

6. Nombres complexes et polynômes

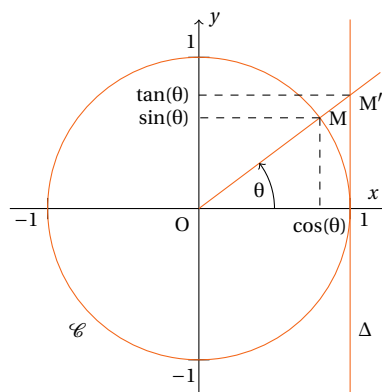
6.1 Nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est un ensemble de nombres que vous avez déjà rencontré au lycée. Comme il s'agit de rappels, on ne rentre pas trop dans le formalisme. La construction de \mathbb{C} n'est pas détaillée.

6.1.1 Rappels sur les fonctions trigonométriques

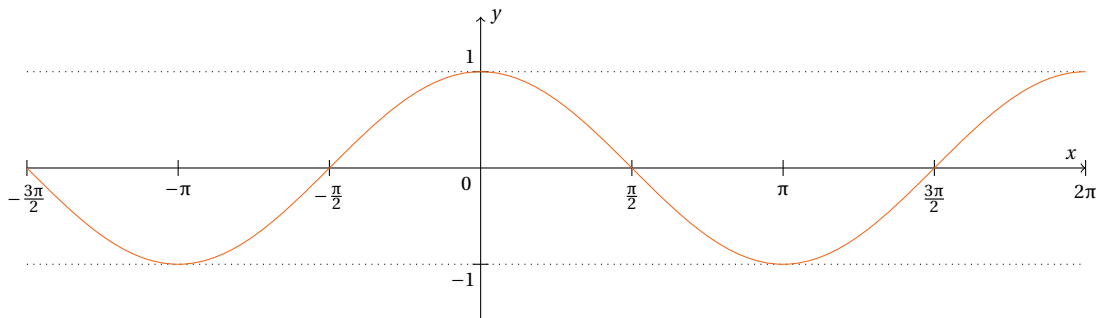
On considère la représentation suivante du cercle trigonométrique \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct). Chaque point M du cercle \mathcal{C} peut être associé à un angle θ dont la valeur en radian (dans $[0, 2\pi[$) correspond à la longueur de l'arc partant du point O au point M , et réciproquement.

Le **cosinus de l'angle** θ est l'abscisse du point M , le **sinus de l'angle** θ est l'ordonnée du point M . La **tangente de l'angle** θ est l'ordonnée du point M' , intersection de la droite (OM) avec la droite Δ d'équation $x = 1$. Comme il n'y a pas d'intersection entre pour les angles $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$, la tangente de ces angles n'est pas définie.

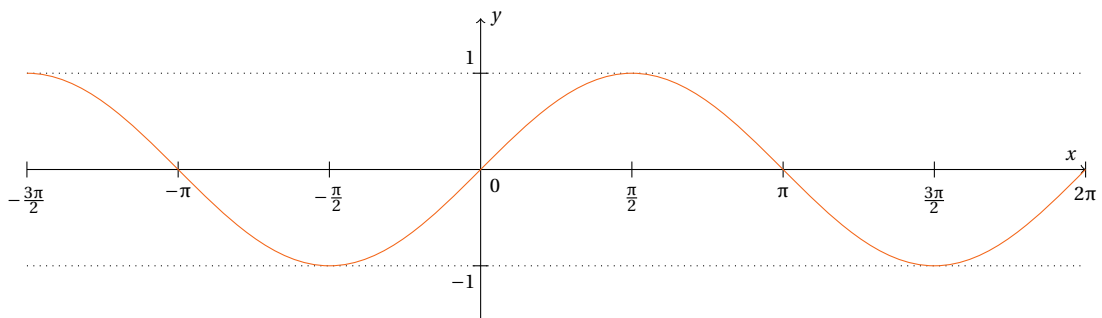


Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont ensuite prolongées sur tout \mathbb{R} par 2π -périodicité.

