18. Applications linéaires

Ce chapitre s'intègre dans le cadre général de l'algèbre linéaire. Jusqu'à présent, les chapitres d'algèbre linéaire précédents doivent donc parfaitement être maitrisés afin de bien comprendre les notions que l'on introduit ici. Dans l'intégralité de ce chapitre comme dans ces chapitres précédents, $\mathbb{K}$ pourra désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

18.1 Cas général

18.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 18.1.1 — Application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** si :

(i) $\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$,

(ii) $\forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E},\ f(\lambda.v) = \lambda.f(v)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Exercice 18.1 Préciser de quelles lois « + » et « . » il s'agit dans cette définition. ■

Exercice 18.2 Montrer que l'on peut combiner les deux propositions de la définition d'une application linéaire en un seul **critère de linéarité** et énoncer ce critère. ■

Exercice 18.3 — Application nulle. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Montrer que l'application Θ, définie par $\forall u \in \mathrm{E},\ \Theta(u) = 0_{\mathrm{F}}$, est une application linéaire. ■

Exercice 18.4 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R};\ u \mapsto u_0$. Décrire φ et montrer qu'il s'agit d'une application linéaire. ■

Exercice 18.5 Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application f de E dans F, définie par $\forall (x,y,z) \in E,\ f\big((x,y,z)\big) = (2x-3z, x-y+2z)$ est linéaire. ■

Exercice 18.6 Soit $E = \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'aplication $\varphi : E \to \mathbb{R};\ u \mapsto \int_0^1 u(t)\,dt$. Montrer que φ est une application linéaire. ■

Théorème 18.1.1 — Propriétés des applications linéaires. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a les propositions qui suivent.

(i) $f(0_E) = 0_F$.

(ii) $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u-v) = f(u) - f(v)$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(u_k)$.

Démonstration. D'abord, on a $f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = f(0_E)$. D'où $f(0_E) = 0_F$.
Ensuite, $f(u-v) = f(u+(-1).v) = f(u) + (-1).f(v) = f(u) - f(v)$.
Enfin, le dernier point s'obtient par récurrence immédiate à partir de la définition. ■

18.1.2 Opérations usuelles

Théorème 18.1.2 — Opérations. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-ev, $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, $h \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les applications qui suivent, définies par opérations, sont des applications linéaires.

(i) $f+g : E \to F;\ v \mapsto (f+g)(v) = f(v) + g(v)$. (addition)

(ii) $\lambda.f : E \to F;\ v \mapsto (\lambda.f)(v) = \lambda.f(v)$. (multiplication par un scalaire)

(iii) $h \circ f : E \to G;\ v \mapsto (h \circ f)(v) = h(f(v))$. (composition)

Exercice 18.7 Démontrer le théorème. ■

Corollaire 18.1.3 — Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$. Soient E et F deux K-ev. L'ensembles des applications linéaires de E dans F est un K-ev.

Démonstration. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide car il contient toujours l'application nulle. Le résultat découle alors immédiatement des deux premiers points du théorème précédent. ■

18.1.3 Noyau et Image

Définition 18.1.2 — Noyau. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de f et on note $\ker(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \left\{u \in E \;\middle|\; f(u) = 0_F\right\} .$$

Définition 18.1.3 — Image. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **image** de f et on note $\mathrm{im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\mathrm{im}(f) = f(E) = \left\{v \in F \;\middle|\; \exists u \in E,\ v = f(u)\right\} .$$

R Le noyau de f est l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f. L'image de f est l'image directe de E par f.

Théorème 18.1.4 — Le noyau et l'image sont des K-ev. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\ker(f)$ est un sev de E et $\mathrm{im}(f)$ est un sev de F.

Démonstration. Soient $u_1, u_2 \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f(u_1+\lambda.u_2) = f(u_1)+\lambda.f(u_2) = 0_F+\lambda.0_F = 0_F+0_F = 0_F$, d'où $u_1+\lambda.u_2 \in \ker(f)$. De plus, $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \ker(f) \neq \emptyset$.
Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $u_1, u_2 \in E$ tels que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$, d'où $v_1+\lambda.v_2 = f(u_1)+\lambda.f(u_2) = f(u_1+\lambda.u_2) \in \mathrm{im}(f)$. De plus, $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in \mathrm{im}(f) \neq \emptyset$. ■

Théorème 18.1.5 — Critères d'injectivité et de surjectivité. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a les propositions qui suivent.

