7. Introduction aux espaces vectoriels

Les **espaces vectoriels** sont des **structures algébriques** que l'on retrouve quasiment partout en mathématiques et qui sont la structure de base en **algèbre linéaire**. Vous avez déjà rencontré de nombreux espaces vectoriels en mathématiques, sans jamais les nommer ainsi. Le but de ce court chapitre introductif est de vous permettre de reconnaître, en tant que tel, les espaces vectoriels que vous connaissez déjà, ainsi que quelques objets mathématiques fondamentaux de l'algèbre linéaire. Dans ce chapitre comme précédemment, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

7.1 Espaces

7.1.1 Espaces vectoriels

Définition 7.1.1 — Espace vectoriel. Soient E un ensemble non vide et deux applications « + » et « . », notées comme suit :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} .$$

Alors on dit que E, muni des **lois** « + » et « . », noté $(\mathrm{E}, +, .)$, est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** (ou **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$), si et seulement si on a les propositions suivantes :

(i +)	$\forall x, y, z \in \mathrm{E},\ (x + y) + z = x + (y + z)$	(Associativité de +)
(ii +)	$\forall x, y \in \mathrm{E},\ x + y = y + x$	(Commutativité de +)
(iii +)	$\exists 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{E},\ \forall x \in \mathrm{E},\ x + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} + x = x$	(Élément neutre pour +)
(iv +)	$\forall x \in \mathrm{E},\ \exists y \in \mathrm{E},\ x + y = y + x = 0_{\mathrm{E}}$	(Opposé pour +)
(i .)	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathrm{E},\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$	(Associativité de .)
(ii .)	$\forall x \in \mathrm{E},\ 1.x = x$	(Élément neutre pour .)
(i + .)	$\forall x, y \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$	(Distributivité de . sur +)
(ii + .)	$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).x = \lambda.x + \mu.x$	(Distributivité de $+_{\mathbb{K}}$ sur .)

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**. La loi « + » est appellée **loi d'addition interne** (ou simplement l'**addition vectorielle**). La loi « . » est appellée **loi de multiplication externe** (ou simplement **multiplication scalaire**).

R Lorsqu'il s'agit d'ensembles bien connus, on omet souvent de préciser les lois « + » et « . » et on les fait correspondre aux lois usuellement associées à ces ensembles. On parle alors simplement de l'espace vectoriel E plutôt que de l'espace vectoriel $(E, +, .)$. C'est notamment le cas pour les espaces de matrices, comme on le verra par la suite.

R On a ici noté $+_{\mathbb{K}}$ pour différencier l'addition dans $\mathbb{K}$ de l'addition vectorielle. De manière générale, on simplifie en notant toutes les additions +. De même, on simplifie souvent $\lambda.x$ en écrivant λx.

R Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle aussi d'**espace vectoriel réel** et, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'**espace vectoriel complexe**.

Propriété 7.1.1 — Unicité de l'élément neutre. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors, il n'existe qu'un seul élément 0_E qui vérifie la propriété (iii +) de la définition.

Démonstration. On suppose qu'il existe deux éléments neutres pour l'addition vectorielle dans E, que l'on appelle e et e', i.e. pour tout $x \in E$, on a $x + e = e + x = x$ et $x + e' = e' + x = x$. Mais ainsi, en prenant successivement $x = e$ puis $x = e'$, on obtient $e + e' = e' + e = e = e'$. D'où l'unicité de l'élément neutre 0_E. ■

Propriété 7.1.2 — Unicité de l'opposé. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors, pour chaque vecteur x de E, il n'existe qu'un seul vecteur y dans E, tel que $x + y = y + x = 0_E$

Démonstration. Soit x un vecteur de E. On suppose qu'il existe deux vecteurs y et y' tels que $x + y = y + x = 0_E = x + y' = y' + x$. Mais alors, $y' = y' + 0_E = y' + (x + y) = (y' + x) + y = 0_E + y = y$. D'où l'unicité de l'opposé. ■

Propriété 7.1.3 — Produit de facteurs nuls. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a les propositions suivantes :

(i) $\forall x \in E,\ 0.x = 0_E$
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ [\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0_E)]$

Démonstration. Soit x un vecteur de E. On a $x + 0.x = 1.x + 0.x = (1 + 0).x = 1.x = x$ par (ii .) et (ii + .). De même, $0.x + x = x$. Ainsi, $0.x$ est un élément neutre pour l'addition vectorielle et donc, par unicité, $0.x = 0_E$.