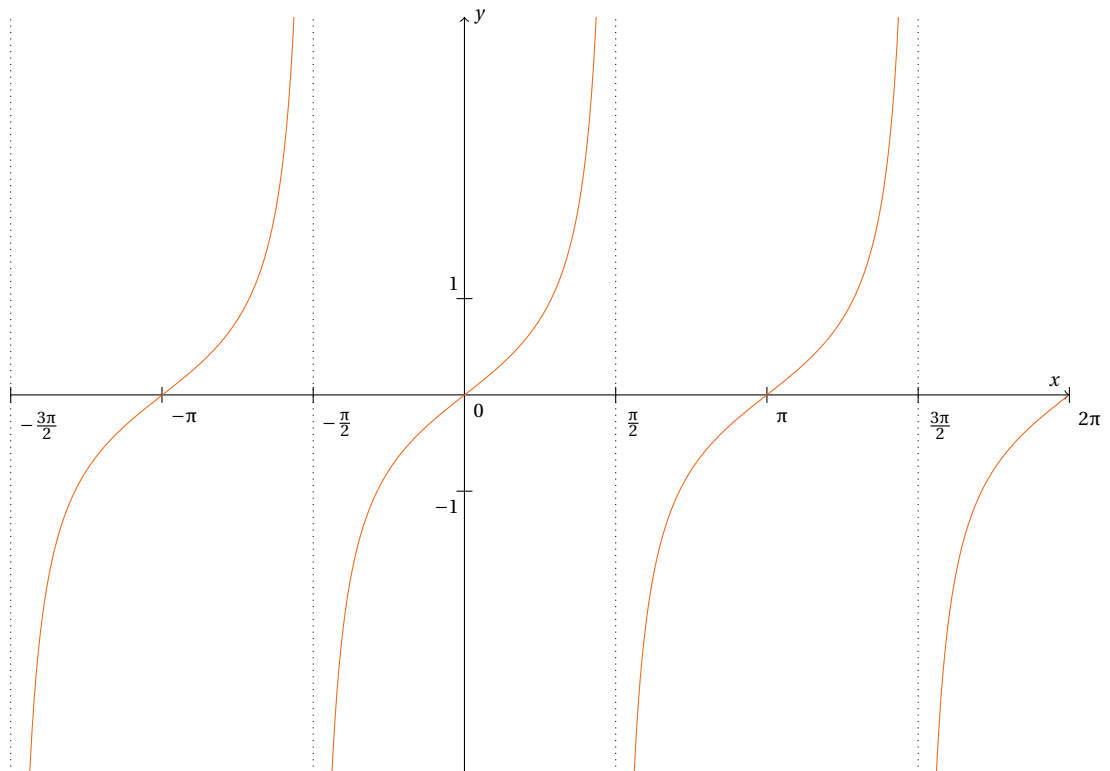
Représentation graphique de cosinus



Représentation graphique de sinus



Représentation graphique de tangente



Quelques formules (à connaître parfaitement)

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (\text{rien d'autre que le théorème de Pythagore!})$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (\text{rien d'autre que le théorème de Thalès!})$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad (\text{cosinus est paire.})$$

