

BANQUE PT 2011 : corrigé de l'épreuve A  
(proposé par Josiane et Marc Cavelier, Rennes)

**Première partie : satellites sur une orbite circulaire**

**A** Caractéristiques des orbites de SPOT et d'ENVISAT

**A1** Le champ gravitationnel au point  $P$  est le même que celui qui serait créé par une masse ponctuelle située en  $O$  car la répartition de masse est sphérique. Donc  $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r$  où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial.

**A2** D'après la 3<sup>e</sup> loi de Kepler,  $\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$  soit  $T = 2\pi \frac{(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}$ .

On peut aussi utiliser la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur cette orbite circulaire.

A.N. : à la main, on trouve  $T \approx 100$  min soit  $T = 1\text{h}40$  min.

*Mauvaise surprise : aucune des valeurs numériques proposées ne convient !*

**A3** Le mouvement est circulaire et uniforme (mouvement à force centrale + orbite circulaire)

donc  $v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$  soit  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$ .

A.N. : grossièrement,  $v \approx 7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . La dernière réponse convient.

**A4** Énergie potentielle gravitationnelle du satellite :  $E_p = -\frac{GmM_T}{R_T + h}$ .

**A5** L'énergie cinétique vaut ici  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{R_T + h} = -\frac{1}{2}E_p$ . D'où  $2E_c + E_p = 0$ .

**A6** Une force s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Donc  $\alpha$  s'exprime en  $\text{m}^{-1}$ .

**A7** D'après A3, la norme de la vitesse s'écrit  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$ . Par conséquent, l'énergie

mécanique du satellite vaut  $E_m = \frac{1}{2}E_p$ . Donc  $E_m = \frac{-GmM_T}{2(R_T + h)}$ .

**A8** La seule force non conservative est la force de frottement exercée par l'atmosphère.

D'après le théorème de l'énergie mécanique,  $\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha m v^3$ .

Il vient  $\frac{GmM_T}{2(R_T + h)^2} \dot{h} = -\alpha m \left( \frac{GM_T}{R_T + h} \right)^{3/2}$ . D'où  $\dot{h} = -2\alpha \sqrt{GM_T(R_T + h)}$ .

**A9** On a  $\alpha = \frac{1}{2T \sqrt{GM_T(R_T + h)}}$ . A.N.  $\alpha \approx 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}$ .

En 10 ans, le nombre de révolutions orbitales vaut :  $N = \frac{10 * 365 * 24 * 3600}{6000} \approx 5.10^4$ .

La perte d'altitude est de l'ordre de 50 km.

L'altitude diminuant, l'énergie potentielle fait de même. D'après le théorème du viriel, cela conduit à une augmentation de l'énergie cinétique.

**A10**  $|\dot{h}|$  est très faible : la trajectoire est donc très stable. D'autre part, l'altitude est suffisamment faible pour que la période orbitale soit « brève ». On peut observer la même zone sur la Terre toutes les 1h40.

**B** Stabilisation de l'orbite d'un satellite

**B1** Système :  $\{M_1, M_2, \text{tige}\}$ . Référentiel géocentrique, galiléen.

D'après le théorème de la résultante cinétique :  $M_S \vec{a}_S = \sum \vec{F}_{ext} = -G \frac{M_S M_T}{r_0^2} \vec{u}_{x'}$ . Or

$$\vec{a}_S = -r_0 \Omega^2 \vec{u}_{x'}. \text{ D'où } \boxed{\Omega^2 = \frac{GM_T}{r_0^3}}.$$

**B2** Forces gravitationnelles exercées par la Terre sur  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\vec{F}_1 = -GmM_T \frac{\vec{SM}_1}{SM_1^3} \text{ et } \vec{F}_2 = -GmM_T \frac{\vec{SM}_2}{SM_2^3}.$$

**B3** Forces d'inertie d'entraînement (dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ) :

$$\vec{F}_{ent1} = m\Omega^2 \vec{SM}_1 \text{ et } \vec{F}_{ent2} = m\Omega^2 \vec{SM}_2.$$

Forces d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{Cor1} = -2m\vec{\Omega} \wedge (\dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{SM}_1) = -2m\Omega\dot{\theta} \vec{SM}_1 \text{ et } \vec{F}_{Cor2} = -2m\Omega\dot{\theta} \vec{SM}_2.$$

**B4** Moment en  $S$  de  $\vec{F}_{Cor1}$  :  $\vec{M}_{Cor1} = \vec{SM}_1 \wedge \vec{F}_{Cor1} = \vec{0}$  car ces deux vecteurs sont colinéaires. Idem pour le moment en  $S$  de  $\vec{F}_{Cor2}$ .

