Corrigé du Concours Blanc (Algèbre) Sujet 1.

Problème 1 (E3A PSI 2005).

Préliminaire.

1. Puisque U n'est pas inversible, u n'est pas bijectif, donc pas injectif et son noyau n'est pas réduit à {0}.
   Donc : $\exists\ x \in E,\ x \neq 0,\ u(x) = 0$.
2. On sait que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}.x_j = 0$, puisque : $u(x) = 0$.

   Soit alors i un indice tel que : $|x_i| = \|x\|_\infty$, alors : $|u_{i,i}|.\|x\|_\infty = |u_{i,i}|.|x_i| = \left|-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} u_{i,j}.x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |u_{i,j}|.|x_j|$, à l'aide de l'inégalité triangulaire.
3. Puisque x est non nul, on a : $\|x\|_\infty \neq 0$, et si on note à nouveau i un indice tel que : $|x_i| = \|x\|_\infty$, alors :
   $|u_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |u_{i,j}|.\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |u_{i,j}|$, puisque tous les quotients sont inférieurs ou égaux à 1.
4. Puisque la condition précédente n'est vérifiée sur aucune ligne de la matrice proposée, elle est donc inversible (on a toujours : $|u_{i,i}| = 4$, et : $\forall\ 1 \leq i \leq 5$, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5} |u_{i,j}| \leq 3$).

Partie 1.

1. a. En écrivant au besoin le détail de la matrice M, on constate qu'elle est symétrique réelle (et même tridiagonale) donc diagonalisable dans ℝ, et toutes les racines de son polynôme caractéristique sont réelles.
   La symétrie de M peut se prouver plus proprement en remarquant que :
   - $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, $(|i - j| = 1) \Leftrightarrow (|j - i| = 1)$, et donc que le coefficient non diagonal $m_{i,j}$ vaut 1 si et seulement si $m_{j,i}$ vaut aussi 1 (sinon ils valent tous les deux 0).

   b. On peut simplement remarquer que : $g = f + 2.e$, puisque cette égalité est valable pour les matrices représentatives.
   Puis : $(\lambda \in sp(f)) \Leftrightarrow (\det(f - \lambda.e) = 0) \Leftrightarrow (\det([f + 2.e] - (\lambda+2).e) = 0) \Leftrightarrow (\det(g - (\lambda+2).e) = 0)$,
   soit finalement : $(\lambda \in sp(f)) \Leftrightarrow (\lambda+2 \in sp(g))$.
   D'autre part, on obtient de même :
   $\forall\ x \in E$, $(x \in \ker(f - \lambda.e)) \Leftrightarrow (f(x) = 2.x) \Leftrightarrow (g(x) = [f + 2.e](x) = (\lambda+2).x) \Leftrightarrow (x \in \ker(g - (\lambda+2).e)$,
   d'où l'égalité des deux sous-espaces.
2. a. Puisque la matrice $(T - \mu.I_n)$ est non inversible (car μ est une valeur propre de T), la question 3 du préliminaire permet d'affirmer qu'il existe : $i \in \{1,\ldots,n\}$, $|t_{i,i} - \mu| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |t_{i,j}|$.

   b. On remarque alors que tous les coefficients de la matrice T sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale qui valent 1.
   Donc : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $t_{i,i} = 0$, et : $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |t_{i,j}| \leq 2$, d'où le résultat voulu.
   Enfin, tout nombre entre -1 et +1 peut se mettre sous la forme $\cos(\alpha)$, avec : α a $[0,\pi]$, ce qui justifie l'écriture de μ sous la forme demandée.
3. a. Le vecteur : $x = (x_1, \ldots, x_n)$, est-il vecteur propre de T pour la valeur propre : $\mu = 2.\cos(\alpha)$, si et seulement si :
   - $-\mu.x_1 + x_2 = 0$,
   - $\forall\ 2 \leq k \leq n - 1$, $x_{k-1} - \mu.x_k + x_{k+1} = 0$,
   - $x_{n-1} - \mu.x_n = 0$,

   ce qui avec les valeurs proposées pour x_0 et x_{n+1}, se ramène à :
   $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $x_{k-1} - \mu.x_k + x_{k+1} = 0$, ou encore : $x_{k-1} - 2.\cos(\alpha).x_k + x_{k+1} = 0$.