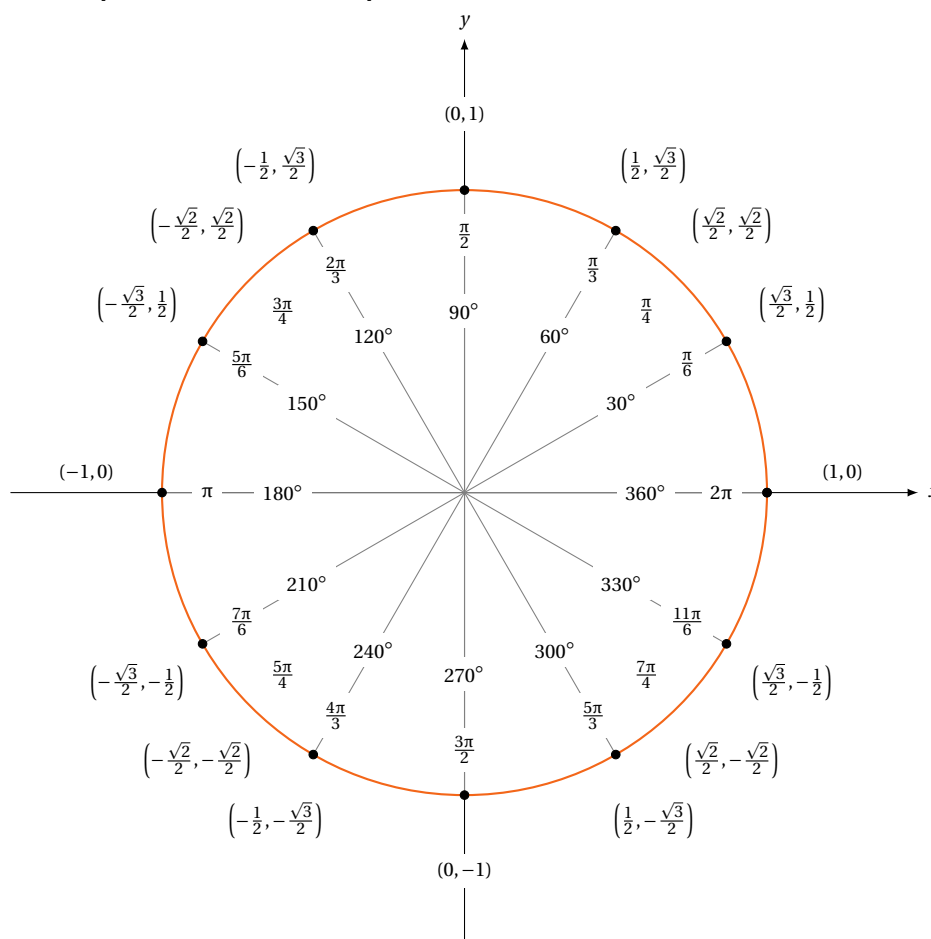
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad (\text{sinus est impaire.})$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Une bonne partie des autres égalités classiques peuvent se déduire de ses quatre égalités, par exemple $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$.

Valeurs remarquables (à connaître parfaitement)



6.1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Pour ce qui concerne ce cours, un **nombre complexe** est un nombre de la forme $x + iy$ où x et y sont réels et i est un nombre, non réel, tel que $i^2 = -1$.

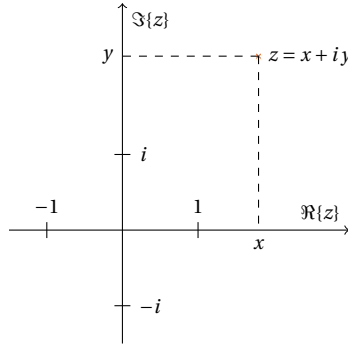
Théorème 6.1.1 — Forme algébrique. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont des réels. On appelle **forme algébrique** de z cette écriture. L'unicité de cette forme permet de définir deux applications \Re et \Im de \mathbb{C} dans \mathbb{R} , appelées **partie réelle** et **partie imaginaire**, telles que $\forall z \in \mathbb{C}, z = \Re(z) + i\Im(z)$.

Propriété 6.1.2 — \mathbb{R} -linéarité de \Re et \Im . Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (i) $\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z')$
- (ii) $\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$
- (iii) $\Re(\lambda z) = \lambda \Re(z)$
- (iv) $\Im(\lambda z) = \lambda \Im(z)$

R On parle de \mathbb{R} -linéarité parce que cela fonctionne uniquement lorsque l'on considère un scalaire λ réel.

Définition 6.1.1 — Représentation graphique d'un nombre complexe. La **représentation graphique d'un nombre complexe** $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est le point de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct).



6.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.1.2 — Conjugué. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, un nombre complexe sous sa forme algébrique. On note \bar{z} et on appelle **nombre complexe conjugué de z** le nombre complexe défini par $\bar{z} = x - iy$.

Propriété 6.1.3 — Règles de calcul. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a les propositions suivantes :

- (i) $\overline{\bar{z}} = z$
- (ii) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- (iii) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- (iv) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Démonstration. C'est direct, il suffit de passer aux formes algébriques. ■

R De (ii) et (iii), on peut déduire la \mathbb{R} -linéarité de $z \mapsto \bar{z}$, i.e. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{z + \lambda z'} = \bar{z} + \lambda \bar{z}'$.