**B5** Vecteur position :  $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1 = \vec{OS} + \vec{SM}_1$ . Par conséquent  $r_1^2 = r_0^2 + \ell^2 + 2r_0\ell \cos \theta$ . Enfin, grâce à un développement au premier ordre  $\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r_0^3} \left[ 1 - \frac{3\ell}{r_0} \cos \theta \right]$ .

$$\text{La résultante sur } M_1 \text{ vaut, après calculs : } \vec{R}_1 = \frac{GmM_T}{r_0^3} \frac{3\ell}{r_0^3} \cos \theta \vec{OM}_1$$

En faisant le même travail pour  $M_2$ , on trouve  $\boxed{\vec{R}_2 = -\vec{R}_1}$ .

**B6** Le moment résultant en  $S$  de ce couple de forces vaut  $\vec{\Gamma}_S = \vec{SM}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{SM}_2 \wedge \vec{R}_2$  soit

$$\boxed{\vec{\Gamma}_S = -6GmM_T \frac{\ell^2}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta \vec{e}_z}.$$

**B7** Le moment cinétique en  $S$  du système, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , vaut  $\vec{L}_{\mathcal{R}'} = 2m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ .

D'après le théorème du moment cinétique,  $\frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}'}}{dt} = \vec{\Gamma}_S$  car les autres moments des actions extérieures sont nuls.

Finalement, l'équation différentielle du mouvement s'écrit  $\boxed{\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0}$ .

A l'équilibre,  $\sin \theta \cos \theta = 0$ . Les positions d'équilibre sont donc  $0, \pi, \pm\pi/2$ .

**B8** Au voisinage de  $\theta = 0$ , l'équation différentielle du mouvement devient  $\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \theta = 0$ .

On reconnaît un oscillateur harmonique : cette position d'équilibre est donc stable.

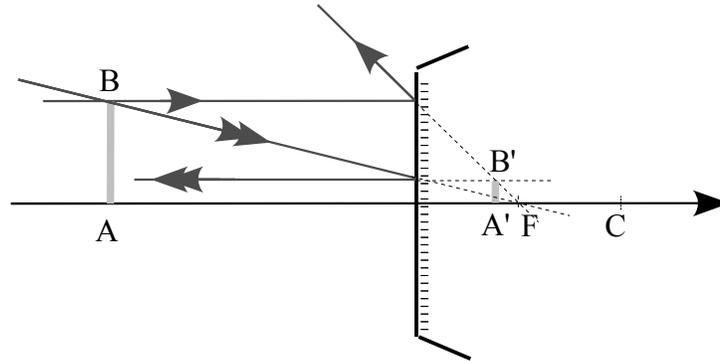
**B9** La période des petites oscillations s'écrit alors  $\boxed{T_0 = \frac{T}{\sqrt{3}}}$ . A.N.  $T_0 \approx 1 \text{ h}$ .

## Deuxième partie : observation de la Terre

**A A1** Conditions de Gauss : rayons proches de l'axe optique et peu inclinés sur ce dernier.

Propriétés : stigmatisme et aplanétisme approchés.

**A2** Construction de rayons ci-dessous.



**A3** Relation de conjugaison des miroirs sphériques : 
$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

Grandissement transversal : 
$$\gamma = \frac{-SA'}{SA}$$

**A4** L'objet visé est très lointain (par rapport au rayon de courbure du miroir  $\mathcal{M}_1$ ). Donc l'image intermédiaire est dans le plan focal image de  $\mathcal{M}_1$ .

**A5** Le foyer image du télescope est l'image de  $F'_1$  par  $\mathcal{M}_2$ . D'après la relation de conjugaison écrite ci-dessus,  $\frac{1}{S_2 F'} = \frac{S_2 F'_1 \cdot S_2 C_2}{2S_2 F'_1 - S_2 C_2}$ . D'où 
$$D = -d + R_2 \frac{R_1/2 - d}{2d - R_1 + R_2}$$

**A6** Grandissement par  $\mathcal{M}_1$  :  $\gamma_1 = \frac{-R_1}{2h}$ . Grandissement par  $\mathcal{M}_2$  :  $\gamma_2 = \frac{-S_2 F'}{S_2 F'_1} = -\frac{d + D}{d - R_1/2}$

Conclusion :  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$  soit 
$$\gamma = \frac{R_1(d + D)}{2h(d - R_1/2)}$$

**A7** A.N. :  $\gamma = -1, 2 \cdot 10^{-6}$  : l'image est renversée.

**A8** La lentille mince qui aurait même grandissement aurait une focale image  $f'_L$  vérifiant  $\gamma = \frac{f'_L}{-h}$ . D'où  $f'_L = 1$  m.

