cdot e_{max}$$

$$e_1 = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)} \cdot \left[\exp\left(-\frac{e_{min}}{kT}\right) \cdot e_{min} + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} \right]$$

$$e_1 = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)} \cdot \left[-\exp\left(\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} \right]$$

$$e_1 = -e_{max} \cdot \text{th}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right) \simeq -\frac{e_{max}^2}{kT} = -3,65 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$

II.B. Interaction entre une molécule polaire et une molécule polarisable :

10. On a :

$$\vec{E}_{1,02} = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \cdot \vec{u}$$

d'où :

$$e_2 = -\frac{1}{2} \alpha \epsilon_0 \left(\frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \right)^2 = 3,43 \cdot 10^{-28} \text{ J}$$

II.B. Interaction entre molécules non polaires :

11. La théorie physique en question est la théorie quantique, car le résultat fait intervenir la constante de Planck h .

On calcule numériquement : $e_3 = -2,91 \cdot 10^{-26} \text{ J}$,

Rq : la fréquence f_0 donnée ne correspond pas à celle calculée en question 4.

II.D. Synthèse :

12. On peut remarquer que $e_2 \ll e_1, e_3$.

L'énergie totale d'interaction s'écrit, dans l'approximation $kT \gg e_{max}$ et en négligeant e_2 devant e_1 et e_3 :

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \simeq e_1 + e_3 = -\frac{1}{kT} \left(\frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \right)^2 - \frac{\alpha^2 h f_0}{2d^6}$$

La force d'interaction est donc :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(e) = -\left[\frac{1}{kT} \left(\frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 + \frac{\alpha^2 h f_0}{2} \right] \frac{6}{d^7} \vec{u}$$

où \vec{u} est dirigé de O_1 vers O_2 et \vec{F} est la force exercée sur le dipôle situé en M_2 .

On a alors :

$$C = \frac{hf_0}{2}; D = \frac{1}{k} \left(\frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2$$

Pour des molécules non polaires, D est nul.

Cette force est la force de Van der Waals.

Centrale-Supélec 2013, Filière PSI, épreuve de Physique-Chimie

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

I vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

I.A – mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

I.A.1)

- corde sans raideur : les actions entre deux portions de corde adjacentes se réduisent à leur point de contact à la force de tension tangente à la corde en ce point.
- dans l'hypothèse des petits mouvements, les déplacements de la corde par rapport à sa position d'équilibre sont suffisamment petits pour qu'à tout instant et en tout point l'angle entre la tangente à la corde en mouvement et la tangente à la corde à l'équilibre soit petit devant 1.

I.A.2)

On considère le segment de corde situé entre les abscisses x et $x + \delta x$ à l'équilibre. Sa masse et son accélération ont pour expressions

$$\delta m = \mu \delta x ; \vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$$

Il est soumis aux forces de tension $\vec{T}(x + \delta x)$ et $-\vec{T}(x)$ à ses deux extrémités, où $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$.
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + \delta x) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \delta x$$

En projection sur les axes x et y

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

Pour une corde sans raideur, la tension en tout point est colinéaire à la corde

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

et dans l'hypothèse des petits mouvements

$$\left| \frac{T_y}{T_x} \right| \ll 1$$

soit

$$T_x \approx \|\vec{T}\|$$

La projection sur x du principe fondamental s'intègre en

$$T_x(x, t) = f(t) \approx \|\vec{T}\| = T_0$$

Par conséquent

$$T_y = T_x \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

puis en dérivant par rapport au temps

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Les deux relations entre v_y et T_y sont

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} ; \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

I.A.3)

On repart des équations

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} ; T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

qui conduisent en éliminant T_y à l'équation de d'Alembert

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ; c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

où c représente la célérité des ondes transversales sur la corde.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et des ondes de pression de faible amplitude dans un gaz parfait sont régies par la même équation.

I.A.4)

On convertit la tension exprimée sous forme d'une masse équivalente $m = 85 \text{ kg}$ en tension $T_0 = mg = 850 \text{ N}$. Pour la corde d'acier

$$\mu = s\rho = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

D'où

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

I.B – modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

I.B.1)

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ en notation réelle.