Soit, de plus, $\lambda \in K$ avec $\lambda \neq 0$. On a $x = 1.x = \lambda.(\frac{1}{\lambda}.x) = \lambda.(0_E + \frac{1}{\lambda}.x) = \lambda.0_E + \lambda.(\frac{1}{\lambda}.x) = \lambda.0_E + 1.x = \lambda.0_E + x$. On en déduit donc que $\lambda.0_E$ est un élément neutre pour l'addition vectorielle et, comme précédemment, cela donne $\lambda.0_E = 0_E$.

On considère maintenant, x et λ tels que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, alors on peut considérer $\frac{1}{\lambda}$. On a donc $x = 1.x = \frac{1}{\lambda}(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}(0_E) = 0_E$, ce qui permet de conlcure. ■

Exercice 7.1 Montrer que, pour tout vecteur x de E, l'opposé de x est égal à $(-1).x$. ■

R Ce résultat permet de définir la soustraction de deux vecteurs via $x - y = x + (-1).y$.

Exercice 7.2 Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}^n$, muni des lois + et . définies comme suit, est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

$$+ : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{array}$$

et

$$. : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{array} .$$

■

Exercice 7.3 Soient m et n deux entiers strictement positifs. On considère l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$, $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Définir une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur cet ensemble de la manière la plus naturelle possible. On s'appuiera sur les résultats des chapitres précédents. Faire de même pour l'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$, puis pour l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ■

Exercice 7.4 Soit $I \subset \mathbb{R}$. On rappelle que $\mathbb{R}^I$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut munir $\mathbb{R}^I$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. ■

Exercice 7.5 Donner d'autres exemples d'espaces vectoriels (penser, entre autres, au « plus petit » espace vectoriel possible). ■

7.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 7.1.2 — Sous-espace vectoriel. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E (muni des lois + et .), si et seulement si les propositions suivantes sont vérifiées :

(i)	$F \neq \emptyset$	(F non vide)
(ii)	$\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$	(F stable pour +)
(iii)	$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$	(F stable pour .)

On utilise très souvent l'abréviation **sev** pour parler de sous-espace vectoriel.

Théorème 7.1.4 Soient $(E, +, .)$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sev de E. Alors F, muni des restrictions de + (à $F \times F$) et . (à $\mathbb{K} \times F$), est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. On montre simplement les propositions (iii +) et (iv +) de la définition d'un espace vectoriel, les autres se démontrent très directement. Pour (iii +), comme $F \neq \emptyset$, il existe $x \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$. En particulier, $0_E = 0.x \in F$. Pour (iv +), pour tout $x \in F$, on a $-x = (-1).x \in F$, or $-x$ est l'opposé de x dans E, donc x en possède aussi un dans F (le même). ■

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel est très souvent plus rapide que de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Il n'y a en effet que trois propositions à vérifier (et même que deux via les caractérisations qui suivent) contre huit pour un espace vectoriel. On pourra donc montrer qu'un certain ensemble est un espace vectoriel, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel bien connu.

Théorème 7.1.5 — Caractéristation des sev. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \neq \emptyset$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ \lambda.x + y \in F$

R On montre souvent que $F \neq \emptyset$ en montrant que $0_E \in F$. En effet, si F est un sev de E, alors on a $0_E \in F$, puisque, si $x \in F$, $x + (-1).x = 0_E \in F$.

Propriété 7.1.6 — Sous-espaces triviaux. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors $\{0_E\}$ est un sev de E. De même, E est un sev de E.