(i)	f injective	$\Leftrightarrow$	$\ker(f) = \{0_E\}$.
(ii)	f surjective	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{im}(f) = F$.

Exercice 18.8 Rappeler la définition de l'injectivité et de la surjectivité puis démontrer le théorème. ■

18.1.4 Isomorphismes

Définition 18.1.4 — Isomorphisme. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On dit que f est un **isomorphisme** si elle est bijective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** (i.e. il existe un isomorphisme de E dans F).

Théorème 18.1.6 — Réciproque d'un isomorphisme. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, et f un isomorphisme de E dans F. Alors la bijection réciproque de f, f^{-1}, est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration. Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme f est un isomorphimse, il existe un unique $u_1 \in \mathrm{E}$ et un unique $u_2 \in \mathrm{E}$ tels que $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$. Ainsi, on voit que $f^{-1}(v_1 + \lambda.v_2) = f^{-1}\big(f(u_1) + \lambda.f(u_2)\big) = f^{-1}\big(f(u_1 + \lambda.u_2)\big) = u_1 + \lambda.u_2 = f^{-1}(v_1) + \lambda.f^{-1}(v_2)$ et f^{-1} est bien une application linéaire de F dans E. ■

Théorème 18.1.7 — $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $n \in \mathbb{N}$ un $\mathbb{K}$-ev est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et f un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors, on peut montrer que $\mathscr{B} = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de E. Soit $u \in \mathrm{E}$, alors $f^{-1}(u) \in \mathbb{K}^n$, on peut donc décomposer $f^{-1}(u)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $f^{-1}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k$ sa décomposition. On a $u = f\big(f^{-1}(u)\big) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(e_k)$. Donc u se décompose bien dans $\mathscr{B}$ (i.e. la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de E). De plus, si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(e_k) = 0$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k\right) = 0$. Or f est bijective, donc $\ker(f) = 0$. On en déduit donc que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k = 0$ ce qui implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille est donc libre. On conclut bien que $\mathscr{B}$ est une base de E.
Réciproquement, si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, alors on peut définir un isomorphisme f de E vers $\mathbb{K}^n$. En effet, on considère une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et on pose f l'application telle que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k$. On peut ensuite vérifier assez facielement que f est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$. ■

R Le théorème précédent induit que deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. L'image par un isomorphisme $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ d'un sev de E dimension n est donc un sev de F de dimension n.

18.1.5 Endomorphismes

Définition 18.1.5 — Endomorphisme, automorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme**. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E est noté GL(E) et appelé le **groupe linéaire** de E.

R $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$-ev par le corollaire 18.1.3. Par contre, si E n'est pas réduit à 0_{E}, alors GL(E) muni des opérations usuelles n'est pas un espace vectoriel, car l'application nulle n'est alors jamais bijective.

Propriété 18.1.8 — Identité. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. L'application identité de E définie comme suit est un automorphisme.

$$id_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ v & \longmapsto & v \end{array} .$$

Exercice 18.9 Démontrer le résultat. ■

Définition 18.1.6 — Puissance d'un endomorphisme. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On pose $f^0 = id_{\mathrm{E}}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k$.

Propriété 18.1.9 — Règles de calcul. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. On a les propositions qui suivent.

(i) $f^n \circ f^m = f^{n+m} = f^m \circ f^n$.

(ii) $\left(f^n\right)^m = f^{nm} = \left(f^m\right)^n$.

Exercice 18.10 Démontrer la propriété précédente. ■

R Dans le cas d'un automorphisme f, on peut définir les puissances négatives via $f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n$ et les règles de calcul se généralise alors à tout entier dans $\mathbb{Z}$.

R Pour deux endomorphismes f et g de E, on n'a pas a priori $f \circ g = g \circ f$, ni $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$.

Théorème 18.1.10 — Binôme de Newton. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, f et g deux endomorphismes de E. Si $f \circ g = g \circ f$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^{n-k} \circ g^k .$$

Exercice 18.11 Démontrer le théorème. ■

18.1.6 Projecteurs

Définition 18.1.7 — Projecteur. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$. On considère les applications p et q de E dans E telles que, pour tout $u \in E$, $u = p(u) + q(u)$ avec $p(u) \in F$ et $q(u) \in G$. L'application p est le **projecteur sur** F **parallèlement à** G et l'application q est le **projecteur sur** G **parallèment à** F.