Le report de la forme précédente dans l'équation de d'Alembert conduit à l'équation

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$$

soit en utilisant la propriété de séparation des variables

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = cste$$

L'équation différentielle en f s'écrit

$$f'' - cste f = 0$$

et admet pour solution des fonctions harmoniques ($cste < 0$), affine ($cste = 0$) ou hyperboliques ($cste > 0$). Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, à tout instant $y(0, t) = y(L, t) = 0$, soit $f(0) = f(L) = 0$, condition qui ne peut être vérifiée, si f n'est pas identiquement nulle, que par les solutions harmoniques :

$$f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$$

où f_0 est une constante arbitraire, et k et ψ dépendent des conditions aux limites et sont exprimées à la question suivante.

L'équation différentielle en g s'écrit alors

$$\frac{g''}{g} = c^2 \frac{f''}{f} = -(kc)^2 ; g'' + (kc)^2 g = 0$$

et admet pour solution générale

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi) ; \omega = kc$$

où g_0 est une constante arbitraire.

Les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites sont de la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) ; \omega = kc$$

I.B.2)

Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires susceptibles d'exister sur la corde en l'absence d'excitation extérieure. Chaque mode propre a une dépendance temporelle sinusoïdale. Les fréquences propres de la corde sont les fréquences de ses modes propres.

Les conditions aux limites de la corde s'écrivent $y(0, t) = y(L, t) = 0$ à tout instant, soit, comme le terme $y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas identiquement nul

$$\cos(\psi) = \cos(kL + \psi) = 0$$

on en déduit

$$\psi = \frac{\pi}{2} [\pi] ; kL = n\pi ; k_n = n \frac{\pi}{L}$$

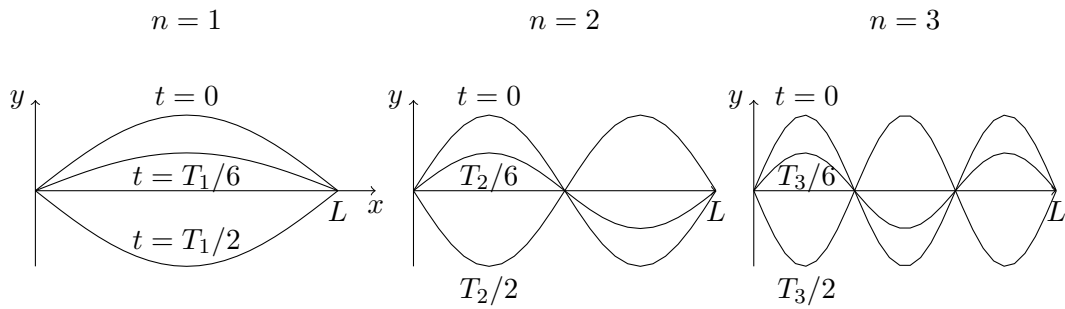
où n est un entier non nul. Les fréquences propres ont pour expression

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Si on choisit $\psi = -\pi/2$, $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$, et les modes propres sont de la forme

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{L} + \varphi\right)$$

À un instant où le terme temporel est maximal, l'allure de la corde pour les trois premiers modes est la suivante



I.B.3)

a) La largeur a du marteau influence l'amplitude des harmoniques via le facteur

$$\frac{\sin(n\pi a/L)}{n\pi a/L}$$

Qualitativement ce facteur prend des valeurs notables si

$$n \frac{\pi a}{L} < \pi$$

et devient négligeable au-delà.

La largeur a du marteau intervient en limitant l'ordre de grandeur du rang maximal des harmoniques présents dans la vibration de la corde à

$$n < n_{\max} = \frac{L}{a}$$

En particulier, plus la taille du marteau est petite, plus le spectre est riche en harmoniques. La fréquence caractéristique au-delà de laquelle les harmoniques ne sont pas excités par le marteau a pour expression

$$f = n f_1 = \frac{L}{a} f_1$$

correspondant à une longueur d'onde minimale

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{ca}{L f_1} = 2a$$

Qualitativement le marteau n'excite que les modes de longueurs d'onde supérieures à sa largeur.