6.1.4 Module d'un nombre complexe

Définition 6.1.3 — Module. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, un nombre complexe sous sa forme algébrique. On définit le module de z , noté $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété 6.1.4 — Règles de calcul. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a les propositions suivantes :

- (i) $|z|^2 = z\bar{z}$
- (ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- (iii) $|zz'| = |z||z'|$
- (iv) Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- (v) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

Démonstration. Encore une fois, il suffit de poser $z = x + iy, z' = x' + iy'$ et de faire les calculs. ■

R On peut se débarrasser d'un nombre complexe au dénominateur d'une fraction en multipliant en haut et en bas par son complexe conjugué : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

6.1.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 6.1.4 — Exponentielle complexe. On pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En particulier, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

R La forme exponentielle se justifie pour de nombreuses raisons. On remarque, entre autres, que la formule $e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)}$ est bien vérifiée. En effet, $(\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$. D'ailleurs, cette égalité permet de retrouver rapidement ses formules de trigo oubliées!

Théorème 6.1.5 — Forme exponentielle principale. Tout nombre complexe non nul, $z \in \mathbb{C}^*$, s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. On remarque d'abord que si $z = \rho e^{i\theta}$ alors $|z|^2 = z\bar{z} = \rho^2$ d'où $\rho = |z|$. Maintenant, si $z = x + iy$ est la forme algébrique de z , alors il suffit de poser $\rho = |z|$. On remarque alors que $(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho})$ appartient au cercle trigonométrique et il existe un unique θ dans $[0, 2\pi[$ correspondant. ■

Il y a unicité de la forme exponentielle principale. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ alors, d'après la démonstration du résultat précédent, $\rho = |z|$ et θ est unique, on l'appelle l'**argument principal** de z . Toutefois, il n'y a pas unicité de l'écriture exponentielle de manière générale. Si $z = \rho e^{i\theta}$ est la forme exponentielle principale de z alors, on a également $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et on appelle **argument** de z n'importe quelle valeur $\theta_k = \theta + 2k\pi$. On peut également écrire $z = -\rho e^{i(\theta+(2k+1)\pi)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, mais on ne parle pas alors d'argument du nombre complexe z .

Propriété 6.1.6 — Identité d'Euler.

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

R Cette identité est connue comme étant la formule la plus concise comportant les 5 nombres les plus importants de l'analyse complexe : 0, 1, e , i et π !

6.1.6 Retour à la trigonométrie

Propriété 6.1.7 — Cosinus et sinus. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On a $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) + (\cos(\theta) - i \sin(\theta))}{2} = \frac{2\cos(\theta)}{2} = \cos(\theta)$ et, de manière analogue, $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - (\cos(\theta) - i \sin(\theta))}{2i} = \frac{2i \sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$. ■

Théorème 6.1.8 — Formule de Moivre. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. ■

R On peut exprimer $\cos(n\theta) = \Re((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n)$ et $\sin(n\theta) = \Im((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en développant la puissance via le binôme de Newton.

On peut également utiliser ces formules pour **linéariser** des expressions trigonométriques (i.e. écrire un produit de fonctions trigonométriques en somme de fonctions trigonométriques).

■ **Exemple 6.1** On cherche à linéariser $f(x) = \cos^2(x) \sin^3(x)$. On a $f(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$.
 $f(x) = \frac{e^{2ix}+1+e^{-2ix}}{4} \frac{(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix})}{8i^3} = \frac{i(e^{5ix}-2e^{i3x}+e^{ix}-e^{-ix}+2e^{-3ix}-e^{-5ix})}{32} = \frac{-\sin(5x)+2\sin(3x)-\sin(x)}{16}$. ■

La formule qui suit n'est pas à connaître par cœur, mais sa démonstration doit être connue.

Propriété 6.1.9 — Angle moitié. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Démonstration. $1 + e^{i\theta} = e^0 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}+i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$. ■

R La technique de l'angle moitié est souvent utilisée pour additionner deux complexes de même module (et de même module seulement), en ramenant le problème à la propriété via diverses manipulations, notamment, en factorisant.