**A9** Le système Cassegrain est moins encombrant qu'une lentille unique et on évite les problèmes d'aberration chromatique.

**A10** Il faut placer le capteur dans le plan focal image du télescope.

**A11** La résolution est  $\frac{\delta}{|\gamma|} \approx 10$  m.

**A12** En multipliant par le nombre de pixels, on trouve un champ de vision de 60 km environ.

**A13** Pour une résolution de 2,5 m, la taille des pixels doit être de  $13/4 \approx 3,2$   $\mu\text{m}$ .

**A14** Le diamètre de la tache d'Airy vaut  $1,22 \frac{\lambda}{a} 2f' = 2,44\lambda$ . La limite de résolution due à la diffraction est au maximum de  $2 \mu\text{m}$  pour  $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$ .

On voit ici que la tache de diffraction est plus petite que la taille d'un pixel. Donc ce n'est pas la diffraction qui limite la résolution ici.

**B B1** Pour cette lame d'air (d'indice optique égal à 1), éclairée en incidence normale, la différence de chemin optique vaut  $2e$ .

L'éclairement vaut alors  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi e}{\lambda} \right) \right]$ . L'éclairement est donc uniforme.

En revanche, quand  $e$  varie, l'éclairement varie sinusoidalement.

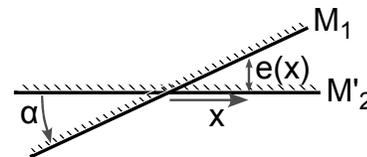
**B2** On élargit la source : les interférences sont alors localisées à l'infini. On les observe dans le plan focal image d'une lentille convergente. On déplace ensuite le miroir  $M_2$  de façon à faire rentrer les anneaux au centre. Ces anneaux deviennent de plus en plus grands. Au contact optique, on doit avoir un écran uniformément éclairé de même couleur que la source. Le contrôle se fait en lumière blanche.

**B3** On observe des franges d'égale épaisseur, c'est-à-dire des franges rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air formé par  $M_1$  et  $M'_2$  qui est l'image de  $M_2$  par la séparatrice. Elles sont localisées sur le coin d'air si la source est suffisamment large.

La différence de marche vaut  $\delta(x) = 2e(x)$

où  $e(x)$  est l'épaisseur locale du coin d'air.

Or  $e(x) = \alpha x$  d'où l'interfrange  $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ .



*Remarque : on peut retrouver ce résultat en remarquant qu'il s'agit de la superposition de deux ondes planes dont les vecteurs d'onde font un angle entre eux de  $2\alpha$ .*

**B4** Soit  $d(r)$  la distance entre  $P$  et le plan  $\Pi'$ . On trouve  $d(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R}$  avec

les approximations suggérées. Finalement,  $z(r) = e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}$ .

**B5** Différence de marche :  $\delta(r) = 2z(r) = 2(e_0 + H_{\max}) - \frac{r^2}{R}$ . On constate que les lieux de différence de marche constante (donc d'ordre d'interférence constant) vérifient  $r = \text{Cte}$ . Ce sont bien des cercles.

**B6** En  $r = 0$ , l'ordre vaut  $p_0 = \frac{2(e_0 + H_{\max})}{\lambda}$ .

D'après ce qui précède, l'ordre d'interférence diminue du centre vers les bords. Soit  $p_1 = p_0 - \frac{\rho_1^2}{R\lambda}$  l'ordre d'interférence du premier anneau brillant en partant du centre.

Alors, l'ordre d'interférence du  $k^{\text{e}}$  anneau brillant vaut  $p_k = p_1 - (k_1) = p_0 - \frac{\rho_k^2}{R\lambda}$ . Il

vient  $\rho_k^2 - \rho_1^2 = R\lambda(k - 1)$  soit  $\rho_k = \sqrt{\rho_1^2 + R\lambda(k - 1)}$ .

**B7** Sur la figure, le centre est brillant ainsi que l'extérieur. Les ordres d'interférences correspondant aux épaisseurs  $e_0$  et  $e_0 + H_{\max}$  sont donc entiers.

Le défaut correspond à la zone où on voit les anneaux. Le diamètre vaut donc  $d = 3,9 \pm 0,1$  mm.

Il y a trois anneaux brillants entre le centre et l'extérieur donc l'ordre d'interférence a varié de 4 et la hauteur du défaut vaut donc  $H_{\max} = 2\lambda = 1,3 \mu\text{m}$  (*C'est difficile de ne garder qu'un seul chiffre significatif!*).