Pour une corde de longueur $L = 65$ cm, de fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz et un marteau de largeur $2a = 2$ cm

$$n_{\max} \approx 65 ; f_{\max} = 17 \text{ kHz}$$

Les modes excités sont situés dans le spectre audible.

La taille des marteaux résulte d'un compromis :

- une augmentation de la taille du marteau conduit à une augmentation de l'amplitude des vibrations (y est proportionnel à a), donc à un son plus puissant
- une diminution de la taille de marteau permet d'augmenter le nombre de modes excités, donc favorise la richesse spectrale du son émis et sa qualité.

La taille du marteau indiquée correspond à ce compromis, car les modes excités couvrent pratiquement l'ensemble du spectre audible : diminuer sa taille conduirait à une diminution de l'amplitude du son sans amélioration audible de sa richesse.

b) La position x_0 du point d'attaque intervient dans l'expression de la vibration par le facteur multiplicatif

$$\frac{\sin(n\pi x_0/L)}{n\pi x_0/L}$$

Pour supprimer l'harmonique de rang n il suffit que x_0 soit choisi de manière à annuler ce facteur. Pour éviter de supprimer des harmoniques de rang inférieur à n , il faut prendre la première annulation du sinus-cardinal

$$\frac{n\pi x_0}{L} = \pi ; x_0 = \frac{L}{n}$$

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

I.C.1)

D'après la question, la fréquence fondamentale de la corde vérifie $f = c/2L$, soit

$$L = \frac{c}{2f}$$

En l'absence d'autre information, il faut supposer que la célérité est la même pour les différentes cordes (ce qui est critiquable, en pratique la tension est pratiquement identique mais la masse linéique varie). Dans cette hypothèse, le produit Lf se conserve et, connaissant $f_{\text{Do } 4} = 262 \text{ Hz}$ et $L_{\text{Do } 4} = 65 \text{ cm}$, on détermine les valeurs

$$L_{\text{La } 0} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{La } 0}} L_{\text{Do } 4} = 6,1 \text{ m} ; L_{\text{Do } 8} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{Do } 8}} L_{\text{Do } 4} = 4,1 \text{ cm}$$

I.C.2)

On reprend la relation précédente en exprimant la célérité $c = \sqrt{T_0/\mu}$

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

En augmentant la masse linéique des cordes, il est possible, à tension et longueur fixées, de diminuer leur fréquence fondamentale, et ainsi produire les notes graves sans augmentation de la longueur des cordes.

On peut envisager de diminuer la tension des cordes pour produire les notes graves (procédé utilisé pour l'accord du piano et des instruments à corde). Cependant il y a un risque de mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano.

I.C.3)

La masse linéique de la corde filée a pour expression

$$\mu = s_{\text{Fe}}\rho_{\text{Fe}} + s_{\text{Cu}}\rho_{\text{Cu}} = \frac{\pi}{4} (D^2\rho_{\text{Fe}} + ((D + 2e)^2 - D^2)\rho_{\text{Cu}}) = 89,2 \text{ g m}^{-1}$$

On en déduit pour le La 0 de fréquence $f = 28 \text{ Hz}$

$$L = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 1,74 \text{ m}$$

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

I.D.1)

a) L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\Gamma] = \frac{L^4 \text{Pression} L}{L^2} = \text{Pression} L^3 = \text{Force} L = \text{Couple}$$

b) Le principe fondamental de la dynamique est inchangé par rapport à la question I.1), et conduit aux deux équations scalaires

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

La première équation s'intègre comme précédemment en

$$T_x = f(t) = T_0$$

c) Le mouvement de la corde se fait dans le plan Oxy , donc le vecteur rotation du segment de corde de longueur δx , de barycentre G considéré est dirigé selon \vec{e}_z . La distance maximale des points de ce segment à l'axe Gz est $\delta x/2$, donc le moment d'inertie du segment par rapport à Gz vérifie

$$J_{Gz} \propto \delta m \delta x^2 = \mu \delta x^3 \left(J_{Gz} = \frac{\delta m \delta x^2}{12} \right)$$

Il s'agit donc d'une quantité du troisième ordre en δx . Le moment cinétique barycentrique vérifie la même propriété et sera donc négligeable si on se limite au premier ordre dans l'expression du théorème du moment cinétique.