6.1.7 Équations polynomiales du second degré

Théorème 6.1.10 — Racine d'un nombre complexe. Soient $Z \in \mathbb{C}$ et (E) l'équation définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $z^2 = Z$. Si $Z = 0$, (E) possède une unique solution $z_0 = 0$. Si $Z = \rho e^{i\theta} \neq 0$ (avec $\rho = |Z|$ et θ l'argument principal de Z), (E) possède exactement deux solutions distinctes $z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration. Le cas $Z = 0$ est évident. Pour le cas $Z \neq 0$, on voit que $z - Z^2 = (z - z_1)(z - z_2)$, l'équation a donc bien exactement deux solutions z_1 et z_2 . ■

Théorème 6.1.11 — Racines complexes d'un polynôme complexe du second degré. Soient a, b et c trois complexes avec $a \neq 0$ et (E) l'équation définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $az^2 + bz + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, le **discriminant** de l'équation. Si $\Delta = 0$, alors (E) possède exactement une solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$. Si $\Delta \neq 0$, alors (E) possède exactement deux solutions distinctes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine de Δ .

Démonstration. $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$. Le trinôme ramené ainsi à sa **forme canonique**, on voit que l'équation (E) est équivalente à $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$, puis à $(z - z_1)(z - z_2) = 0$. On obtient donc le résultat. ■

Corollaire 6.1.12 — Racines complexes d'un polynôme réel du second degré. Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$, (E) l'équation définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $az^2 + bz + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation. Si $\Delta > 0$, alors (E) possède exactement deux solutions complexes distinctes, toutes deux également réelles, $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$, alors (E) possède exactement une solution complexe, également réelle, $z_0 = -\frac{b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, alors (E) possède deux solutions complexes distinctes, non réelles et conjuguées, $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

6.1.8 Autres résolutions d'équations

Cette section regroupe différents exemples utiles de résolution d'équations. Il est plus important ici de retenir la méthodologie que les résultats présentés.

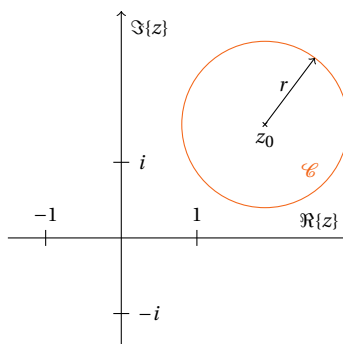
Racines n -ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux solutions de l'équation (E_n) définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $z^n = 1$. Si z est une solution alors on pose $z = \rho e^{i\theta}$ la forme exponentielle principale de z et on a $\rho^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$. D'où $\rho = 1$ et $n\theta = 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Et comme $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Réciproquement, $e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ est bien solution de (E_n) pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ces solutions sont appelées les **racines n -ièmes de l'unité**. En résumé :

$$(z^n = 1) \Leftrightarrow \left(z \in \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right\} \right) \Leftrightarrow \left(z \in \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \right).$$

Cercle

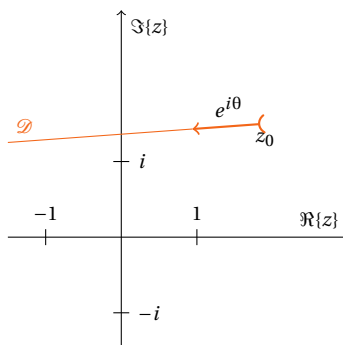
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On considère l'équation (C) définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $|z - z_0| = r$. Alors z est solution de (C) si et seulement si $z - z_0 = r e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, soit $z = z_0 + r e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions décrit alors un cercle, de rayon r et de centre z_0 . En résumé :



$$(|z - z_0| = r) \Leftrightarrow \left(z \in \left\{ z_0 + r e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \right) \Leftrightarrow (z \in \mathcal{C}).$$

Demi-droite

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (D) définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $\frac{z - z_0}{|z - z_0|} = e^{i\theta}$. Alors z est solution de (D) si et seulement si $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{*+}$, soit $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{*+}$. L'ensemble des solutions décrit alors une demi-droite, d'origine z_0 exclus et dont la direction est donné par l'angle θ . En résumé :



$$\left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} = e^{i\theta} \right) \Leftrightarrow \left(z \in \left\{ z_0 + \rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}^{*+} \right\} \right) \Leftrightarrow (z \in \mathcal{D}).$$

6.2 Polynômes

Dans l'ensemble de ce chapitre, \mathbb{K} désigne un ensemble de nombre qui peut-être \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

6.2.1 Définitions

Définition 6.2.1 — Polynôme. Soit P une application de \mathbb{K} dans \mathbb{K} . On dit que P est un **polynôme à coefficients dans \mathbb{K}** , s'il existe un entier n et un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k.$$

Définition 6.2.2 — Ensemble des polynômes. L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[X]$, lu « \mathbb{K} crochet X ».

