20. Dérivées successives

Ce chapitre vient compléter le chapitre 9 sur la dérivation vu au premier semestre. On introduit ici la notion de dérivées successives d'une fonction, i.e. la dérivée de la dérivée, puis la dérivée de cette dernière fonction, etc. Les dérivées successives des fonctions permettent, entre autres et via l'utilisation des théorèmes de Taylor et des développements limités, une description très précise des comportements asymptotiques des fonctions réelles.

20.1 Dérivées p-ièmes

20.1.1 Définitions

Définition 20.1.1 — Fonction de classe C^p. Soit f une application réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que f est **de classe** C^p **sur** I si f est continue, on pose alors $f^{(0)} = f$, et, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, l'application $f^{(k)}$ est dérivable, de dérivée continue, on pose alors $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$. On note $C^p(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^p sur I.

Définition 20.1.2 — Fonction de classe C^∞. Soit f une application réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^∞ sur I si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe C^p.v

Définition 20.1.3 — Fonction dérivable p fois en un point. Soient f une application réelle définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est dérivable p fois en x_0 s'il existe un voisinage J de x_0 tel que f est de classe C^{p-1} sur J et $f^{(p-1)}$ est dérivable en x_0.

R On parle également de l'ensemble $D^p(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ des fonctions p fois dérivables en tout point de I mais dont les dérivées p-ième ne sont pas forcément continues. On a ainsi l'emboîtement suivant de sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$: $C^{p+1}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset D^{p+1}(\mathrm{I}, \mathrm{R}) \subset C^p(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset D^p(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Exercice 20.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle. ■

Exercice 20.2 Montrer que les applications exp, cos, sin et X^n sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer toutes leurs dérivées successives. ▪

20.1.2 Opérations algébriques

Théorème 20.1.1 — Structure d'espace vectoriel. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Les ensembles $C^p(I,\mathbb{R})$ et $C^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 20.3 Démontrer le théorème. ▪

Théorème 20.1.2 — Formule de Leibniz. Soient $I \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, et f et g deux applications réelles de classe C^p sur I (resp. C^∞). Alors $f \times g$ est de classe C^p sur I (resp. C^∞) et on a :

$$\forall x \in I,\ (f \times g)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x)\ .$$

Exercice 20.4 Démontrer le théorème. ▪

Exercice 20.5 — Polynômes de Laguerre. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-x}x^n$ et $\mathrm{L}_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$. Montrer que $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et que son terme dominant est $(-1)^n \mathrm{X}^n$. ■

Théorème 20.1.3 — Théorème de composition. Soient $\mathrm{I}, \mathrm{J} \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, f une application réelle de classe C^p sur I (resp. C^∞) et g une application réelle de classe C^p sur J (resp. C^∞) telle que $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Alors $f \circ g$ est de classe C^p sur I (resp. C^∞).

Exercice 20.6 Démontrer le théorème. ■

Corollaire 20.1.4 — Quotient. Soient $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, f et g deux applications réelles de classe C^p sur I (resp. C^∞) telles que g ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{f}{g}$ est une application réelle de classe C^p sur I (resp. C^∞).

Démonstration. Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞ sur son ensemble de définition, il résulte du théorème de composition que $\frac{1}{g}$ est de classe C^p sur I. On conclut ensuite via le théorème de la formule de Leibniz. ■

20.1.3 Culture G : Les splines

Vous n'avez probablement jamais entendu parlé des splines et pourtant on les trouve aujourd'hui partout. D'ailleurs, en lisant ces lignes, ce sont des splines que vous regardez. En effet, le format pdf qui est le support de ce cours utilise des splines pour le rendu graphique de la plupart de son contenu.

Une spline est une fonction polynomiale par morceaux, pour laquelle chaque morceau est collé bout à bout de manière à ce que la fonction globale obtenue soit de classe C^2. Leur utilisation permet de coder des motifs (les différentes lettres des mots que vous lisez par exemple) qui paraissent totalement lisses pour un utilisateur humain, quelque soit l'échelle (si vous zoomez les lettres ne seront pas *pixelisées*), et ceci de manière économe en espace de stockage comme en puissance de calcul.

