Notes de cours

Déterminants-Matrices

PC, Lycée Dupuy de Lôme

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$, E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1 Matrices

1.1 Matrices semblables

Définition Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Remarque A est semblable à 0 équivaut à $A = 0$, A est semblable à I équivaut à $A = I$

Remarque Si A et B sont semblables, alors $rg(A) = rg(B)$

Preuve $A = UJ_rV$

Exemple Les matrices suivantes ne sont pas semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n aussi.

Proposition Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Preuve Formule de passsage : $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Exemple Les matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Trace

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On appelle trace de A :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque $Tr(A) \in \mathbf{K}$

Proposition – L'application $M \to Tr(M)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vers $\mathbf{K}$
- Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $Tr({}^tA) = Tr(A)$
- Si A et B sont semblables, alors $Tr(A) = Tr(B)$

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que ${}^tM + M = Tr(M)A$

Exemple Les matrices suivantes ne sont pas semblables

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de u, noté $Tr(u)$ la trace de la matrice de u relative à une base quelconque de E.

Remarque Cette définition ne dépend pas de la base choisie.

Exemple Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par $\phi(P) = X^2P' - nXP$. Que vaut $Tr(\phi)$?

1.3 Calcul par blocs

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,q}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbf{K})$. On note, par bloc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdots a_{1,q} & b_{1,1} \cdots b_{1,n-q} \\ \cdots & \cdots \\ a_{p,1} \cdots a_{p,q} & b_{p,1} \cdots b_{p,n-q} \\ c_{1,1} \cdots c_{1,q} & d_{1,1} \cdots d_{1,n-q} \\ \cdots & \cdots \\ c_{n-p,1} \cdots c_{n-p,q} & d_{n-p,1} \cdots d_{n-p,n-q} \end{pmatrix}$$

Proposition (Calcul par bloc) Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbf{K})$, $C, C' \in \mathcal{M}_{n-p,q}(\mathbf{K})$, $D, D' \in \mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbf{K})$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$$

Remarque Les opérations sur les matrices par bloc s'effectuent comme les opérations matricielles classiques.

Remarque Dans le produit l'ordre d'écriture des matrices est important.

Exemple Que vaut la transposée de cette matrice ?

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

2 Déterminants

2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition On appelle forme n-linéaire alternée toute application $f : E^n \to \mathbf{K}$ telle que

- Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, pour tout $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$, l' application suivante est linéaire.
$$x \to f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
- Pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ avec $i < j$, si $x_i = x_j$ alors
$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = 0$$

Proposition (Opération élémentaires) Si f est une forme n-linéaire alternée sur E,

- La valeur d'une forme n-linéaire est inchangée si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres :
$$f(x_1, \cdots, x_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k x_k, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$
- La valeur d'une forme n-linéaire est multipliée par λ si un vecteur l'on multiplie un vecteur par λ
$$f(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_n) = \lambda f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$
- La valeur d'une forme n-linéaire alternée est changée en son opposé si l'on échange la position de deux vecteurs.
$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

Définition Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle déterminant relative à la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \cdots, e_n) = 1$, on la note $det_{\mathcal{B}}$. Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $f = \lambda det_{\mathcal{B}}$, avec $\lambda \in \mathbf{K}$

Remarque Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ sont deux bases de E,

$$det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n) = det_{\mathcal{B}'}(e_1, \cdots, e_n) det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

Exemple $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B}) = (e_1, e_2)$ la base canonique.

$$det_{\mathcal{B}}(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xy' - x'y$$

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille d'éléments de E. $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de $E \iff det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$

Preuve sens direct : formule de changement de base. sens indirect : se ramener à libre puis par l'absurde.

Exemple La famille $(1, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(-1, 1, 1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$

2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. On appelle déterminant de u, le nombre

$$det(u) = det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$$

Remarque Pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$,

$$det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = det(u) det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

Remarque Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Preuve Changement de base puis remarque précédente puis changement de base.

Proposition Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$

- $det(uov) = det(u)det(v)$
- $det(\lambda u) = \lambda^n det(u)$
- u est bijectif si et seulement si $det(u) \neq 0$ et dans ce cas $det(u^{-1}) = \frac{1}{det(u)}$

Preuve définition, linéarité, un endomorphisme est bijectif ssi l'image d'une base est une base.

