Chapitre n° 1 : Représentation binaire des entiers naturels

Il y a 10 sortes de gens : ceux qui comprennent la notation binaire et les autres.

1 Quelques rappels

Pour $a \in \mathbb{R}$ différent de 0 et de 1 et pour tout entier naturel p,

$$\sum_{k=0}^{p} a^k = \frac{a^{p+1}-1}{a-1}$$

En particulier :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1}-1}$$

2 Décomposition en base 2 d'un entier naturel

2.1 Définition

Considérons le nombre $n = 3056189$ (dans notre écriture usuelle, c-à-d en base 10). On a :

$$n = 3\times 10^6 + 0\times 10^5 + 5\times 10^4 + 6\times 10^3 + 1\times 10^2 + 8\times 10^1 + 9\times 10^0$$

Il est de même possible de décomposer tout entier naturel comme somme de puissance de 2. Plus précisément :
Énonçons pour commencer un résultat fondamental qui sera démontré en cours de mathématiques.

Théorème 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Il existe un unique entier naturel p et une unique $(p+1)-$liste $(a_0, a_1, \cdots, a_p)$ d'éléments de $\{0, 1\}$ tels que

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot 2^k \text{ et } a_p = 1$$

Définissons désormais l'écriture en base 2 d'un entier naturel :

Définition 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \cdots, a_p)$ la $(p+1)-$liste telle que décrite ci-dessus. On note alors

$$n = \overline{a_p \cdots a_1 a_0}^2$$

C'est l'écriture en base 2 de n

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous noterons cette écriture tout simplement sous la forme $a_p \cdots a_1 a_0$

Remarque :

1. On convient de noter 0, en base 2, 0 !
2. En reprenant les notations de la définition :
   - a_0 est appelé le chiffre de poids faible.
   - a_p est appelé le chiffre de poids fort.

2.2 Passage de la base 10 à la base 2

Comment obtenir la décomposition en base 2 d'un entier ?

Un algorithme permettant d'obtenir cette décomposition consiste à effectuer des divisions euclidiennes successives par 2 jusqu'à l'obtention d'un quotient nul (La validité de cet algorithme sera démontrée dans le chapitre d'arithmétique du cours de mathématiques)

Illustrons cet algorithme en décomposant par exemple 163 :

$$\begin{array}{rll}
163 & = 2\times 81+1 & a_0 = 1 \\
81 & = 2\times 40+1 & a_1 = 1 \\
40 & = 2\times 20+0 & a_2 = 0 \\
20 & = 2\times 10+0 & a_3 = 0 \\
10 & = 2\times 5+0 & a_4 = 0 \\
5 & = 2\times 2+1 & a_5 = 1 \\
2 & = 2\times 1+0 & a_6 = 0 \\
1 & = 2\times 0+1 & a_7 = 1
\end{array}$$

La décomposition en base 2 de 163 est donc $\overline{10100011}^{2}$ ou plus simplement 10100011
⚠Prendre garde à l'ordre d'écriture !

Exercice n° 1

Donner la décomposition en base 2 de 27, 12345 et 3056189

Exercice n° 2

Comment déduire la décomposition en base 2 de $2n$, de $4n$, de $2^p n$ ($p \in \mathbb{N}^*$) à partir de celle de l'entier naturel n ?

Exercice n° 3

Quel est le plus grand entier naturel que l'on peut écrire, en base 2, avec 8 chiffres ? avec 16 chiffres ? avec p chiffres($p \in \mathbb{N}^*$) ?

2.3 Passage de la base 2 à la base 10

C'est particulièrement simple !!

Exercice n° 4

Quels sont les entiers naturels dont l'écriture en base 2 est 10, 1011, 10110, 10101010 ?

Exercice n° 5

Étant donnée l'écriture en base 2 d'un entier naturel, énoncer un critère de divisibilité de cet entier par 2 ? par 4 ?

2.4 Additions et multiplications d'entiers naturels en base 2

2.4.1 Addition

Retournons à l'école primaire et calculons, à la main, $4825 + 5307$:

$$\begin{array}{cccccc} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & \\ & & 4 & 8 & 2 & 5 \\ + & & 5 & 3 & 0 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Exercice n° 6

La décomposition en base 2 de 4825 est 1001011011001, celle de 5307 est 1010010111011
Calculer la somme de ces 2 nombres à partir de leurs décompositions en base 2 et vérifier le résultat.

2.4.2 Multiplication

calculons, à la main, 485×13 :

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 8 & 5 \\ \times & & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 5 \\ & 4 & 8 & 5 & \\ \hline & 6 & 3 & 0 & 5 \end{array}$$

Exercice n° 7

La décomposition en base 2 de 485 est 111100101, celle de 13 est 1101
Calculer le produit de ces 2 nombres à partir de leurs décompositions en base 2 et vérifier le résultat.

3 Codage en base 2 d'un entier naturel sur un ordinateur

La représentation (ou codage) des nombres est nécessaire afin de les stocker et de les faire manipuler par un ordinateur.

Le principal problème est la limitation de la taille du codage : la valeur d'un nombre peut être arbitrairement grande, mais comme nous travaillons dans un environnement « fini » (les différentes mémoires des ordinateurs sont finies en taille), le codage dans l'ordinateur doit s'effectuer sur un nombre de bits fixé. Les valeurs minimales et maximales des nombres manipulés par les machines sont donc limitées.

Les entiers naturels (positifs ou nuls) sont codés sur un nombre d'octets fixé (rappel : un octet est un groupe de 8 bits [1]). On rencontre habituellement des codages sur 1, 2 ou 4 octets, plus rarement sur 64 bits (8 octets).

Un codage sur n bits permet de représenter tous les nombres naturels compris entre 0 et $2^n - 1$. Par exemple sur 1 octet, on pourra coder les nombres de 0 à $255 = 2^8 - 1$.

La représentation en machine est effectuée de la façon suivante : On représente le nombre en base 2 et on range les bits dans les cases mémoires binaires contiguës correspondant à leur poids binaire, de la droite vers la gauche. Si nécessaire, on complète à gauche par des zéros (bits de poids fort), ce qui évidemment ne change pas la valeur de l'entier !

Exemple : la décomposition en base 2 de 270 est 100001110 (soit 9 chiffres), sa représentation en machine sur deux octets peut se schématiser par

$$\overbrace{\underbrace{0000000}_{\text{0 rajoutés}}1}^{2^{\text{e}}\text{ octet}}\overbrace{00001110}^{1^{\text{er}}\text{ octet}}$$

1. de l'anglais binary digit, signifiant « chiffre binaire »