Notes de cours

Séries de fonctions

PC, Lycée Dupuy de Lôme

I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$. $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Modes de convergence

1.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition (convergence simple) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I, on dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Exemple La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Exemple La série de fonction suivante converge simplement sur $\mathbf{R}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

Exemple Trouver l'ensemble de définition de :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - x}$$

1.2 Convergence normale d'une série de fonctions

Notation Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction bornée, on note

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(t)|, t \in I\}$$

Définition (convergence normale) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I, on dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Exemple La fonction série de fonction suivante converge normalement sur $[a, +\infty[$ $(a > 1)$ mais pas sur $[1, +\infty[$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Théorème (convergence normale par domination) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I, on suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que la série $\sum a_n$ converge et

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq a_n$$

Alors la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur I.

Preuve ...

Exemple Calculer M, en déduire la convergence normale sur $[0, +\infty[$ de la série $\sum f_n$:

$$M = sup\{2u^2 e^{-u}, u \geq 0\} \ \ f_n(x) = \frac{\sin(x^2)}{ch(nx)}$$

Remarque Pour prouver la convergence normale d'une série de fonctions, il y a deux méthodes : utiliser la définition ou le théorème de domination.

1.3 Convergence normale d'une série de fonctions sur tout segment

Définition (convergence normale sur tout segment) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I, on dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I si pour tout a, b tels que $[a, b] \subset I$, la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$

Exemple La série de fonction S converge normalement sur tout segment de $\mathbf{R}$ où

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$$

1.4 Liens entre les modes de convergence

Proposition Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I (ou normalement sur tout segment de I), alors la la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Preuve ...

Remarque La réciproque est fausse

Exemple La série de fonction suivante converge simplement mais pas normalement sur $[0, +\infty[$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-nx}$$

Remarque Il est vrai que la convergence normale sur I implique la convergence normale sur tout segment de I. La réciproque est fausse.

Remarque La série de fonction suivante converge normalement sur tout segment de $\mathbf{R}$ mais pas sur normalement sur $\mathbf{R}$. mais pas normalement sur $[0, +\infty[$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$$

2 Etude d'une fonction définie par une série

2.1 Continuité-limites

Théorème (continuité d'une fonction définie par une série) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. On suppose :

- Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue sur I
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I (ou normalement sur tout segment de I)

Alors la fonction S définie sur I par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est continue sur I

Preuve ...

Exemple Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

Exemple Trouver l'ensemble de continuité de S

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n})$$

Exemple Trouver un équivalent en 0^+ de S :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x}$$

Théorème (limite d'une fonction définie par une série) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. Soit a une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$). On suppose :

– Pour tout $n \geq 0$, cette limite existe :

$$b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$$

– La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I.

Alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exemple Calculer la limite en $+\infty$ de S :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} th(\frac{x}{2^n})$$

Exemple Calculer la limite en $+\infty$ de S, puis en trouver un équivalent par comparaison série intégrale :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

2.2 Dérivabilité

Théorème (dérivabilité d'une fonction définie par une série) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. On suppose :

– Pour tout $n \geq 0$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I.

– La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

– La série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur I (ou normalement sur tout segment de I).

Alors la fonction S définie sur I par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I,\ \ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

Exemple Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on pose $\phi_z(t) = e^{zt}$. Alors ϕ_z est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \ \phi'_z(t) = ze^{zt}$$

Exemple Montrer que la série de fonctions S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})$$

Théorème (dérivées successive d'une fonction définie par une série) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. Soit $k \in \mathbf{N}^* \cup +\infty$.On suppose :

– Pour tout $n \geq 0$, f_n est $\mathcal{C}^k$ sur sur I.

– La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

– Pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$,la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur I (ou normalement sur tout segment de I).

Alors la fonction S définie sur I par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Exemple Montrer que S est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

Exemple Montrer que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

2.3 Intégration

Il existe deux théorèmes d'intégration des séries de fonctions selon que l'on soit sur un segment ou non.

Théorème (intégration d'une série de fonctions, version segment) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur un segment I. On suppose :

- Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue sur I
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I

Alors :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Preuve revenir aux sommes partielles

Exemple Calculer I_n, en déduire la relation :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(x)dx \ , \ \int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)}dx = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

Exemple Calcul de

$$\int_0^1 \psi(x)dx \ , \ \psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

Théorème (intégration d'une série de fonctions, version générale) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions toutes définies sur I. On suppose :

- Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue par morceaux, intégrable sur I.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux.
- La série numérique $\sum \int_I |f_n(x)|dx$ converge.

Alors la fonctions S définie sur I par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Exemple Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

Exemple Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)} = \int_\alpha^{+\infty} (F(x) - 1) dx$$

où

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$