2.3 Déterminant d'une matrice

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $(C_1, \cdots, C_n)$ les colonnes de M et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On appelle déterminant de M, le déterminant la famille de vecteurs $(C_1, \cdots, C_n)$ de $\mathbf{K}^n$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$det(M) = det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_n)$$

Proposition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $(x_1, \cdots, x_n)$ n vecteurs de E. Soit M la matrice de u dans une base de E, respectivement la matrice de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ dans une base de E. Alors $det(u) = det(M)$ et $det(x_1, \cdots, x_n) = det(M)$

Preuve Presque par définition.

Remarque Cette proposition permet de ramener le calcul de n'importe quel déterminant au déterminant d'une matrice.

Exemple La famille de vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$ suivante en est-elle une base ? $(X^2, X^2 - X, 2 + X + X^2)$.

Exemple L'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$ est-il bijectif ?

Proposition Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et dans ce cas $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
- $det({}^tA) = det(A)$
- si A et B sont semblables , $det(A) = det(B)$.

Preuve ...

Exemple Montrer n est pair si et seulement si il existe une matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ antisymétrique.

3 Calcul de déterminants

Les méthodes ci dessous sont classées par ordre d'importance.

3.1 Par opération élémentaires

Définition On appelle opération élémentaire sur une matrice l'une des opérations suivantes :
- Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne ($C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$), cela ne change pas son déterminant.
- Multiplier une colonne par λ ($C_i \leftarrow \lambda C_i$), cela divise le déterminant par λ
- Echanger deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$), cela change le signe du déterminant.
- Les opérations correspondantes sur les lignes.

Remarque Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

Exemples

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =??? \ , \quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(b-a)^2$$

3.2 Par développement selon une ligne/colonne

Théorème Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\} \ det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Preuve linéarité selon la ligne i

Remarque Le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j) de A

Exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =???$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =???$$

Exemple Montrer par récurrence que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \Longrightarrow det(A) \in \mathbf{Z}$

3.3 Par récurrence

Proposition (Déterminant de Van der Monde) Soit $x_1, \cdots, x_n$ n complexes. On appelle déterminant de Van der Monde :

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = det((x_i^{j-1})_{1 \le i,j \le n})$$

On a :

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Preuve opération puis développement puis récurrence

Remarque La matrice de Van der Monde est inversible si et seulement si les nombres x_k sont deux à deux distincts.

Exemple Ecrire le déterminant de Van der Monde pour $n = 3$.

Exemple (déterminant tridiagonal) Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

3.4 Par bloc

Proposition (déterminant par bloc) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$.

$$det(\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = det(A)det(B)$$

Preuve

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =???$$

3.5 Par n-linéarité

Exemple Factoriser

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \\ a^4+b^4 & a^4+c^4 & b^4+c^4 \end{vmatrix}$$

3.6 Méthode polynômiale

Exemple Calculer le déterminant de M en considérant le polynôme P défini par $P(x) = det(M + xJ)$, J étant la matrice formée uniquement de 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Applications des déterminants

4.1 Formule de Cramer

Proposition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On note M_j la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de M par B. Si $det(M) \neq 0$, le système possède une unique solution donnée par :

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}\ , x_j = \frac{det(M_j)}{det(M)}$$

Preuve En notant $M_1, \cdots, M_n$ les colonnes de M,

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_i M_j$$

Remarque Ne s'applique qu'aux systèmes ayant autant d'équations, que d'inconnues.

Remarque A surtout un intérêt théorique. Utile pour les systèmes (2,2) ou systèmes à paramètres.

Exemple Soit $m \in \mathbf{C}$ Discuter et résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + my + z & = & 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z & = & -1 \\ (m-1)x - 3z & = & -1 \end{array} \right.$$

Exemple Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $det(M) = 1$. Exprimer M^{-1} a l'aide des coefficients de M

4.2 Orientation d'un espace vectoriel

Définition Orienter un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, c'est décider qu'une base $\mathcal{B}$ est directe. Une base $\mathcal{B}'$ est alors dite directe si $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et indirecte si $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$

Remarque Dans $\mathbf{R}^n$, on convient que la base canonique est directe.

Exemple La base suivante de $\mathbf{R}^3$ est-elle directe ou indirecte ?

$$(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 0)$$

4.3 Condition d'alignement de trois points

Proposition Soit M, M', M'' trois points du plan de coordonnées $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$. M, M', M'' sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Preuve ils sont alignés ssi $M\vec{M}'$ et $M\vec{M}''$ sont colinéaires ssi $det(M\vec{M}', M\vec{M}'') = 0$ ssi ...

Exemple Soit A, B, C trois points de coordonnées respectives $(-a, 0)$,$(a, 0)$,(c, γ). Montrer que le centre de gravité du triangle ABC, son orthocentre, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle sont alignés.