R Les applications p et q sont bien définies car F et G sont supplémentaires. Ainsi, tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème 18.1.11 — Propriétés des projecteurs. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$. On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F. Alors, on a les propostions qui suivent.

(i) p et q sont des endomorphimses de E.
(ii) $p + q = id_E$.
(iii) $p \circ q = q \circ p = 0$.
(iv) $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.
(v) $\ker(p) = \mathrm{im}(q) = G$ et $\ker(q) = \mathrm{im}(p) = F$.

Démonstration. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $u = p(u) + q(u)$ et $v = p(v) + q(v)$, d'où $u + \lambda.v = p(u)+q(u)+\lambda.\big(p(v)+q(v)\big) = p(u)+\lambda.p(v)+q(u)+\lambda.q(v)$. Ainsi, par unicité de la décomposition selon la somme directe, $p(u+\lambda.v) = p(u)+\lambda.p(v)$ et $q(u+\lambda.v) = q(u)+\lambda.q(v)$. D'où p et q sont bien des endomorphismes de E.
La définition donne directement le point (ii).

On commence par montrer (v). Soit $u \in \mathrm{F}$. La décomposition de u selon $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ est $u = p(u) + 0$. Donc $\mathrm{F} \subset \ker(q)$. Maintenant si $u \in \ker(q)$, alors $q(u) = 0$, puis $u = p(u)$. D'où $\ker(q) \subset \mathrm{im}(p)$. Enfin, si $u \in \mathrm{im}(p)$, on a $u \in \mathrm{F}$ par définition. Ainsi on a bien $\ker(q) = \mathrm{im}(p) = \mathrm{F}$. Par symétrie, on montre $\ker(p) = \mathrm{im}(q) = \mathrm{G}$.
Soit $u \in \mathrm{E}$. On a $q(u) \in \mathrm{im}(q) = \ker(p)$. D'où $p \circ q(u) = 0$. De même, on obtient $q \circ p(u) = 0$. Ce qui donne (iii).
Enfin, soit $u \in \mathrm{E}$. On a $p \circ p(u) - p(u) = p\big(p(u) - u\big) = -p\big(q(u)\big) = 0$. D'où $p \circ p = p$. De même, $q \circ q = q$. Ce qui montre (iv). ■

Théorème 18.1.12 — Caractérisation des projecteurs. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que $p \circ p = p$. Alors $\mathrm{E} = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{E}$. On a $u = p(u) + u - p(u)$ avec $p(u) \in \mathrm{im}(p)$ et $u - p(u) \in \ker(p)$. En effet, $p(u - p(u)) = p(u) - p^2(u) = 0$. Ainsi, $\mathrm{E} = \mathrm{im}(p) + \ker(p)$. De plus, si $u \in \ker(p) \cap \mathrm{im}(p)$, alors $u = p(v)$ avec $v \in \mathrm{E}$ et $p(u) = 0$. D'où $0 = p(u) = p^2(v) = p(v) = u$. On a bien $\mathrm{E} = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$. Puis, par unicité de la décomposition en somme directe, p est bien le projecteur de sur $\mathrm{im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. ■

18.2 Dimension finie

18.2.1 Rang d'une application linéaire

Exercice 18.12 Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ engendre $\mathrm{im}(f)$. En déduire que $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$ sont de dimension finie. ■

R Pour définir une application linéaire d'un espace de dimension finie E vers un espace F, il est suffisant de définir l'application sur une base de E.

Définition 18.2.1 Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle **rang de** f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'image de f.