Exercice 7.6 Démontrer la propriété précédente. ■

Exercice 7.7 Montrer que $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $F_2 = \mathbb{Z}^2$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles. ■

Exercice 7.8 En utilisant les ensembles vus en cours, lister au moins 10 sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Expliquer pourquoi, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles de dimension $n \times n$ n'appartient pas à cette liste. ■

Exercice 7.9 Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est un sev de $\mathbb{K}[X]$ mais que l'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un sev de $\mathbb{K}[X]$. ■

Exercice 7.10 Montrer que l'ensemble des suites réelles bornées est un sev de l'ensemble des suites réelles. Puis que l'ensemble des suites réelles qui convergent vers $l \in \mathbb{R}$ est un sev de l'ensemble des suites bornées si et seulement si $l = 0$. ■

Théorème 7.1.7 — Intersection de sev. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors $F \cap G$ est un sev de E.

Démonstration. Comme F et G sont des sev de E, on a $0_E \in F$ et $0_E \in G$, d'où $0_E \in F \cap G$ et $F \cap G \neq \emptyset$. De plus $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in F \cap G$, $x, y \in F$, donc $\lambda.x + y \in F$, de même, $x, y \in G$, donc $\lambda.x + y \in G$, d'où $\lambda.x + y \in F \cap G$. ■

R Attention, cela ne fonctionne pas avec l'union ! $F \cup G$ n'est en général PAS un sev de E. Un résultat classique énonce même que ce ne peut être le cas que si l'un des deux sev est contenu dans l'autre (i.e. $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Corollaire 7.1.8 — Solution d'un système linéaire homogène. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à m équations et n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour un système homogène à une équation. On obtient ensuite le résultat par récurrence via le théorème sur l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.

Soit $F = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0\}$ où $a_1, ..., a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. D'abord, on a bien $0_{\mathbb{K}^n} = (0, .., 0) \in F$. Ensuite, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, ..., x_n) \in F$ et $(y_1, ..., y_n) \in F$ alors $a_1(\lambda x_1 + y_1) + ... + a_n(\lambda x_n + y_n) = \lambda(a_1 x_1 + ... + a_n x_n) + (a_1 y_1 + ... + a_n y_n) = 0$, ce qui démontre le résultat. ■

7.2 Familles de vecteurs

Dans la section qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-ev (dont les lois sont sous-entendues). On s'intéresse aux familles finies de vecteurs de E, i.e. les p-uplets $(v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de E. Bien qu'il soit possible de parler de familles infinies, elles sont mises de côté ici : lorsqu'il est écrit « famille de vecteurs de E », il est sous-entendu « famille finie de vecteurs de E ».

7.2.1 Combinaison linéaire

Définition 7.2.1 — Combinaison linéaire. Soient $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E et x un vecteur de E. Alors, on dit que x est une **combinaison linéaire des vecteurs de** $\mathscr{F}$ si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k \ .$$

■ **Exemple 7.1** Soient $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,0,1)$ et $v_3 = (1,6,11)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En effet, $v_3 = 3.v_1 + 2.v_2$. ■

Théorème 7.2.1 — Sous-espace vectoriel engendré par une famille. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ est un sev de E, noté $\text{VECT}(\mathscr{F})$ ou $\text{VECT}(v_1, \dots, v_p)$:

$$\text{VECT}(\mathscr{F}) = \text{VECT}(v_1, \dots, v_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k \in \text{E} \;\middle|\; \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{K} \right\} .$$

R On peut voir que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k$ est toujours bien défini dans E par la définition d'un espace vectoriel.

Démonstration. On a $0_\text{E} = \sum_{k=1}^{p} 0.v_k$ et, par linéarité de la somme, $\lambda(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k . v_k = \sum_{k=1}^{p} (\lambda\lambda_k + \mu_k).v_k$ quelque soit $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$, ce qui démontre le théorème. ■

Exercice 7.11 Vérifier que $\mathbb{K}^n = \text{VECT}(e_1, \dots, e_n)$ où $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème position}}}{1}, 0, \dots, 0)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

De même, vérifier que $\mathbb{K}_n[\text{X}] = \text{VECT}(1, \text{X}, \text{X}^2, \dots, \text{X}^n)$ et que $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = \text{VECT}\left((\text{E}_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \right)$ où, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, $\text{E}_{i,j}$ est la matrice de taille m, n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice i, j qui vaut 1 (appelées les **matrices élémentaires**). ■

Exercice 7.12 Pour chacun des systèmes linéaires de l'exercice 5.14 du cours, exprimer l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé en tant que sous-espace vectoriel engendré par une famille. ■

Théorème 7.2.2 — Plus petit sev contenant $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{VECT}(\mathscr{F})$ est le plus petit sev de E contenant $\mathscr{F}$, i.e. :

(i) $\forall i \in [\![1, p]\!],\ v_i \in \text{VECT}(\mathscr{F})$,

(ii) si F est un sev de E tel que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ v_i \in \text{F}$, alors $\text{VECT}(\mathscr{F}) \subseteq \text{F}$.