   b. Ceci revient à prouver que 2 et -2 ne sont pas valeurs propres de T.
   Pour cela, les suites vérifiant la relation de récurrence précédente se trouvent en utilisant l'équation

caractéristique associée qui serait dans ce cas : $r^2 – 2.\varepsilon.r + 1 = 0$, avec : $\varepsilon = \pm 1$.
On sait de plus que de telles suites forment un $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et que différents cas se présentent pour trouver une base de cet espace, suivant que l'équation caractéristique admet deux racines simples ou une racine double.
Or dans le cas qui nous intéresse, les suites cherchées sont alors de la forme : $(x_k) = ((A + B.n).\varepsilon^n)$, puisque ε est racine double de l'équation caractéristique.
Comme de plus on doit avoir : $x_0 = x_{n+1} = 0$, cela entraîne : $A = 0$, puis : $B = 0$, et : $x = 0$.
Autrement dit un vecteur x vérifiant : $t(x) = (2.\varepsilon).x$, est nécessairement nul et $(2.\varepsilon)$ n'est donc pas valeur propre de t.
Finalement : $\alpha \in]0,\pi[$.

c. Pour une valeur de α dans $]0,\pi[$, l'équation caractéristique précédente admet deux racines complexes conjuguées distinctes qui valent : $r_\pm = e^{\pm i\alpha}$.
Donc il existe bien deux constantes c_1 et c_2 complexes, telles que : $(x_k) = c_1.(e^{+ik\alpha}) + c_2.(e^{-ik\alpha})$, ce qui entraîne en particulier que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = c_1.e^{ik\alpha} + c_2.e^{-ik\alpha}$.

d. L'expression précédente de la suite (x_k) montre de plus qu'on doit avoir :
- $x_0 = 0$, soit : $c_1 + c_2 = 0$, ou encore : $c_2 = -c_1$, puis :
- $x_{n+1} = 0$, soit : $2.i.c_1.\sin((n+1).\alpha) = 0$, et comme : $c_1 = 0$, entraîne la nullité de x, si on veut un vecteur non nul, on doit avoir : $\sin((n+1).\alpha) = 0$, soit : $\exists j \in \mathbb{Z}$, $(n+1).\alpha = j.\pi$.

Enfin, comme : $\alpha \in]0,\pi[$, cela impose : $\exists j \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha = \dfrac{j.\pi}{n+1}$.
Autrement dit les valeurs α_j proposées sont bien les seules possibles pour α.

e. Réciproquement, toute valeur α_j précédente fournit un vecteur propre donné par :
$\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $x_k = c_1.2.i.\sin(k.\alpha_j)$, si et seulement si : $2.i.c_1 \in \mathbb{R}^*$.
En effet, un tel n-uplet est alors réel, non nul (puisque : $x_1 \neq 0$), et vérifie la relation de récurrence précédente (en ajoutant : $x_0 = x_{n+1} = 0$), donc c'est bien un vecteur propre de t, associé à la valeur propre : $\mu = 2.\cos(\alpha_j)$.
On constate ensuite que ces valeurs sont toutes distinctes puisque les α_j sont distincts entre 0 et π, intervalle sur lequel la fonction sinus est injective.
On a donc trouvé n valeurs propres de T, qui ne peut donc en avoir d'autre et on a donc trouvé <u>les</u> valeurs propres de T.
Enfin, puisqu'elles sont toutes distinctes, elles sont donc valeurs propres simples et les espaces propres associés sont des droites ; en particulier, une base de l'espace propre associé à : $\mu_j = 2.\cos(\alpha_j)$, est par exemple fournie par : $v_j = (\sin(\alpha_j), \sin(2.\alpha_j), \ldots, \sin(n.\alpha_j))$.

4. La question I.1.b montre alors que les valeurs propres de μ sont les valeurs :
$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\lambda_j = \mu_j – 2 = -4.\sin^2\left(\dfrac{j.\pi}{2.(n+1)}\right)$, et les espaces propres associés sont les droites précédentes dont on a déjà donné une base.

Partie 2.

