

16. Séries numériques

Ce chapitre s'intéresse à des suites particulières, définies par des sommes, que l'on appelle séries. Il est important, pour aborder ce chapitre de manière sereine, de bien maîtriser les notions sur les suites vues au cours des chapitres précédents, notamment le chapitre 4 et le chapitre 15.

16.1 Généralités

16.1.1 Définition

Définition 16.1.1 — Série numérique. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum_{n \geq 0} u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel S_n est appelé la **somme partielle de rang n , associée à la série** $\sum_{n \geq 0} u_n$.

R On rajoute bien évidemment à cette définition les séries $\sum_{n \geq p} u_n$ dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un certain $p \in \mathbb{N}$ et on pose alors $\forall p \geq n, S_n = \sum_{k=p}^n u_k$.

■ **Exemple 16.1** Une des séries les plus célèbres est la **série harmonique** : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$; qui correspond à la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}^*}$. ■

■ **Exemple 16.2** La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique. Ces séries sont étudiées plus en détail dans la suite du cours. ■

■ **Exemple 16.3** Pour étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut s'intéresser à la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. En effet, les sommes partielles S_n de la série sont des sommes télescopiques et on a $S_n = v_{n+1} - v_0$. ■

R Une série est une suite bien particulière mais reste une suite. Tous les résultats s'appliquant à une suite sont donc vrais dans le cas d'une série.

16.1.2 Convergence

Définition 16.1.2 — Convergence et nature. Une série est dite **convergente** si et seulement si la suite de ses sommes partielles est convergente. La **nature d'une série** est la nature de la suite de ses sommes partielles.

Exercice 16.1 Rappeler les quatre natures possibles d'une suite. ■

Exercice 16.2 Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série. Montrer que l'on ne modifie pas la nature d'une série en changeant ses n_0 premiers termes. ■

Exercice 16.3 Déterminer la nature des séries proposées en exemple en tout début de chapitre. ■

Définition 16.1.3 — Somme d'une série convergente. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente. La **somme** de cette série est la limite de la suite de ses sommes partielles. On la note $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} u_n$.

Définition 16.1.4 — Reste d'une série convergente. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente et S sa somme. Pour tout réel $n \in \mathbb{N}$, le réel $R_n = S - S_n$ est appelé le **reste de rang n de la série**.

R Le reste de rang n_0 d'une série convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$ peut être vu comme la somme $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n$ de la série convergente $\sum_{n > n_0} u_n$. La suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

16.2 Théorèmes de convergence

Un certain nombre de résultats permettent de lier l'étude de la nature de séries à l'étude de leurs termes généraux. Ce sont ces résultats qui font tout l'intérêt de ce cours sur les séries.

16.2.1 Résultats directs

Théorème 16.2.1 — Condition nécessaire de convergence. La suite des termes généraux d'une série convergente tend vers 0.

Démonstration. Si l'on considère une série convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$, alors $u_n = S_{n+1} - S_n$ et, par linéarité du passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0$. ■

R Le théorème peut s'écrire : $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

■ **Exemple 16.4** La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln(n)$ est divergente car la suite de ses termes généraux ne tend pas vers 0. ■

Exercice 16.4 Donner un contre-exemple à la réciproque de ce théorème. ■

Théorème 16.2.2 — Linéarité de la somme. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ des suites convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \left(\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Démonstration. Ce résultat provient directement de la linéarité des sommes finies appliquées aux sommes partielles et de la linéarité du passage à la limite. ■

R En remarquant que l'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{R}$ -ev, le théorème qui précède permet de déduire que l'ensemble des séries numériques convergentes en est un sev.

16.2.2 Comparaison des séries à termes positifs

On s'intéresse aux **séries à termes positifs**, c'est-à-dire pour lesquelles le terme général est toujours positif.

Exercice 16.5 Montrer qu'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est croissante (i.e. la suite de ses sommes partielles est croissante) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$. ■

Exercice 16.6 Dédurre de l'exercice précédent la nature d'une série à termes positifs, selon que la suite de ses sommes partielles est majorée ou pas. Proposer un encadrement de la somme de la série dans le cas convergent. ■

Théorème 16.2.3 — Inégalité et convergence. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge}.$$

Dans ce cas, on a $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. On note S_n et T_n les sommes partielles de rang n des séries de termes généraux u_n et v_n respectivement. On suppose que T_n converge vers $T \in \mathbb{R}^+$. D'après l'exercice qui précède, $T_n \leq T$. Mais, on a également $S_n \leq T_n$. Donc, toujours d'après l'exercice S_n converge vers une limite T telle que $0 \leq S \leq T$. ■

Exercice 16.7 Énoncer la contraposée du théorème. ■

Exercice 16.8 En considérant la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente. ■

Exercice 16.9 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. ■

Corollaire 16.2.4 — Négligeabilité et convergence. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $u_n = o(v_n)$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Démonstration. On a $v_n - u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o(1))$. Comme $o(1)$ tend vers 0, on a $1 + o(1)$ positive à partir d'un certain rang n_0 et donc $v_n - u_n$ est positive à partir de ce rang. On peut donc appliquer le théorème pour les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$. Mais changer les premiers termes d'une série ne change pas sa nature (exercice 16.2) ce qui permet de conclure. ■

Corollaire 16.2.5 — Équivalence et convergence. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $u_n \sim v_n$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration. On a $u_n = v_n + o(v_n)$, puis $2v_n - u_n = v_n + o(v_n)$ qui est positive à partir d'un certain rang comme dans la démonstration précédente. Or, si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente, $\sum_{n \geq 0} 2v_n$

l'est également. On conclut donc dans ce cas que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente via le théorème 16.2.3. La réciproque s'obtient ensuite par symétrie. ■