Démonstration. On obtient facilement le premier point en prenant tous les λ_i nuls sauf un égal à 1. De plus, si tous les v_i appartiennent à un même sev F de E, alors, par la définition d'un sev et une récurrence immédiate, toute combinaison linéaire des v_i est dans F, d'où $\text{VECT}(\mathscr{F}) \subseteq \text{F}$. ■

Corollaire 7.2.3 Soit $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1})$ une famille de vecteurs de E. Alors, on a :

(i) $\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) \subset \text{VECT}(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1})$.

(ii) Si v_{p+1} est une combinaison linéaire des autres v_i, alors :
$$\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) = \text{VECT}(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}).$$
En particulier, $\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) = \text{VECT}(v_1, \ldots, v_p, 0_\text{E})$.

(iii) Si $\lambda \neq 0$, alors $\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) = \text{VECT}(v_1, \ldots, \lambda.v_p)$

(iv) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$, alors $\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) = \text{VECT}\left(v_1, \ldots, v_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k.v_k\right)$.

(v) Si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, alors $\text{VECT}(v_1, \ldots, v_p) = \text{VECT}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})$.

Démonstration. Il s'agit pour chacun de ces points d'une conséquence assez directe du théorème précédent et on laisse leurs démonstrations à faire en entraînement. ■

7.2.2 Famille génératrice, famille libre

Définition 7.2.2 — Famille génératrice. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors on dit que $\mathscr{F}$ est une **famille génératrice de** E, ou que E est engendré par $\mathscr{F}$, si et seulement si :

$$\text{E} = \text{VECT}(\mathscr{F}) \ .$$

R Le corollaire 7.2.3 montre que toutes les **sur-familles** d'une famille génératrice sont génératrices et permet de déterminer des **sous-familles** génératrices d'une famille génératrice.

■ **Exemple 7.2** Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (0,1,1)$. Alors (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet, tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3, via $(x,y,z) = (y-z).v_1 + (x-y+z).v_2 + (y-x).v_3$. ■

R Dans l'exercice 7.11, vous avez montré que chacune des familles considérées est une famille génératrice de l'espace vectoriel qui la contient.

Définition 7.2.3 — Famille libre. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{F}$ est **libre** si et seulement si :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \left[\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k = 0_E \right) \Rightarrow \left(\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \right) \right].$$

On dit que $\mathscr{F}$ est **liée** si et seulement si elle n'est pas libre.

Exercice 7.13 Quantifier le fait qu'une famille $\mathscr{F}$ soit liée. ■

Exercice 7.14 Montrer que chacune des familles de l'exercie 7.11 est libre. ■

Définition 7.2.4 — Colinéarité. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de E. On dit que v_1 et v_2 sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Théorème 7.2.4 — Cas $p = 1$ et $p = 2$. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs de E. Alors :

(i) (v_1) est libre si et seulement si $v_1 \neq 0_E$.
(ii) (v_1, v_2) est libre si et seulement si v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

Démonstration. La démonstration est directe et laissée en exercice d'entraînement. ■

Théorème 7.2.5 — Sous-famille d'une famille libre. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. On considère une famille libre de vecteurs de E, $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_{p+1})$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . v_k = 0$. Alors, en posant $\lambda_{p+1} = 0$, on a $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k . v_k = 0$. Mais, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = 0$, ce qui montre bien que $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre. ■

Corollaire 7.2.6 — Sur-famille d'une famille liée. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ une famille liée. On suppose qu'elle possède une sur-famille $\mathscr{F}'$ libre. Mais $\mathscr{F}$ est une sous-famille de $\mathscr{F}'$, elle est donc libre par le théorème précédent, ce qui est contradictoire avec le fait qu'elle soit liée. On a donc bien montré que toute sur-famille de $\mathscr{F}$ est nécessairement liée. ■

Théorème 7.2.7 — Extension d'une famille libre. Soit $(v_1, ..., v_p)$ une famille libre de vecteurs de E et v_{p+1} un vecteur de E. Alors, on a :

$$(v_1, ..., v_p, v_{p+1}) \text{ est une famille libre si et seulement si } v_{p+1} \notin \mathrm{VECT}\left(v_1, ..., v_p\right).$$

Démonstration. On montre le résultat en passant par la contraposée.