Si les splines sont aujourd'hui massivement présents dans le domaine informatique, leur développement est dû à l'industrie automobile française. Dans les années 60, Pierre Béziers, ingénieur chez Renault, popularisait des splines connues aujourd'hui sous le nom de courbe de Béziers, alors que le mathématicien Paul de Casteljau étudiait ces mêmes courbes pour le compte de Citroën. Cela fournit un bon exemple d'une technologie qui, initialement conçue pour un domaine très spécifique (le dessin de carrosseries), a profité à un tout autre domaine (le rendu visuel en informatique).

20.2 Développements asymptotiques

20.2.1 Formules de Taylor

Théorème 20.2.1 — Taylor avec reste intégral. Soient $p \in \mathbb{N}$ et f une application de classe C^{p+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(b-t)^p\,dt\,.$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence. Si $p = 0$, on a $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ par la définition de l'intégrale, ce qui correspond à la proposition. On suppose donc que la proposition est vraie à un certain rang $p \in \mathbb{N}$ et on montre qu'elle est vraie au rang $p+1$. Soient $f \in \mathrm{C}^{p+2}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. On a $f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(b-t)^p\,dt$, par hypothèse de récurrence. Or $\int_a^b \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(b-t)^p\,dt = \left[\frac{-f^{(p+1)}(b-t)^{p+1}}{(p+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(p+2)}(t)}{(p+1)!}(b-t)^{p+1}\,dt$ via une intégration par parties, ce qui permet de conclure. ■

Corollaire 20.2.2 — Inégalité de Taylor. Soient $p \in \mathbb{N}$, f une application de classe C^{p+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$ un majorant de $\left|f^{(p+1)}\right|$ sur I. Alors, on a :

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \left|f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{\mathrm{M}|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}\,.$$

Démonstration. On a $\left|\int_a^b \frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(b-t)^p\,dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{f^{(p+1)}(t)}{p!}(b-t)^p\right|dt \leq \mathrm{M}\int_a^b \left|\frac{(b-t)^p}{p!}\right|dt$.
Or $\int_a^b \left|\frac{(b-t)^p}{p!}\right|dt = \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}$, ce qui permet de conclure. ■

Exercice 20.7 Démontrer la convergence de la série exponentielle (théorème 16.2.10). ■

Corollaire 20.2.3 — Caractérisation de la multiplicité de la racine d'un polynôme réel. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul et $a \in \mathbb{R}$ une racine de P. Alors, a est de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Démonstration. Soit n le degré de P. Comme $P^{(n+1)} = 0$, l'application de la formule de Taylor donne $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$. La division euclidienne de P par $(X-a)^m$ est $P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + (X-a)^m \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(a)}{(k+m)!}(X-a)^k = R + (X-a)^m Q$ avec $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!}$. Or la racine a est de multiplicité m si et seulement si $R = 0$ et $Q(a) \neq 0$, ce qui permet de conclure. ■

Théorème 20.2.4 — Formule de Taylor-Young. Soient $p \in \mathbb{N}$, f une application de classe C^p sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors, on a :

$$f(x) =_{x \to a} \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^p\right) .$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème n'est pas au programme et est donc admise. ■

20.2.2 Développements limités

Grâce au théorème de Taylor-Young qui précède, on peut décrire le comportement asymptotique d'une fonction C^p au voisinage d'un point a par un polynôme de degré p et un reste qui est négligeable devant $(x-a)^p$. Ce type de description correspond à la notion de développement limité que l'on précise ici.

Définition 20.2.1 — Développement limité en un point. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de a. Alors, on dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **en** a (ou plus simplement un DL_n en a ou $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) =_{x \to a} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right) .$$

$P(x-a)$ est appelé la **partie régulière** du développement limité et $f(x) - P(x-a)$ le **reste**.