Notation 6.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note X^k le polynôme X^k :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array}.$$

Plus généralement, le polynôme P :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^n a_kx^k \end{array} \text{ est noté } \sum_{k=0}^n a_kX^k.$$

Vocabulaire 6.1 Voici quelques éléments de vocabulaire usuel dans le contexte des polynômes :

- Le **polynôme nul** est l'application $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ définie par $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = 0$.
- Les **polynômes constants** sont les applications constantes définies par $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = a_0$, où $a_0 \in \mathbb{K}$.
- Un **monôme** (resp. **binôme**, resp. **trinôme**) est un polynôme ayant exactement un (resp. deux, resp. trois) coefficients non nuls.

6.2.2 Degré d'un polynôme

Théorème 6.2.1 — Unicité des coefficients. Soit P un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} . On suppose qu'il existe deux entiers n et m , ainsi qu'un $(n+1)$ -uplet (a_0, a_1, \dots, a_n) et un $(m+1)$ -uplet (b_0, b_1, \dots, b_m) tels que $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ et :

$$P = \sum_{k=0}^n a_kX^k = \sum_{k=0}^m b_kX^k.$$

Alors $n = m, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$.

Démonstration. Ce résultat est admis. Pour faire la démonstration, on peut se ramener au cas où P est le polynôme nul, puis on le montre par récurrence sur n en dérivant P . ■

Définition 6.2.3 — Degré d'un polynôme. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, le **degré de P** , noté $\deg(P)$, est l'unique entier n tel qu'il existe un $(n+1)$ -uplet (a_0, a_1, \dots, a_n) avec $a_n \neq 0$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$. a_nX^n est appelé le **terme dominant de P** et a_n , le **coefficient dominant**.

Si $a_n = 1$, on dit que P est **unitaire**.

Par convention, on pose $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.

Définition 6.2.4 — Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

■ **Exemple 6.2** $2X^3$ est un monôme de degré 3 ; $X^5 + 2X$ est un binôme unitaire de degré 5. ■

6.2.3 Opérations usuelles

Définition 6.2.5 — Opérations. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et λ un élément de \mathbb{K} . Alors on peut définir les opérations suivantes sur les éléments de $\mathbb{K}[X]$.

- (i) $P + Q$ défini par $\forall x \in \mathbb{K}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$. (addition)
- (ii) $P \times Q$ défini par $\forall x \in \mathbb{K}, (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$. (multiplication)
- (iii) λP défini par $\forall x \in \mathbb{K}, (\lambda P)(x) = \lambda P(x)$. (multiplication par un scalaire)
- (iv) $P \circ Q$ défini par $\forall x \in \mathbb{K}, (P \circ Q)(x) = P(Q(x))$. (composition)

Théorème 6.2.2 — Opérations et coefficients. Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On pose, pour tout $k > n$, $a_k = 0$ et, pour tout $k > m$, $b_k = 0$. Alors on a les formules suivantes pour les coefficients des polynômes obtenues après opérations :

- (i) $\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) + \left(\sum_{k=0}^m b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$.
- (ii) $\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^m b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$.
- (iii) $\lambda \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer les règles de calcul sur les sommes et de regrouper les termes par puissance de X . ■

Corollaire 6.2.3 — Opérations et degré. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a les propositions suivantes :

- (i) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- (ii) En particulier, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- (iii) $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- (iv) Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Démonstration. Ce résultat découle directement du théorème précédent, il suffit à chaque fois de considérer le monôme de plus au degré dans les sommes et de vérifier s'il est non nul. ■

6.2.4 Division euclidienne de polynômes

Théorème 6.2.4 — Division euclidienne. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le **quotient de la division euclidienne de A par B** et R le **reste de la division euclidienne de A par B** .

Démonstration. La démonstration de ce théorème est admise. Elle peut s'obtenir sans trop de difficultés par récurrence sur $\deg(A)$. ■

R La division euclidienne pour les polynômes se pose comme la division euclidienne pour les entiers, c'est-à-dire la division que vous avez apprise au primaire!