On suppose  $e_0 > 0$  et on chariote le miroir  $M_2$  pour faire diminuer  $e_0$ .

- Si le miroir est concave comme dans l'énoncé, l'ordre d'interférence, maximal au centre, va diminuer. Les anneaux vont rentrer.
- En revanche, si le miroir est convexe, l'ordre d'interférence est minimal au centre et les anneaux vont sortir.

**B8** La différence de marche vaut  $\delta(x) = 2z(x)$ .

**B9** L'échelle semble être de 1,6 cm pour 20 km. L'ordre de grandeur de la taille de la zone concernée vaut 3,2 cm soit 40 km.

On voit 3 anneaux donc  $2H_{\max} = 3\lambda$  soit  $H_{\max} = 8,5$  cm.

La vitesse moyenne d'élévation du sol, sur ces 4 années, vaut alors  $V = 2,1 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$ .

La méthode est assez sensible. Tout en restant dans le domaine radio, on pourrait choisir d'autres longueurs d'onde. Cela permet de repérer des variations de hauteur de l'ordre du centimètre, en ayant retiré les autres causes de variation (végétation, érosion...).

### Troisième partie : Communications spatiales

**1** Pour un ion (un cation), l'équation du mouvement s'écrit :  $M_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = +e\vec{V}_i \wedge \vec{B} + e\vec{E} + M_i \vec{g}$ .

Pour un électron :  $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B} - e\vec{E} + m_e \vec{g}$ .

Pour négliger l'action magnétique, il faut que les vitesses des charges soient faibles devant la célérité de la lumière.

D'autre part, le poids est négligeable dès que  $E_0 \gg \frac{M_i g}{e}$ , soit  $E_0 \gg 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**2** En grandeurs complexes, après intégration des équations simplifiées du mouvement, il vient

$$\vec{v}_e = \frac{-eE_0}{im_e\omega} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{V}_i = \frac{-eE_0}{iM_i\omega} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x.$$

Par définition, la densité volumique de courant vaut  $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_e + ne\vec{V}_i$ .

Soit  $\vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega} \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_i} \right) E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$ . Comme  $M_i \gg m_e$ , il reste  $\vec{j} = \frac{-ine^2}{m\omega} \vec{E}$ .

**3** Équations de Maxwell dans le plasma : 
$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 & \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$4 \text{ On a } \begin{cases} \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E} \\ \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0 \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} .$$

D'où l'équation de propagation dans le plasma :  $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - i \frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

5 Relation de dispersion :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ .

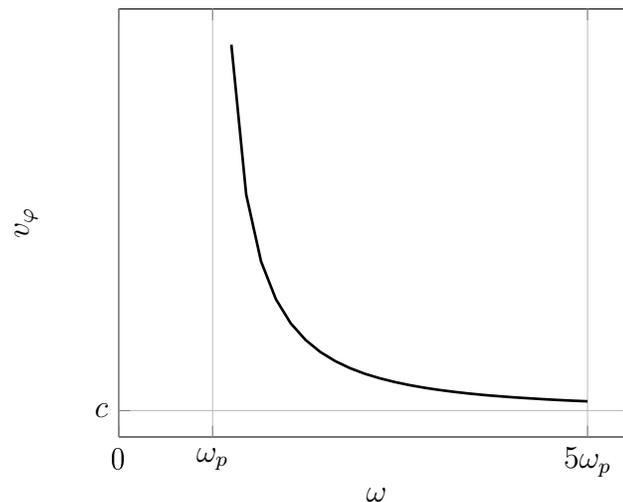
6 Il y a propagation si  $k$  est réel. Cela impose  $\omega > \omega_p$ . Le plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure  $\omega_p$ .

La fréquence de coupure vaut alors  $f_c = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$ .

7 Avec  $k$  réel,  $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$  et la vitesse de phase s'écrit  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$ .

Comme la vitesse de phase dépend de  $\omega$ , le milieu est dispersif.

vitesse de phase



8 A.N.  $f_c \approx 1,3 \cdot 10^6$  Hz. Tiens ! l'énoncé a failli proposer la bonne valeur numérique.

9 Pour une densité particulière  $n_1 = 25n_0$ ,  $f'_c = 5f_c = 6,5$  MHz. Une plage de fréquences acceptable serait l'intervalle  $0,1 - 10$  GHz, dans le domaine hyperfréquence. L'intérêt est d'être peu sensible à la variation de la densité particulière et de ne pas être trop perturbé par la dispersion du milieu.

*Remarque : dans la partie qui précède, la longueur d'onde est de 5,66 cm. C'est un bon indice pour trouver l'ordre de grandeur des fréquences acceptables.*