R On peut également considérer des DL_n à gauche ou à droite, notés alors $DL_n(a^-)$ et $DL_n(a^+)$.

Définition 20.2.2 — Développement limité en $+\infty$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de $+\infty$. Alors, on dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **en** $+\infty$ (ou plus simplement un $DL_n(+\infty)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) =_{x \to +\infty} P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) .$$

R On définit de même la notion de DL_n en $-\infty$. En pratique, on se concentrera toutefois sur les DL_n en un point et particulièrement en 0.

Théorème 20.2.5 — Unicité d'un DL_n. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de a. Si f admet un DL_n en a, il est unique.

Démonstration. Si $f(x) =_a \mathrm{P}(x-a) + o((x-a)^n) =_a \mathrm{Q}(x-a) + o((x-a)^n)$ alors on peut dire que $\mathrm{P}(x-a) - \mathrm{Q}(x-a) =_a o((x-a)^n)$, puis que $(\mathrm{P}-\mathrm{Q})(h) =_0 o(h^n)$. Or $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ est un polynôme de degré au plus n donc ceci n'est réalisé que si et seulement si $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$. On a donc bien $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$. ■

R Un résultat analogue peut-être montré pour les DL_n en $+\infty$ et $-\infty$.

Corollaire 20.2.6 — Parité. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On suppose que f admet un DL_n en 0 pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, si f est paire (resp. impaire), la partie régulière de f est paire (resp. impaire).

Démonstration. Si f est paire et que $f(x) =_0 \mathrm{P}(x) + o(x^n)$, on a $f(x) = f(-x) =_0 \mathrm{P}(-x) + o(x^n)$ et par unicité du DL_n, $\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(-x)$. On procède de même pour f impaire. ■

Théorème 20.2.7 — Opérations sur les DL_n. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de a et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g possèdent des $\mathrm{DL}_n(a)$ donnés par des polynômes P et Q respectivement. Alors, on a :

(i) $\lambda f + g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$,
(ii) fg admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

Exercice 20.8 Démontrer le théorème précédent en explicitant les $\mathrm{DL}_n(a)$. ■

R Il existe également des résultats concernant les quotients et compositions pour les développements limités mais ceux-ci ne sont pas au programme.

Théorème 20.2.8 — DL_n, continuité et dérivabilité. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de a. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$. Alors, on a les propositions qui suivent.

(i) Si $n \geq 0$, alors f est continue en a.
(ii) Si $n \geq 1$, alors f est dérivable en a.

Exercice 20.9 Démontrer le théorème. Montrer que si $n \geq 2$, une fonction peut admettre un

DL_n sans être n fois dérivable – on étudiera la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. ■

20.2.3 Développements limités usuels

Théorème 20.2.9 — Exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle est donné par :

$$\begin{aligned} e^x &=_0 \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\ &=_0 \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Théorème 20.2.10 — Logarithme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &=_0 \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\ &=_0 \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Théorème 20.2.11 — Puissance. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est donné par :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &=_0 \quad 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\times\ldots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\ &=_0 \quad 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\times\ldots\times(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &=_0 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right) \\
&=_0 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right). \\
\frac{1}{1-x} &=_0 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o\left(x^n\right) \\
&=_0 \sum_{k=0}^{n} x^k+o\left(x^n\right). \\
\sqrt{1+x} &=_0 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}x^n+o\left(x^n\right) \\
&=_0 \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(2k-1)(k!)^2}+o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

Théorème 20.2.12 — Sinus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de la fonction sinus est donné par :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &=_0 x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right) \\
&=_0 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).
\end{aligned}$$

Théorème 20.2.13 — Cosinus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction cosinus est donné par :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &=_0 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right) \\
&=_0 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 20.10 Démontrer l'intégralité de ces théorèmes grâce au théorème de Taylor-Young. ■