Notes de cours

Séries de Fourier

PC, Lycée Dupuy de Lôme

1 Coefficients de Fourier

1.1 Fonctions 2π périodique continues par morceaux

Définition (Fonctions périodiques) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est 2π-périodique si :

$$\forall x \in \mathbf{R} \ , \ f(x+2\pi) = f(x)$$

Remarque Etant donné une fonction g définie sur $[0, 2\pi[$, il existe une unique fonction f définie sur $\mathbf{R}$, 2π périodique, telle que

$$\forall x \in [0, 2\pi[\ , \ f(x) = g(x)$$

Ainsi pour définir une fonction 2π périodique sur $\mathbf{R}$, il suffit de la définir sur $[0, 2\pi[$

Remarque Si g est continue sur $[0, 2\pi[$, alors f est continue sur $\mathbf{R}$ si et seulement si

$$g(0) = \lim_{x \to 2\pi^-} g(x)$$

Définition (Fonctions continues par morceaux)
- Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ un fonction. On dit que f est continue par morceaux si : il existe $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tels que $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$ f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et possède des limites finies à gauche et à droite en a_i et a_{i+1}.
- Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction. On dit que f est continue par morceaux si pour tout segment $[a, b]$, la restriction de f à $[a, b]$ l'est.

Remarque Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique.
- Pour prouver que f est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, il suffit de prouver que f est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ (ou $[0, 2\pi]$).
- Pour intégrer f sur un intervalle de longueur 2π :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$$

Définition (Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux)
- Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ un fonction. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si : il existe $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tels que $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$ f est $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$ et f et f' possède des limites finies à gauche et à droite en a_i et a_{i+1}.
- Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction. On dit que f est continue par morceaux si pour tout segment $[a, b]$, la restriction de f à $[a, b]$ l'est.

1.2 Coefficients de Fourier

Définition (coefficients de Fourier exponentiels) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction 2π périodique, continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier (exponentiels) de f les nombres :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \ , \ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Remarque $t \to f(t)e^{-int}$ est continue par morceaux 2π périodique, donc :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \ , \ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Définition (coefficients de Fourier trigonométriques) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction 2π périodique, continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier (trigonométriques) de f les nombres :

$$\forall n \in \mathbf{N} \ , \ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \ , \ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Proposition Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \ , \ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Preuve : .....

1.3 Propriétés

Proposition Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction 2π périodique, continue par morceaux. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

–

$$c_n(g) = \overline{c_{-n}(f)}$$

où $g = \bar{f}$

– $c_n(g) = c_{-n}(f)$ où g est définie par $g(t) = f(-t)$
– $c_n(g_a) = e^{ina} c_n(f)$ où g_a est définie par $g_a(t) = f(t + a)$.

Preuve ...

Remarque Mieux vaut savoir refaire ces preuves que d'apprendre des formules.

Proposition Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction 2π périodique, continue par morceaux.

– Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \ , \ b_n(f) = 0$$

– Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n(f) = 0 \ , \ b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Remarque On utilisera donc les coefficients de Fourier trigonométrique lorsque la fonction possède une propriété de parité.

Exemple Si f est π périodique, que peut-on dire de $c_n(f)$?

Remarque Soit $n \in \mathbf{Z}$, l'application $f \to c_n(f)$ est linéaire.

Proposition (Majoration des coefficients de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ un fonction 2π périodique, continue par morceaux. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \ , \ |c_n(f)| \leq |f|_\infty$$

1.4 Coefficients de Fourier et dérivation

Proposition Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \ c_n(f') = inc_n(f)$$

Preuve Pour $f\mathcal{C}^1$, faire une IPP

Corollaire Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique $\mathcal{C}^{k-1}$, $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \ c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Proposition (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue par morceaux,

$$\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$$

Preuve Pour $f\mathcal{C}^1$ avec la formule précédente, puis par approximation.