1. a. Il suffit d'écrire : $(\lambda \in sp(h)) \Leftrightarrow (\det(h – \lambda.e) = 0)$.
Or : $h – \lambda.e = (2 – \lambda).e – r.f = -r.\left(f - \dfrac{2-\lambda}{r}.e\right)$.
Et comme r est non nul, on a : $(\det(h – \lambda.e) = 0) \Leftrightarrow \left(\det\left(f - \dfrac{2-\lambda}{r}.e\right) = 0\right)$.
Finalement : $(\lambda \in sp(h)) \Leftrightarrow \left(\left(\dfrac{2-\lambda}{r}\right) \in sp(f)\right)$, ce qui donne les valeurs :
$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\eta_j = 2 – r.\lambda_j = 2 + 4.\sin^2\left(\dfrac{j.\pi}{2.(n+1)}\right)$, valeurs qui sont toutes distinctes et non nulles.
On en déduit que h est diagonalisable (n valeurs propres distinctes ou matrice symétrique réelle), et ses espaces propres sont ceux de f puisque : $(f(x) = \lambda_j.x) \Leftrightarrow (h(x) = (2 – \lambda_j.r).x)$.

b. Comme les n valeurs propres de H sont clairement non nulles, H est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre (ou le déterminant de H est non nul, puisque égal au produit des valeurs propres).

2. Soit x un vecteur propre de f (donc de h).
Alors : $f(x) = \lambda_j.x$, et : $h(x) = \eta_j.x$, avec les notations précédentes, et :

$k(x) = (2 + r.\lambda_j).x$, puis : $h^{-1}(k(x)) = \dfrac{2+r.\lambda_j}{2-r.\lambda_j}.x$, soit : $w(x) = \omega_j.x$, et x est vecteur propre de w.

Donc w est diagonalisable dans une base de vecteurs propres de f et ses valeurs propres sont :

$\forall\ 1 \leq j \leq n,\ \omega_j = \dfrac{2+r.\lambda_j}{2-r.\lambda_j}$.

3. a. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de S (associés aux σ_i).

Alors : $\forall\ x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} x'_i.\varepsilon_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x'^2_i$, puisque la base est orthonormale.

De plus : $(s(x)|x) = (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i.x'_i.\varepsilon_i | \sum_{j=1}^{n} x'_j.\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.x'^2_i$, à nouveau car la base est orthonormale.

Si on pose alors : $p = \min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, et : $q = \max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, on a bien : $p.\|x\|^2 \leq (s(x)|x) \leq q.\|x\|^2$.

Enfin, on ne peut pas améliorer ces deux nombres (trouver : p' > p, ou : q' < q), puisque ces inégalités sont des égalités pour les vecteurs propres de s correspondant à a valeur propre minimale ou maximale de s.

b. En conservant les notations précédentes, on a :

$$\forall\ x \in E,\ (\|x\| \leq 1) \Rightarrow (\|s(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.x'^2_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x'^2_i\right).(\max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|)^2 \leq \|x\|^2.(\max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|)^2 \leq (\max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|)^2),$$

d'où finalement : $\|s(x)\| \leq \max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|$.

Cela prouve tout d'abord que N(S) existe, qu'il est majoré par $\max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|$, et comme cette valeur est atteinte pour un vecteur propre unitaire de s correspondant à une valeur propre de s de valeur absolue maximale, cette valeur <u>est</u> la borne supérieure des valeurs considérées, soit : $N(S) = \max_{1\leq i\leq n}|\sigma_i|$.

4. a. H et K étant symétriques puisque M l'est, H^{-1} est également symétrique.
En effet : $H.H^{-1} = I_n$, donc : ${}^t(H.H^{-1}) = I_n = {}^t(H^{-1}).{}^tH = {}^t(H^{-1}).H$, et donc : ${}^t(H^{-1}) = H^{-1}$.
D'autre part H et K commutent puisque : $H.K = 4.I_n - r^2.M^2 = K.H$, donc H^{-1} et K aussi.
En effet : $(H.K = K.H) \Rightarrow (K = H^{-1}.K.H) \Rightarrow (K.H^{-1} = H^{-1}.K)$.
Enfin W est symétrique car : ${}^tW = {}^t(H^{-1}.K) = {}^tK.{}^t(H^{-1}) = K.H^{-1} = H^{-1}.K = W$.
Les valeurs propres de W par ailleurs ont été données à la question II.2 :

$$\forall\ 1 \leq j \leq n,\ \omega_j = \frac{2+r.\lambda_j}{2-r.\lambda_j} = \frac{2-4.r.\sin^2(\alpha_j)}{2+4.r.\sin^2(\alpha_j)} = \frac{1-2.r.\sin^2(\alpha_j)}{1+2.r.\sin^2(\alpha_j)},\ \text{et : } |\omega_j| \leq 1.$$

Comme de plus : $(\omega_j = \pm 1) \Leftrightarrow (\omega_j = 1) \Leftrightarrow (2.r.\sin^2(\alpha_j) = 0)$, cette dernière égalité n'étant jamais vérifiée (pour r strictement positif), on a bien : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $|\omega_j| < 1$, et finalement : $N(W) < 1$.