R Le rang de f est bien défini car l'image de f est un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 18.13 Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 0$ si et seulement si f est l'application nulle. ■

Théorème 18.2.1 — Théorème du rang. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a :

$$\mathrm{rg}(f) = n - \dim\big(\ker(f)\big) .$$

Démonstration. Soient $p = \dim(\ker(f))$ et $\mathscr{F} = \big(e_1,\dots,e_p\big)$ une base de $\ker(f)$. Comme $\ker(f)$ est un sev de E, $\mathscr{F}$ est une famille libre de E que l'on peut compléter en une base de E (par le théorème de la base incomplète). Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une telle base. On va montrer que $\big(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n)\big)$ est une base de $\mathrm{im}(f)$. En effet, par l'exercice qui précède, $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ engendre $\mathrm{im}(f)$, mais comme $f(e_1) = \dots = f(e_p) = 0$, $\big(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n)\big)$ engendre $\mathrm{im}(f)$. De plus, soit $\big(\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n\big) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que $\sum\limits_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0$. On a $\sum\limits_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(e_k) = f\left(\sum\limits_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0$, d'où $\sum\limits_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k \in \ker(f)$. Or $\ker(f) \oplus \mathrm{VECT}\big(e_{p+1},\dots,e_n\big) = \mathrm{E}$. D'où $\sum\limits_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k = 0$ et $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi, la famille $\big(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n)\big)$ est bien libre et c'est une base de $\mathrm{im}(f)$. On a donc $\mathrm{rg}(f) = n - p = n - \dim(\ker(f))$. ■

R On peut retenir facilement le théorème du rang sous sa forme plus symétrique : $\dim(\mathrm{E}) = \dim\big(\mathrm{im}(f)\big) + \dim(\ker(f))$.

Corollaire 18.2.2 — Rang et injectivité. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n .$$

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème du rang ainsi que du critère d'injectivité des applications linéaires. En effet, f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$, ce qui équivalent à $\dim\big(\ker(f)\big) = 0$, puis à $\mathrm{rg}(f) = n$ via le théorème du rang. ■

Corollaire 18.2.3 — Bijectivité des endomorphismes en dimension finie. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

Démonstration. Soit $n = \dim(\mathrm{E})$. Comme $\mathrm{im}(f)$ est un sev de E, on a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{E}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = n$. Ceci donne donc f surjective si et seulement si f injective. La dernière équivalence est alors immédiate. ■

18.2.2 Formes linéaires et hyperplans

Définition 18.2.2 — Forme linéaire. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle **forme linéaire de** E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (i.e. tout élément de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$).

R Cette définition n'est pas limitée au contexte des espaces vectoriels de dimension finie mais on se limitera à ce contexte dans le cadre du programme.

Définition 18.2.3 — Hyperplan. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On appelle **hyperplan de** E tout sev de E de dimension $n-1$.

Théorème 18.2.4 — Caractérisation des formes linéaires. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Alors $\ker(f)$ est une hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire de E.

Démonstration. On suppose que f est une forme linéaire non nulle. Alors $\mathrm{im}(f)$ est un sev de $\mathbb{K}$ non réduit à 0, on a donc forcément $\mathrm{im}(f) = \mathbb{K}$ et $\mathrm{rg}(f) = 1$. D'où, par le théorème du rang, $\dim\big(\ker(f)\big) = n-1$, et $\ker(f)$ est un hyperplan de E.
Réciproquement, si H est un hyperplan de E alors, on considère $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H et on la complète une une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors l'application linéaire définie par $f(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = 1$ définit bien une forme linéaire de E de noyau H. ■

18.2.3 Matrice d'une application linéaire

Définition 18.2.4 — Matrice d'une application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension de finie n et p respectivement et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On considère une base $\mathscr{B}_\mathrm{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $\mathscr{B}_\mathrm{F} = \big(f_1, \dots, f_p\big)$ de F. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on considère $g\big(e_j\big) = \sum_{i=1}^{p} m_{i,j} f_i$ la décomposition de $g\big(e_j\big)$ dans la base $\mathscr{B}_\mathrm{F}$. Alors, la **matrice de l'image par g de la base $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ dans la base $\mathscr{B}_\mathrm{F}$** est la matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{E}}(g)$, définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{E}}(g) = \big(m_{i,j}\big)_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]} .$$

R L'application $\varphi : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; $g \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}, \mathscr{B}_\mathrm{F}}(g)$ est un isomorphisme. En particulier, les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont préservées lors du passage à l'écriture matricielle.