Si $v_{p+1} \in \mathrm{VECT}\left(v_1, ..., v_p\right)$ alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $v_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.v_k$. En posant $\lambda_{p+1} = -1$, on obtient $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k.v_k = 0_{\mathrm{E}}$ et $\left(v_1, ..., v_p, v_{p+1}\right)$ est liée.

Réciproquement, si $\left(v_1, ..., v_p, v_{p+1}\right)$ est liée, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k.v_k = 0_{\mathrm{E}}$. Si $\lambda_{p+1} = 0$ alors, on a $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.v_k = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi, comme $(v_1, ..., v_p)$ est libre, tous les λ_k sont nuls, ce qui est contradictoire. On a donc $\lambda_{p+1} \neq 0$. Mais alors, on peut poser $\mu_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{p+1}}$ pour tout k et on obtient $v_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \mu_k.v_k \in \mathrm{VECT}\left(v_1, ..., v_p\right)$. ■

7.2.3 Base

Définition 7.2.5 — Base. Soit $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une **base de** E si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E.

R Les espaces vectoriels usuels possèdent généralement des bases usuelles que l'on appelle **bases canoniques**. Pouvez-vous deviner ce que sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ ou encore $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$?

Théorème 7.2.8 — Coordonnées dans une base. Soit $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{B}$ est une base de E.

(ii) $\forall x \in \mathrm{E},\ \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.b_k$.

Dans ce cas, les scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$**.

Démonstration. Si $\mathscr{B}$ est une base, alors $\mathscr{B}$ est génératrice. On a donc pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.b_k$. Soient $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k.b_k$. Alors, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.b_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k.b_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k).b_k = 0_{\mathrm{E}}$. Comme $\mathscr{B}$ est libre, cela donne $\lambda_k = \mu_k$ pour tout k. On a bien montré l'existence et l'unicité.

Réciproquement, l'existence des λ_k montre que tout x de E est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc $\mathrm{E} \subset \mathrm{VECT}(\mathscr{B})$, puis $\mathrm{E} = \mathrm{VECT}(\mathscr{B})$. $\mathscr{B}$ est donc bien une famille génératrice

de E. L'unicité de cette décomposition, appliquée en $x = 0_{\mathrm{E}}$, montre que $\mathscr{B}$ est libre, puisque $0_{\mathrm{E}} = \sum_{k=1}^{n} 0.b_k$. ■

Théorème 7.2.9 — Dimension finie. Si E admet une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ alors toute base de E est composée d'exactement n vecteurs.

Démonstration. Soient $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathscr{B}' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ deux bases de E. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont même nombre d'éléments.

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, par le théorème précédent, il existe des uniques scalaires $a_{i,j}$, définis pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, tels que $b'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. On considère la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Soit $x \in \mathrm{E}$, en décomposant x dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ via le théorème précédent, on a $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i b'_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_{i,j} \right) b_j$. Puis, par unicité des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, $\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_{i,j}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. En posant $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$, cela est équivalent à ${}^t\mathrm{AM} = \Lambda$. Or, l'unicité des coordonnées dans chacune des bases, donnée par le théorème précédent, permet alors de dire que pour tout Λ, le système ${}^t\mathrm{AX} = \Lambda$ possède une unique solution. Comme cela a été vu dans le cours sur les systèmes linéaires, cela signifie que le système est de Cramer. On a donc $n = m$ et ${}^t\mathrm{A}$ est inversible (ce qui est aussi équivalent à A inversible). ■

R Dans ce cas, on dit que E est **de dimension finie** n. Les espaces vectoriels de dimension finie feront l'objet d'un prochain chapitre.