Le moment en G des actions s'appliquant sur le segment de corde à ses extrémités A d'abscisse x et B d'abscisse $x + \delta x$ a pour expression

$$\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{GB} \wedge \vec{T}_a(x + \delta x) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) + \overrightarrow{GA} \wedge -\vec{T}_g(x) - \vec{\Gamma}(x) ; \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GA} = \frac{\delta x \vec{e}_x + \delta y \vec{e}_y}{2}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\delta x e_x + \delta y e_y}{2} \wedge (2T_0 \vec{e}_x + (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) \vec{e}_y) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) - \vec{\Gamma}(x) =$$

$$\left(\frac{\delta x}{2} (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) - \delta y T_0 + \Gamma(x + \delta x) - \Gamma(x) \right) \vec{e}_z$$

soit à l'ordre 1 en δx

$$\vec{\mathcal{M}} = \left(T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \delta x \vec{e}_z$$

Ce moment est d'ordre 1 en δx , donc le moment cinétique d'ordre 3 est bien négligeable. Le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit alors $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$, soit

$$T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 ; T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$$

d) On déduit du principe fondamental de la dynamique et de l'expression précédente de T_y l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

soit, d'après l'expression de $\Gamma(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} ; \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

I.D.2)

a) L'expression proposée pour $y(x, t)$ conduit aux relations

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y ; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$$

soit en reportant dans l'équation des mouvements de la corde

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^4 = c^2 k^2 \left(1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k^2 \right)$$

b) Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sont inchangées par rapport à la première partie, donc k vérifie toujours la relation

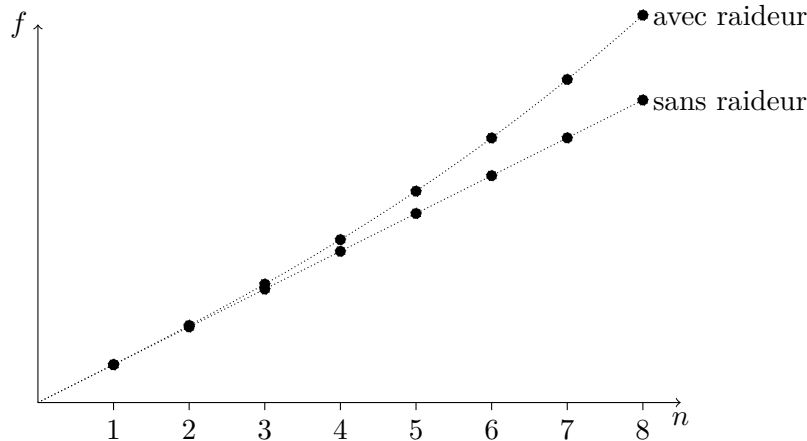
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Par conséquent, d'après la question précédente

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k_n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi^3 r^4}{4T_0 L^2} n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} ; \quad B = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}$$

Il faut savoir que les cordes d'un piano à queue sont plus longues que celles d'un piano droit, donc la valeur de B est plus petite pour un piano à queue, et l'effet de la raideur des cordes est plus faible : la déviation des fréquences des harmoniques par rapport à une série arithmétique est plus petite.

c)



Les fréquences propres de la corde sans raideur forment une suite arithmétique. Celles de la corde avec raideur sont plus élevées et s'en écartent d'autant plus que leur rang n est élevé.

d) Application numérique : $B = 3,75 \times 10^{-4}$.