Exercice 18.14 À quoi correspond la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{E}}(g)$? ■

Exercice 18.15 Que peut-on dire de la matrice d'une forme linéaire ? ■

Exercice 18.16 On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ l'application de dérivation. Déterminer la matrice de Δ dans les bases canoniques de E et F. ■

Définition 18.2.5 — Vecteur des coordonnées. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension de finie n et $v \in \mathrm{E}$. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et la décomposition $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ de v dans la base $\mathscr{B}$. Alors, le **vecteur colonne des coordonnées de v dans $\mathscr{B}$** est la matrice

colonne, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$, définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

R L'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}^n;\ v \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est un isomorphisme.

Théorème 18.2.5 — Produit matriciel. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $v \in \mathrm{E}$. On considère des bases $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ de E, F et G respectivement. Alors :

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}\big(f(v)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(v)$.

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}\big(g \circ f\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)$.

Exercice 18.17 Démontrer le théorème. ■

18.2.4 Application linéaire d'une matrice

Théorème 18.2.6 — Application linéaire d'une matrice. Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors, l'application f_{A} définie par :

$$f_{\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$

est une application linéaire, appelée l'**application linéaire associée à la matrice** A.

Démonstration. La linéarité découle directement des propriétés du produit matriciel. ■

Définition 18.2.6 — Noyau, image et rang d'une matrice. Le noyau (resp. l'image, resp. le rang) d'une matrice est le noyau (resp. l'image, resp. le rang) de son application linéaire associée.

Exercice 18.18 Justifier que l'image d'une matrice est le sev engendré par ses vecteurs colonnes. ■

Exercice 18.19 Déterminer une base du noyau, puis de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. ■

Théorème 18.2.7 — Rang de la transposée. Une matrice et sa transposée ont même rang.

Démonstration. Ce théorème est admis. ■

Théorème 18.2.8 — Rang d'une application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $g \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, le rang de f est égal au rang de sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(g)$ dans n'importe quelles bases $\mathscr{B}_E$ de E et $\mathscr{B}_F$ de F.

Démonstration. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(g)$ et $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de sorte que $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$. Alors, on a $X \in \ker(M) \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(g(u)) = 0 \Leftrightarrow g(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \ker(g)$. Ainsi, $\ker(M)$ est isomorphe à $\ker(g)$ via la restriction de $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$ à $\ker(g)$. Ces deux espaces ont donc même dimension. On conclut via le théorème du rang. ■

18.2.5 Endomorphismes et matrices carrées

Définition 18.2.7 — Matrice d'un endomorphisme. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension de finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors, la **matrice de f dans $\mathscr{B}$** est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de l'image par f de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$.

Théorème 18.2.9 — Automorphismes et matrices inversibles. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension de finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note M la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Alors M est inversible si et seulement si f est un automorphisme. Dans ce cas, $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Démonstration. On remarque d'abord que, pour tout $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $g = id_{\mathrm{E}}$.
Ainsi, si f est un automorphisme, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n$.
De même $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{I}_n$. Ainsi M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.
Réciproquement, si M est inversible, alors on pose $\mathrm{M}^{-1} = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. On définit ensuite l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ de manière à ce que $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$. Ceci donne alors $\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g)$. Ainsi, $g \circ f = f \circ g = id_{\mathrm{E}}$ et $f^{-1} = g$. ■

Théorème 18.2.10 — Caractérisations des automorphismes. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors, les propositions qui suivent sont équivalentes.

(i) $g \circ f = f \circ g = id_{\mathrm{E}}$.
(ii) $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$.
(iii) $f \circ g = id_{\mathrm{E}}$.

Démonstration. On remarque qu'il suffit de montrer que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).
On montre que (ii) implique (iii). Si $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$ alors f est injective. En effet, soient $x_1, x_2 \in \mathrm{E}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_1 = x_2$. Or, par le corollaire 18.2.3, si f est injective, elle est bijective. Ainsi, par le théorème de la bijection réciproque, on déduit que f est inversible puis que $f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} = g$.
On montre que (iii) implique (ii). Si $f \circ g = id_{\mathrm{E}}$ alors f est sujective. En effet, soit $y \in \mathrm{E}$, $y = f \circ g(y) \in \mathrm{im}(f)$. Or, par le corollaire 18.2.3, si f est surjective, elle est bijective. On conclut de manière analogue au cas précédent. ■

Exercice 18.20 Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, à l'aide des différents théorèmes du chapitre, donner six propositions mathématiques équivalentes à la proposition « $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ». ■

Définition 18.2.8 — Polynôme d'endomorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle **polynôme d'endomorphismes de** $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ toute application P définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}: & \mathscr{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k \end{array}$$

où $m \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$.