Exercice 6.1 Effectuer la division euclidienne de $5X^4 + 8X^3 - 2X + 6$ par $-3X^2 + 7$. ■

Définition 6.2.6 — Multiples, diviseurs. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que A est un **multiple de** B , ou encore que B est un **diviseur de** A , si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exercice 6.2 Déterminer l'ensemble des diviseurs et des multiples de $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. ■

6.2.5 Racines d'un polynôme

Définition 6.2.7 — Racine et multiplicité. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine de** P si $X - \alpha$ est un diviseur de P . L'**ordre de multiplicité d'une racine α de** P est le plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ soit un diviseur de P .

Théorème 6.2.5 — Caractérisation de la racine. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0.$$

Démonstration. Si α est racine de P , alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ telle que $P = (X - \alpha)Q$. On a donc $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$. Réciproquement, si α n'est pas racine de P , alors le reste R de la division euclidienne par $X - \alpha$ de P est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à $\deg(X - \alpha) = 1$. On en déduit que R est un polynôme constant, non nul. Il s'en suit que $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha) \neq 0$. ■

Corollaire 6.2.6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors α est racine d'ordre de multiplicité m de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. On obtient facilement le résultat en supposant par l'absurde que $Q(\alpha) = 0$, puis en utilisant le théorème. ■

Corollaire 6.2.7 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré d , alors la somme des ordres de multiplicité des racines de P est inférieure ou égale à d .

Démonstration. Le résultat peut se montrer aisément par récurrence forte sur d . ■

Théorème 6.2.8 — Racine complexes de polynômes réels. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine de P dans $\mathbb{C}[X]$ (par la \mathbb{R} -linéarité de $z \mapsto \bar{z}$), alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si P est à coefficient réel, alors $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$. ■

6.2.6 Factorisation de polynômes

Théorème 6.2.9 — Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Démonstration. Ce théorème est admis. Sa démonstration n'est, à ce niveau, pas triviale. ■

Corollaire 6.2.10 — Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n > 1$. Alors, on peut écrire :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \beta_k)^{m_k}$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines (non forcément distinctes) de P , et β_1, \dots, β_r sont les racines deux à deux distinctes de P avec m_1, \dots, m_r leurs multiplicités respectives (on a alors $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$).

Démonstration. On peut obtenir le résultat par récurrence, à partir du théorème. ■

R **Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$** , c'est l'écrire sous la forme ci-dessus. **Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$** , c'est l'écrire sous la forme ci-dessous.

Théorème 6.2.11 — Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 1$. Alors, on peut écrire :

$$P = \lambda \left(\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \right) \left(\prod_{k=1}^q (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k} \right)$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles distinctes de P avec m_1, \dots, m_r leurs multiplicités respectives, $X^2 + \beta_k X + \gamma_k$ sont des polynômes réels de degré 2 sans racine réelle et n_1, \dots, n_q des entiers tels que $n = m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_q$.

Démonstration. Ce théorème se déduit du corollaire précédent et du théorème 6.2.8. Il suffit de considérer la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme P . On regroupe tous les termes contenant les racines réelles dans le produit de gauche, puis on constate que les racines complexes restantes de P peuvent être associées deux à deux, avec leurs conjugués. Or $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2$ ce qui est bien un polynôme réel de degré 2 sans racine réelle. ■

Corollaire 6.2.12 — Racine réelle d'un polynôme réel de degré impair. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

Démonstration. On a $n = r + 2q$ donc, si n est impair, r est nécessairement non nul. ■

Pour factoriser un polynôme, on peut chercher certaines de ses racines en utilisant les moyens classiques (résolution d'une équation de degré 2, racines évidentes, changements de variables, racines n -ièmes de l'unité,...). Si on trouve des racines, on aura alors un facteur de P et on pourra faire la division euclidienne de P par ce facteur pour obtenir un polynôme de degré inférieur. On réitère ensuite le processus sur ce nouveau polynôme. On remarque qu'il peut être plus aisé, pour réaliser une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, de commencer par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6.3 Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$:

$$A = X^3 - 2X^2 + 1 \quad B = X^6 + 1 \quad C = X^4 + X^2 + 1 .$$