Pour les harmoniques de rang inférieur à 20, le facteur correctif Bn^2 est petit devant 1, et de manière approchée

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} = f_n^0 \sqrt{1 + Bn^2} \approx f_n^0 \left(1 + \frac{Bn^2}{2} \right)$$

On en déduit l'inharmonicité

$$i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0} = \frac{Bn^2}{2}$$

e) On cherche à déterminer le rang n à partir duquel

$$\frac{f_n}{f_n^0} = \sqrt{1 + Bn^2} > 2^{1/12} ; n > \sqrt{\frac{2^{1/6} - 1}{B}} = 18$$

L'écart sera supérieur au demi-ton à partir de l'harmonique de rang 18.

II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

II.A.1)

La vitesse de déplacement transversal associée à une onde progressive sinusoïdale se propageant selon les x croissants est de la forme

$$v_y(x, y) = v_0^+ \cos(\omega t - kx)$$

D'après la question I.A.2

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\mu \omega v_0^+ \sin(\omega t - kx)$$

relation qui s'intègre en

$$T_y = -\frac{\mu \omega}{k} v_0^+ \cos(\omega t - kx) = -\mu c v_y$$

$$\frac{T_y}{v_y} = -\mu c = -Z_C$$

$$Z_C = \text{masse} \times \text{temps}$$

II.A.2)

Si l'onde se propage selon les z décroissants

$$v_y = v_y^- \cos(\omega t + kx)$$

Le changement de signe dans le terme de propagation se traduit par un changement de signe de l'impédance caractéristique

$$\frac{T_y^-}{v_y^-} = \mu c = Z_C$$

II.B – Couplage corde-chevalet

II.B.1)

Cette condition à la limite $x = L$ traduit le couplage entre la corde et l'ensemble chevalet, table d'harmonie. De point de vue énergétique, la puissance transmise par la corde au chevalet a pour expression

$$P = \vec{T}_g(L, t) \cdot \vec{v}(L, t) = -T_y(L, t)v_y(L, t) = Rv_y(L, t)^2 > 0$$

donc il existe un transfert énergétique net de la corde vers le chevalet et la table d'harmonie, qui va permettre à la table d'harmonie de rayonner de l'énergie sonore grâce à son excitation par la corde.

Je ne vois pas d'autre argument simple justifiant la cohérence de ce modèle.

II.B.2)

Les vibrations de la corde sont décrites par l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; y(0, t) = 0 ; \frac{T_y(L, t)}{v_y(L, t)} = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = -R$$

en utilisant la relation

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

pour relier T_y et y .

On considère dans un premier temps l'équation de d'Alembert et la condition en $x = 0$

$$s^2 \exp(st) f(x) = c^2 \exp(st) f''(x) ; f(0) \exp(st) = 0$$

soit les équations

$$f'' - \left(\frac{s}{c}\right)^2 f = 0 ; f(0) = 0$$

L'équation différentielle en f admet la solution générale

$$f(x) = a \exp\left(\frac{sx}{c}\right) + b \exp\left(-\frac{sx}{c}\right)$$

les constantes d'intégration a et b étant liée par la condition

$$f(0) = a + b = 0 ; b = -a$$

soit, en considérant l'extension aux arguments complexes de la fonction \sinh

$$f(x) = a \left(\exp\left(\frac{sx}{c}\right) - \exp\left(-\frac{sx}{c}\right) \right) = A \sinh\left(\frac{sx}{c}\right)$$

La condition à la limite $x = L$ s'écrit alors

$$-R = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = \frac{T_0 s \cosh(sL/c)}{cs \sinh(sL/c)} = \frac{T_0}{c \tanh(sL/c)}$$

soit, comme $T_0 = \mu c^2$

$$\tanh\left(\frac{sL}{c}\right) = -\frac{T_0}{Rc} = -\frac{\mu c}{R} = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{1}{r}$$

La forme équivalente donnée dans l'énoncé découle de la relation

$$\tanh(x) = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$$

II.B.3)

On recherche s sous la forme $s = \alpha + j\omega$, soit, comme r est réel et $r > 1$

$$\exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) \exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1} \in R^+$$

On en déduit les deux équations

$$\exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = 1 ; \exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$$

La première équation impose les valeurs de ω

$$\frac{2L\omega}{c} = 2\pi n ; \omega = n \frac{\pi c}{L} = 2\pi f_n^0$$

Les solutions constituent un ensemble de modes propres de fréquence identiques aux fréquences propres de la corde vibrante non couplée au chevalet.