Définition 18.2.9 — Polynôme annulateur. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, P un polynôme d'endomor-

phismes de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que P est annulateur de f si $\mathrm{P}(f)$ est l'endomorphisme nul.

R De la même façon, on définit la notion de **polynôme de matrices de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et de **polynôme annulateur d'une matrice de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 18.2.10 — Opérations. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, P et Q deux polynômes d'endomorphismes de E et λ un élément de $\mathbb{K}$. Alors on peut définir les opérations qui suivent.

(i) $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ défini par $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ (\mathrm{P}+\mathrm{Q})(f) = \mathrm{P}(f)+\mathrm{Q}(f)$. (addition)

(ii) $\lambda\mathrm{P}$ défini par $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ (\lambda\mathrm{P})(f) = \lambda\mathrm{P}(f)$. (multiplication par un scalaire)

(iii) $\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ défini par $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ (\mathrm{P}\times\mathrm{Q})(f) = \mathrm{P}(f)\circ\mathrm{Q}(f)$. (multiplication)

R Dans la définition, la multiplication des polynômes d'endomorphismes correspond à la composition des endomorphismes. Ceci est nécessaire pour que les formules sur les coefficients des polynômes d'endomorphismes soient énoncées de la même façon que pour le théorème 6.2.2. On laisse cette vérification en exercice.

Dans la suite, on illustre via des exemples l'utilisation de polynômes annulateurs pour déterminer l'inverse ou une puissance k-ième d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Polynôme annulateur et calcul de l'inverse

On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E tel que $\mathrm{P}(f) = 2f^5 - 2f^3 + 3f^2 = 0$, par exemple, et il s'agit de calculer la réciproque de f (si elle existe). On peut d'abord remarquer que $\mathrm{P}(f) = f^2 \circ (2f^3 - 2f + 3id_{\mathrm{E}}) = 0$.

Si l'on sait que f est inversible, on obtient $2f^3 - 2f + 3id_{\mathrm{E}} = 0$ par multiplication à gauche par f^{-2}. On peut ensuite déterminer f^{-1} comme polynôme de f en passant le terme constant à droite, ce qui donne $2f^3 - 2f = -3id_{\mathrm{E}}$ puis $f \circ (-\frac{2}{3}f^2 + \frac{2}{3}id_{\mathrm{E}}) = id_{\mathrm{E}}$. On conclut alors que $f^{-1} = -\frac{2}{3}(f^2 - id_{\mathrm{E}})$.

Si l'on ne sait pas si f est inversible, il faudra calculer $2f^3 - 2f + 3id_{\mathrm{E}}$. Si l'on obtient l'endomorphisme nul, alors on pourra conclure à l'inversibilité en déterminant son inverse comme précédemment. Par contre, si l'on obtient un endomorphisme non nul, alors il faudra conclure que f est non inversible.

Bien évidemment, ce principe peut être adapté à n'importe quel polynôme annulateur de f, ainsi qu'au cas d'une matrice annulée par un polynôme.

Exercice 18.21 Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{M}^2 - 2\mathrm{M} - 3\mathrm{I}_4$. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}. Montrer, par ailleurs, que $\mathrm{M} - 3\mathrm{I}_4$ n'est pas inversible. ■

Polynôme annulateur et calcul d'une puissance

Dans cet exemple, on considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E tel que $P(f) = f^5 - f = 0$. Il s'agit ici de déterminer f^{20}. On considère alors la division euclidienne du polynôme X^{20} par $X^5 - X$, i.e. $X^{20} = Q(X)(X^5 - X) + R(X)$ avec $\deg(R) < 5$. En substituant X par f, on obtient alors $f^{20} = Q(f) \circ P(f) + R(f) = R(f)$. Le reste se calcule en utilisant les techniques à notre disposition que l'on peut retrouver dans le cours sur les polynômes (chapitre 6). Dans cet exemple, on obtient $R(X) = X^4$ et donc $f^{20} = f^4$.

Exercice 18.22 On considère la même matrice M que dans l'exercice précédent. En utilisant le polynôme annulateur de M, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■