

Correction Concours blanc - CCP PC 2009 - I

PARTIE I ÉTUDE D'UN FAISCEAU LASER

I Modèle de l'onde plane

I.1 Le vide correspond à un milieu pour lequel, en tout point $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$.

Les équation de Maxwell dans le vide s'écrivent donc :

$$\begin{cases} (1)\text{-Maxwell-Faraday} : \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (2)\text{-Maxwell-Gauss} : \text{div} \vec{E} = 0 \\ (3)\text{-Maxwell-Ampère} : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (4)\text{-Maxwell-...} : \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

I.2 L'équation (3) donne $\underbrace{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B})}_{\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}} = -\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$

$$\mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}, \text{ soit}$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La même équation est vérifiée par le champ électrique

I.3.c Ici $\Delta \vec{E}(M, t) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \cdot \vec{e}_z$. L'équation de propagation donne donc $-k^2 \cdot \vec{E} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot (-\omega^2) \cdot \vec{E} = 0$, soit $k^2 = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \omega^2$.

L'onde se propageant selon le sens des z croissants, k est positif, donc

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

I.3.c Par définition, $\vec{\Pi}(t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

L'opérateur étant non linéaire, il ne s'applique pas aux représentations complexes et doit être calculé à partir des grandeurs réelles

De plus, pour une onde plane dans le vide, $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$, donc $\vec{\Pi}(t) = \frac{E^2(z, t)}{\mu_0 \cdot c}$

avec $E(z, t) = E_0 \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \cdot \vec{e}_z$

Comme $\langle \cos^2(k \cdot z - \omega \cdot t) \rangle = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot c}$$

I.3.c Le vecteur de Poynting correspond au vecteur densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique, donc $J_L = \langle \vec{\Pi} \rangle$ et $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{E_0^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0 \cdot c}$

I.3.c $E_0 = \sqrt{J_L \cdot 2 \cdot \mu_0 \cdot c} = \sqrt{2.4 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8} = 550 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$

II Modèle du faisceau Gaussien

II.1

II.1.a $|E(r, z)| = E_0 \cdot \left| \frac{i \cdot z_0}{z + i \cdot z_0} \right| \cdot \left| \exp \left(-i \cdot k \cdot \frac{r^2}{2(z + i \cdot z_0)} \right) \right|$ Or

$$\begin{aligned} \left| \exp \left(-i \cdot k \cdot \frac{r^2}{2(z + i \cdot z_0)} \right) \right| &= \left| \exp \left(-i \cdot k \cdot \frac{r^2 \cdot (z - i \cdot z_0)}{2(z^2 + z_0^2)} \right) \right| \\ &= \underbrace{\left| \exp \left(-i \cdot k \cdot \frac{r^2 \cdot z}{2(z^2 + z_0^2)} \right) \right|}_{=1} \cdot \left| \exp \left(-k \cdot \frac{r^2 \cdot z_0}{2(z^2 + z_0^2)} \right) \right| \end{aligned}$$

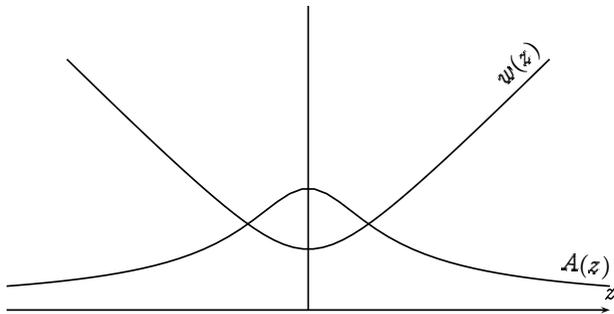
Donc

$$|E^2(r, z)| = E_0^2 \cdot \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-k \cdot \frac{2 \cdot r^2 \cdot z_0}{2(z^2 + z_0^2)}\right)$$

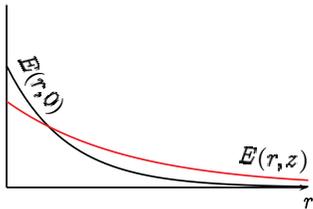
$$= E_0^2 \cdot \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-k \cdot \frac{2 \cdot r^2}{2 \cdot z_0 \cdot \left(\frac{z^2}{z_0^2} + 1\right)}\right)$$

Ce qui donne $w_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot z_0}{k}}$

On a alors $A(z) \cdot w(z) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)}} w_0 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)} = E_0 \cdot w_0$



II.1.a



II.1.a

On peut observer que $w(z)$ modélise l'élargissement du faisceau au fur et à mesure de sa progression.

II.2

II.2.b On doit comparer la variation du champ à la variation maximale du champ pour une longueur λ . Or celui-ci au maximum pourrait passer de sa valeur $|E|$ à la valeur nulle, ce qui donnerait une valeur moyenne de la dérivée :

$$\frac{|E| - 0}{\lambda} = \frac{k}{2 \cdot \pi} \cdot |E|$$

L'hypothèse proposée revient donc à négliger les dérivées partielles selon r et r devant cette grandeur.

II.2.b On a $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Si on néglige les variations spatiales de l'amplitude sur une distance correspondant à une longueur d'onde, on peut alors considérer $\underline{E}(r, z)$ comme étant une constante.