b. W étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et : $\exists\ P \in Gl_n(\mathbb{R}),\ \exists\ D \in Diag_n(\mathbb{R}),\ W = P.D.P^{-1}$.
Enfin : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ W^k = P.D^k.P^{-1}$, et (D^k) tend vers 0 puisque les éléments diagonaux de D sont en module strictement inférieurs à 1 (ce sont les valeurs propres de W).
Il est alors clair que toutes les suites composantes de (W^k) tendent vers 0, donc que (W^k) tend vers 0.

<u>Problème 2 (E4A 2000).</u>

1. Le rappel fait en début d'exercice incite à essayer les matrices de la base canonique.
Par exemple : $E_{1,1}.E_{2,1} = \delta_{1,2}.E_{1,1} = 0$, et : $E_{2,1}.E_{1,1} = \delta_{1,1}.E_{2,1} = E_{2,1}$.
Donc pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on aura :
$N(E_{1,1}.E_{2,1}) = 0$, et : $N(E_{2,1}.E_{1,1}) = N(E_{2,1}) \neq 0$, puisque : $E_{2,1} \neq 0$.
Il ne peut donc exister de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant la condition imposée.
2. Il suffit d'appliquer les règles de calcul.
On a donc :

$$\bullet\ X.Y = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.E_{1,j}.E_{r,1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.E_{i,i}.E_{r,1} = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right).E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i.E_{i,1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \text{et :}$$

• Y.X = $\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\lambda_r.E_{r,j} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_1\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_n & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Remarque : les deux matrices ont même trace.
Etonnant, non ?

3. a. Il suffit de prendre : A = 0, λ = 0, et on obtient : q(0) = q(0.0) = |0|.q(0) = 0.
   Puis : $\forall$ A $\in$ E, q(– A) = |-1|.q(A) = q(A).
   b. Pour : (A,B) $\in$ E^2, il suffit d'écrire :
   q(A) = q(A + B – B) $\leq$ q(A + B) + q(B), d'où : q(A) – q(B) $\leq$ q(A + B), et de même :
   q(B) – q(A) $\leq$ q(A + B), d'où le résultat.
   Conséquence : si : q(B) = 0, alors : |q(A)| $\leq$ q(A + B) $\leq$ q(A) + 0, et comme : q(A) $\geq$ 0, on conclut.
4. Pour démontrer que f vérifie SN_1 et SN_2, il suffit d'utiliser la linéarité de la trace et l'inégalité triangulaire vérifiée par le module dans $\mathbb{C}$.
   Que f vérifie (P) est un résultat de cours.
5. a. On peut constater que : $E_{i,j}.E_{i,i}$ = 0, et que : $E_{i,i}.E_{i,j} = E_{i,j}$.
   Donc si q est une semi-norme vérifiant (P), alors : q($E_{i,j}$) = q(0) = 0.
   b. Pour A quelconque, il suffit alors d'appliquer les questions 3.b et 5.a, pour obtenir que :
   q(A) = $q\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}.E_{i,i} + \sum_{i\neq j}a_{i,j}.E_{i,j}\right) = q\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}.E_{i,i}\right)$, puisque toutes les autres matrices ont une semi-norme nulle.
   c. On va terminer avec la question 2.
   On vient de constater que la semi-norme de A ne dépend en fait que de ses éléments diagonaux, donc les matrices A et $\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$ ont même semi-norme.
   Mais avec la question 2 (en utilisant les matrices X et Y suggérées par la matrice carrée au-dessus et la question 2), on a donc :
   q(A) = $q\left(\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{i,i} & 0 & \cdots & 0\\ a_{2,2} & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,n} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right) = q\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}\right).E_{1,1}\right)$, puisque, là encore, toutes les autres matrices ont une semi-norme nulle.
   Donc : q(A) = $\left|\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}\right|.q(E_{1,1})$.
   Autrement dit : q = α.f, avec : α = q($E_{1,1}$) $\in$ $\mathbb{R}^+$.
   d. La conclusion s'impose : les semi-normes vérifiant (P) sont les applications q qui s'écrivent : q = α.f, avec : $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
   En effet, toute semi-norme vérifiant (P) s'écrit ainsi d'après 5.c, et toute application de cette forme est (comme on le vérifie immédiatement) une semi-norme vérifiant (P).