1.5 Méthodes de calcul

Exemple (calcul direct, par parties) Coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique f telle que :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = \pi - x$$

Exemple (calcul direct) Coefficients de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = max(\sin(x), 0)$$

Exemple (calcul par développement en série entière) Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| \neq 1$. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{a - e^{ix}}$$

Exemple (par récurrence) Coefficients de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2(x)}$$

2 Séries de Fourier

2.1 Définition

Définition Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue par morceaux. On appelle somme de partielle de la série de Fourier de f :

$$\forall p \in \mathbf{N} \ , \ S_p(f)(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k(f) e^{ikx}$$

On appelle série de Fourier de f la série de fonctions

$$S(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \lim_{p \to +\infty} S_p(f)(x)$$

Remarque La série de Fourier de f peut être exprimée avec les coefficients trigonométriques :

$$S_p(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{p} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$$

$$S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$$

Preuve ....

2.2 Convergence pour $\|.\|_2$

Remarque L'espace vectoriel des fonctions continues 2π périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ peut être muni du produit scalaire :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f(t)} g(t) dt$$

La norme associée :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}$$

Remarque Pour ce produit scalaire, la famille $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est orthonormée :

$$e_n(t) = e^{int}$$

Remarque Pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(f) = < e_n, f >$$

Remarque La projection orthogonale de f sur $Vect(e_k, -p \leq k \leq p)$ est $S_p(f)$

Théorème (convergence en moyenne quadratique) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue par morceaux. La suite $(S_p(f))_{p\geq 0}$ converge vers f pour $\|.\|_2$.

Preuve Cas où f est continue, distance ....+approximation .

Théorème (Formule de Parseval) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue par morceaux. On a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve Cas où f est continue,

Remarque On peut réécrire cette formule avec les coefficients trigonométriques :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Remarque On retrouve que $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ tend vers 0.

Application 1 (calcul de série) A l'aide de la fonction la fonction 2π périodique f telle que :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \;\; f(x) = \pi - x$$

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Application 2 (inégalité) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

Montrer l'inégalité suivante et prouver qu'elle est optimale :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt$$

Proposition Soit $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique <u>continues</u> telles que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$

Exemple Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue telle que $c_n(f) = 0$ pour n impair. Montrer que f est π périodique.

2.3 Convergence normale

Théorème (Dirichlet, version convergence normale)] Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :

- $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

- Cette série converge normalement sur $\mathbf{R}$

Preuve Pour $f\mathcal{C}^1$. Pour la convergence normale utiliser $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Pour l'égalité, f et $S(f)$ sont continues et ont même coefficients de Fourier.

Application 1 (calcul de séries) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = |\cos(x)|$$

En utilisant f, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \;\; , \;\; sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

Application 2 (développement en série de Fourier) Développer en série de Fourier la fonction f

$$f(x) = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x))$$

Application 3 (résolution d'équation) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π périodique et $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, y''(t) + e^{it} y(t) = 0$$

2.4 Convergence simple

Notation Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Soit $x \in \mathbf{R}$. On note ;

$$f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t) \;\;,\;\; f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$$

Remarque Vu la définition d'une fonction continue par morceaux, cela existe toujours.

Théorème (Dirichlet, version convergence simple) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :

- $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

- Cette série converge simplement sur $\mathbf{R}$.

Remarque Si f est continue en x, on retrouve $S(f)(x) = f(x)$

Exemple Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On note f la fonction 2π périodique définie sur $] - \pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant f, calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n} \;\;,\;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} \;\;,\;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$$

2.5 Autres périodes

Remarque Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. La fonction f définie par

$$f(x) = g(\frac{Tx}{2\pi})$$

est continue par morceaux, 2π périodique.

Définition Soit g une fonction T-périodique continue par morceaux, on définit :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \;\; c_n(g) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} dt$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; S(g)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g) e^{\frac{2i\pi kx}{T}}$$

Remarque Mieux vaut avoir compris le changement de variable que d'apprendre ces formules.

Exemple Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue telle que

$$\forall n \geq 0, \;\; \int_0^1 g(t) \cos(n\pi t) dt = 0$$

Montrer que $g = 0$.