16.2.3 Convergence absolue

Définition 16.2.1 — Convergence absolue. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique. On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 16.2.6 — Convergence des séries absolument convergentes. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. On considère une série convergente de terme général $|u_n|$. Alors la série de terme général $2|u_n|$ est également convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq |u_n| - u_n \leq 2|u_n|$. On peut donc appliquer le théorème 16.2.3 et la série de terme général $|u_n| - u_n$ est convergente. On en déduit, par linéarité, que la série de terme général u_n est convergente car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$. ■

Exercice 16.10 Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1} \right).$$

En déduire que la réciproque du théorème est fausse. ■

Exercice 16.11 Montrer qu'une série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes. ■

Corollaire 16.2.7 — Négligeabilité et convergence (version forte). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $u_n = o(v_n)$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Démonstration. Comme $u_n = o(v_n)$, on a $|u_n| = o(v_n)$. On déduit donc du corollaire 16.2.4 que la série de terme général $|u_n|$ est convergente. Ainsi la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente. ■

R Il s'agit d'une version plus forte du corollaire 16.2.4 car il n'est pas nécessaire, pour pouvoir l'appliquer, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit positive.

16.2.4 Convergences et divergences classiques

Définition 16.2.2 — Séries de Riemann. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la **série de Riemann de paramètre α** comme étant la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 16.2.8 — Convergence des séries de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Démonstration. Pour $\alpha = 1$, il s'agit de la série harmonique et on sait que celle-ci diverge. Dans le cas $\alpha < 1$, on a $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{n^\alpha})$ et on conclut via le corollaire 16.2.4.

On considère maintenant $\alpha > 1$. D'une part, $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. D'autre part, $\sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \right) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est positive, majorée par $1 + \frac{1}{\alpha-1}$, elle converge donc. ■

R On note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsqu'il y a convergence. Cela permet de définir la fameuse **fonction ζ de Riemann** qui fascine de nombreux mathématiciens.

Définition 16.2.3 — Séries géométriques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **série géométrique de paramètre x** comme étant la série $\sum_{n \geq 0} x^n$.

Définition 16.2.4 — Dérivées 1 et 2 des séries géométriques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **première dérivée de la série géométrique de paramètre x** comme étant la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ et la **deuxième dérivée de la série géométrique de paramètre x** comme étant la série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$.

Théorème 16.2.9 — Convergence des séries géométriques et de leurs dérivées. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad |x| < 1 & \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} x^n && \text{converge,} \\ \text{(ii)} & \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} && \text{converge,} \\ \text{(iii)} & \Leftrightarrow \sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2} && \text{converge.} \end{aligned}$$

Dans le cas de la convergence, celle-ci est absolue, et on a :

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \\ \text{(v)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}, \\ \text{(vi)} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour (i) et (iv), on peut utiliser la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique. On obtient alors $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ce qui induit facilement les résultats.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, définie sur tout $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, puis à nouveau, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''_n(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} = \frac{-n(n-1)x^{n+2} + (n^2-1)x^{n+1} - n(n+1)x^n + 2}{(1-x)^3}$. On peut ensuite conclure sur les points restants du théorème. ■

Définition 16.2.5 — Série exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **série exponentielle de paramètre x** comme étant la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Théorème 16.2.10 — Convergence de la série exponentielle. La série exponentielle converge absolument, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Démonstration. Ce résultat est admis pour le moment. Il sera démontré dans le prochain chapitre d'analyse. ■

16.2.5 Culture G : le paradoxe de Zénon

Le philosophe grec Zénon d'Élée (Ve siècle av. J.-C.) est surtout connu aujourd'hui pour l'un des paradoxes qui lui est attribué : le paradoxe d'Achille et de la tortue. Ce paradoxe est illustré par l'histoire qui suit. Une course en ligne droite est organisée entre Achille, le héros grec, et une tortue. Comme Achille sait qu'il va gagner, il laisse une certaine avance à l'animal, disons 100 mètres. On sait bien qu'Achille va rattraper la tortue, mais avant cela il doit arriver au point de départ de la tortue. Pendant le temps qu'il arrive à ce point, qui représente une durée non nulle, la tortue aura avancé et Achille sera toujours derrière la tortue. Achille doit ensuite arriver à ce nouveau point où se situe la tortue mais, encore une fois, la tortue aura avancé et se trouvera plus en avant. En réitérant le processus, on voit bien qu'à chaque instant suivant considéré Achille n'a toujours pas rejoint la tortue.

Que pensez-vous alors que Zénon en a déduit ? Pour lui c'est simple : Achille ne va jamais rattraper la tortue. Or l'on sait bien qu'Achille rejoint la tortue. Il en conclut donc que le mouvement est impossible et que toute notre réalité physique n'est qu'une illusion ! C'est certes assez radical comme position mais il faut bien dire que son raisonnement a été suivi par un certain nombre de personnes à son époque et par la suite.

Aujourd'hui, la plupart des mathématiciens considère que Zénon ne disposait tout simplement pas des outils mathématiques pour comprendre que ce paradoxe n'en est pas un. Cet outil manquant, ce sont les séries convergentes. S'il avait conçu que la somme d'une infinité de nombres positifs, correspondant aux durées successives considérées dans la course, peut donner un nombre qui lui est bien fini, alors il n'aurait sans doute pas vu de paradoxe. Alors, si jamais vous avez perdu tout espoir, que vous ne croyez plus en rien et que vous pensez que tout n'est qu'illusion, n'oubliez pas que les mathématiques sont là et qu'elles peuvent vous sauver.