D'autre part, comme $r > 1$, $0 < (r-1)/(r+1) < 1$

$$\alpha = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) \frac{c}{2L} = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) f_0 < 0$$

La dépendance temporelle de $y(x, t)$ est de la forme

$$\exp(st) = \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

Comme $\alpha < 0$, $\exp(st)$ est amortie exponentiellement avec le temps, ce qui est cohérent avec la perte d'énergie de la corde au profit de l'ensemble chevalet, table d'harmonie.

II.B.4)

On reporte $s = \alpha + j\omega$ dans l'expression de la solution, en développant $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\frac{\omega x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(-j\frac{\omega x}{c}\right) \right) \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

en regroupant les exponentielles complexes

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega \left(t + \frac{x}{c}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right) \exp(-\alpha t)$$

et en notant $F(u) = (A/2) \exp(j\omega u)$

$$y(x, t) = \exp(\alpha t) \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t + \frac{x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t - \frac{x}{c}\right) \right)$$

Il s'agit de la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverses, amplifiées ($\alpha < 0$) dans le sens de la propagation et atténuées temporellement. Ce n'est donc plus une onde stationnaire, puisque les dépendances spatiales et temporelles ne sont plus séparées.

II.B.5)

Le temps caractéristique d'atténuation de l'onde est

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right)}$$

Ce temps est d'autant plus court que la fréquence fondamentale de la corde est plus élevée, donc que le son émis est plus aigu. L'atténuation des sons aigus est donc plus rapide que celle des sons graves, ce qui est cohérent avec les constatations expérimentales.

La première amélioration possible pour le modèle serait la modélisation de l'ensemble chevalet, table d'harmonie par un oscillateur amorti, pour tenir compte des deux sens de transfert énergétique possible, et non du seul sens corde \rightarrow chevalet. En effet quand on excite la table d'harmonie (en la frappant par exemple, l'expérience étant encore plus démonstrative avec une guitare), elle transmet de l'énergie aux cordes qui se mettent à vibrer. L'amortissement de l'oscillateur modélisant la table rend compte du rayonnement d'énergie sonore par cette dernière.

La seconde amélioration possible consisterait à modéliser l'ensemble des cordes du piano, qui sont en réalité couplées par l'intermédiaire du cadre du piano et de la table d'harmonie (principe d'émission de sons harmoniques par un piano : enfoncer sans la jouer une note pour permettre la vibration de la corde associée, puis jouer et relâcher immédiatement une note située par exemple une octave au-dessus ou au-dessous : la corde libérée est mise en vibration)

Modéliser mécaniquement la table d'harmonie, qui se comporte comme une surface vibrante et possède donc différents modes propres de vibration, ainsi que ses interactions avec les cordes (excitation de la table d'harmonie) et interaction avec l'air qui l'entoure (rayonnement de puissance sonore).

Pour avoir une idée de ce type de modélisation, on peut consulter par exemple les thèses de G. Derveaux (2002) pour une guitare, de J. Chabassier (2012) pour un piano, en accès libre aux adresses <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002585/> et <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00662740/>.

III Corrosion des cordes de piano

III.A – L'acier : constituant essentiel des cordes de piano

III.A.1) Le fer α

a) Une maille élémentaire est le plus petit motif permettant de reconstruire le cristal par translations successives.

b) La maille conventionnelle du fer α contient :

- un atome à chacun des 8 sommets, partagé entre 8 mailles, soit 1 atome en propre ;
- un atome au sommet de la maille, appartenant en propre à la maille.

soit au total deux atomes par maille conventionnelle.

c) Dans la maille conventionnelle du fer α les atomes sont tangents le long de la grande diagonale de la maille, donc

$$4R_{\text{Fe}} = \sqrt{3}a_{\alpha}$$
$$R_{\text{Fe}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_{\alpha} = 124 \text{ pm}$$