Chapitre n° 2 : Codage en base 2 d'un entier relatif

Il s'agit désormais de coder un entier relatif (ou signé), il faut donc coder une information supplémentaire : son signe !

On suppose par la suite que les nombres relatifs sont codés sur n bits ($n \geqslant 2$)

1 Un première méthode

L'idée est de prendre un bit pour coder le signe :

- si l'entier est positif, le bit de poids fort (c-à-d celui de gauche) est 0
  (c'est le code signifiant que l'entier est positif)
- si l'entier est négatif, le bit de poids fort est 1
  (c'est le code signifiant que l'entier est négatif)

Les $(n-1)$ bits suivants servent au codage de la valeur absolue de l'entier.

Remarque : Consacrer un bit au signe a pour conséquence de diminuer la grandeur de l'entier ainsi représentable, il doit désormais être, en valeur absolue, inférieur ou égal à $2^{n-1}-1$

En fait cette méthode pose de nombreux problèmes et n'est pas utilisée (double représentation de 0, nécessité de différencier les algorithmes de somme ou de soustraction suivant les signes des nombres$\cdots$)

La représentation quasi-universelle des entiers relatifs est celle dite du « complément à 2 (puissance n) ».

2 « Complément à 2 (puissance n) »

Le principe, permettant de coder tous les entiers relatifs depuis -2^{n-1} jusqu'à $2^{n-1}-1$ est le suivant :

- On code tous les entiers **positifs** entre 0 et $2^{n-1}-1$ comme évoqué au paragraphe précédent :
  - on affecte au bit de poids fort la valeur 0 ;
  - on code la valeur de cet entier sur les $n-1$ bits restants (le plus grand entier ainsi codable est donc $2^{n-1}-1$).
- On code tous les entiers N **strictement négatifs** entre -1 et -2^{n-1} par les entiers positifs $2^n - |\mathrm{N}| = 2^n + \mathrm{N}$
  (D'où l'expression complément à 2 puissance n ou simplement complément à 2)

Avant d'expliquer la pertinence et l'efficacité de ce codage, un certain nombre de remarques sont à faire et quelques résultats sont à établir.

Remarques :

- Le nombre d'entiers relatifs depuis -2^{n-1} jusqu'à $2^{n-1}-1$ est 2^n
- Soit un entier entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$. Il n'y a pas de risque d'ambiguïté sur l'entier ainsi codé car il n'y a pas « chevauchement » : le plus grand entier positif codé ainsi est $2^{n-1}-1$, l'entier suivant, $2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1}$ correspond au code de -2^{n-1}
- Sur n bits il y a 2^n codages possibles, par unicité de la décomposition, tout entier positif inférieur à $2^{n-1}-1$ à un codage unique, tout entier strictement négatif N supérieur ou égal à -2^{n-1}, étant codé comme l'entier positif $2^n - |\mathrm{N}|$, a donc également un codage unique : il y a donc une bijection entre l'ensemble des entiers entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$ et l'ensemble des codages (en complément à 2) sur n bits.

Exemple : Le codage sur 4 bits en complément à deux des entiers de -8 à 7 est :

entier relatif	codage
-8	1000
-7	1001
-6	1010
-5	1011
-4	1100
-3	1101
-2	1110
-1	1111

entier relatif	codage
0	0000
+1	0001
+2	0010
+3	0011
+4	0100
+5	0101
+6	0110
+7	0111

Exercice n° 1

Coder, sur un octet, les entiers 7, -7, 114 et -114

Propriété: Complément à 2
Prendre le complément à 2 d'un entier **positif** consiste à remplacer tous les 1 de sa représentation binaire par des 0 et vice-versa (c-à-d en remplaçant la valeur a de chaque bit par $1-a$) **puis ajouter** 1 (en ne gardant, si besoin) que les n premiers bits)

démonstration : □
Soit N un entier positif codé sur n bits et $a_{n-1}\cdots a_1 a_0$ sa décomposition binaire. Notons $\text{comp}_2(\text{N})$ son complément à 2. On a $\text{N} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k\right)$ donc :

$$\begin{aligned}\text{comp}_2(\text{N}) &= 2^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (1-a_k)\cdot 2^k\end{aligned}$$

□

Exemple : Comment coder −23 sur un octet en utilisant cette propriété.
- On décompose 23 en base 2 : $23 = \overline{10111}^2$
- On code ensuite +23 sur un octet, on obtient donc 00010111
- On change la valeur de chaque bit, on obtient 11101000
- On ajoute enfin 1, −23 est donc codé sur un octet par 11101001

Exercice nº 2

Retrouver les résultats précédents en utilisant cette propriété.

Propriété: Soit N un entier entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$
- Un entier N est positif ou nul si, et seulement si, sa représentation en complément à 2 commence par 0. (son bit de poids fort est 0)
- Un entier N est strictement négatif si, et seulement si, sa représentation en complément à 2 commence par 1. (son bit de poids fort est 1)

démonstration : □
Le premier point est déjà acquis, il reste donc à démontrer le suivant. On a $|\text{N}| \leqslant 2^{n-1}$ or N est codé par $2^n - |\text{N}|$ donc codé par un entier naturel supérieur ou égal à $2^n - 2^{n-1}$ soit 2^{n-1} donc nécessairement son bit de poids fort est 1. □

Exercice nº 3

Donner la représentation décimale des nombres suivants (codés sur 8 bits) : 01111011, 11010011 et 10110110

Remarque : Soit N un entier entre 0 et $2^{n-1}-1$, $\text{comp}_2(\text{comp}_2(\text{N})) = 2^n - (2^n - \text{N}) = \text{N}$.
Ceci donne donc une méthode simple de décodage d'un entier codé en complément à 2.

Méthode de décodage d'un entier :
Soit N codé sur n bits en complément à 2 par $a_{n-1}\cdots a_1 a_0$.
- Si $a_{n-1} = 0$ alors l'entier est positif et sa valeur est $\text{N} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k$;
- Si $a_{n-1} = 1$ alors l'entier est négatif et sa valeur est $\text{N} = -1 - \sum_{k=0}^{n-1} (1-a_k)\cdot 2^k$
  (En pratique le complément à 2 de son codage donne la valeur absolue de |N|)

Exemple :
- Soit N = 01001101 : N est positif, égal à $2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 77$
- Soit N = 11001001 : N est négatif.
  Son complément à 2 est codé par 00110111 correspondant à $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = 55$ donc N = −55

Exercice nº 4

Donner la représentation décimale des nombres codés sur 8 bits par : 10110010, 11110111 et 01011100