En posant $f = \underline{E}(r, z)$ et $\vec{A} = e^{i(kz - \omega t)} \cdot \vec{e}_x$ et en exploitant le formulaire, on obtient alors $\vec{rot}(f \cdot \vec{A}) \equiv f \cdot \vec{rot} \vec{A}$ vu la question précédente. Donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}(r, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \cdot k \cdot \underline{E}(r, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne}$$

$$-(-i \cdot \omega \cdot \vec{B}) = i \cdot k \cdot \underline{E}(r, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \cdot \vec{e}_y, \text{ donc}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \underline{E}(r, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \cdot \vec{e}_y = \frac{\underline{E}(r, z)}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \cdot \vec{e}_y$$

II.3

II.3.c Bien lire le formulaire qui permet d'écrire que $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\vec{E} \wedge \vec{E}^* \right)$, soit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot c} \cdot \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{|\underline{E}(r, z)|^2} \cdot \vec{e}_z. \text{ On peut en déduire}$$

$$J(r, z) = \frac{1}{2 \cdot \mu_0 \cdot c} \cdot A^2(z) \cdot e^{\frac{-2 \cdot r^2}{w^2(z)}}$$

II.3.c $R(z)$ est tel que $e^{-\frac{2.R(z)^2}{w^2(z)}} = e^{-2}$ donc $R(z) = w(z)$

II.3.c On a si $z \gg z_0$: $R(z) = w(z) \equiv w_0 \cdot \frac{z}{z_0}$. On peut en déduire le demi-angle au sommet du cône :

$$\beta = \arctan \frac{R(z)}{z} = \arctan \frac{w_0}{z_0}$$

II.3.c On a alors $z_0 = \frac{k \cdot w_0^2}{2} = \frac{\pi \cdot w_0^2}{\lambda_0} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{1,06 \cdot 10^{-6}} \approx 0,8 \text{ m}$

Ce qui donne un angle d'ouverture du faisceau : $\beta \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

III Absorption de l'énergie du laser dans un milieu métallique

III.1 $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \cdot (\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\equiv \vec{0}})$

τ a la dimension d'un temps.

III.2

III.2.b L'équation précédente donne $m \cdot (-i\omega) \cdot \vec{V} = -\frac{m}{\tau} \vec{V} - e \cdot \vec{E}_0$, soit

$$\vec{V} = \frac{\frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0}{i\omega - \frac{1}{\tau}}$$

III.2.b $\vec{j} = (-e \cdot N) \cdot \vec{V}$ d'où $\underline{\sigma} = \frac{N \cdot e^2}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$. Il s'agit d'un milieu dispersif, de conductivité dynamique $\underline{\sigma}$

III.3

III.3.c
$$\begin{cases} (1)\text{-Maxwell-Faraday} : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (2)\text{-Maxwell-Gauss} : \text{div} \vec{E} = 0 \\ (3)\text{-Maxwell-Ampère} : \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\underline{\sigma} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ (4)\text{-Maxwell-flux} : \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$
 On en déduit

par la même méthode que dans la première partie : $\Delta \vec{E} - \mu_0 \cdot \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$, avec $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \cdot \vec{e}_z$ donc :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \cdot \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

III.3.c On obtient alors $\frac{d^2 f}{dz^2} \cdot e^{-i\omega t} - \mu_0 \cdot \underline{\sigma} \cdot (-i\omega) \cdot f \cdot e^{-i\omega t} - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (-i\omega)^2 \cdot f \cdot e^{-i\omega t} = 0$, soit

$$n^2 = 1 + \frac{\underline{\sigma}}{\epsilon_0 \cdot \omega} = 1 + \frac{i\tau^2 \cdot \frac{N \cdot e^2}{m}}{\tau \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot (1 - i\omega\tau)} \rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{N}{m \cdot \epsilon_0}} e$$

Il s'agit de l'indice complexe du milieu. Il met en évidence le caractère absorbant de celui-ci.

III.3.c

III.3.c L'équation caractéristique donne deux racines $r = \pm n \frac{\omega}{c}$, ce qui amène à

une solution générale du type $f = \underline{B} \cdot e^{\frac{n}{c} \cdot z} + \underline{A} \cdot e^{-\frac{n}{c} \cdot z}$, soit $f = \underline{B} \cdot e^{n' \frac{\omega}{c} \cdot z} e^{i \cdot n'' \frac{\omega}{c} \cdot z} + \underline{A} \cdot e^{-n' \frac{\omega}{c} \cdot z} e^{-i \cdot n'' \frac{\omega}{c} \cdot z}$

On doit vérifier que $f \rightarrow 0$ si $z \rightarrow +\infty$, par conséquent $\underline{A} = 0$. Il reste donc

$$f = \underline{A}_0 \cdot e^{-n' \frac{\omega}{c} \cdot z} e^{i \cdot n'' \frac{\omega}{c} \cdot z}$$

Le nombre d'onde complexe est défini par la relation $\underline{k} = \underline{n} \cdot \frac{\omega}{c}$, la vitesse de phase par $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})} = \frac{c}{n'}$.
 n'' définit l'absorption du milieu.

III.3.c On suppose que la longueur d'onde fournie du L.A.S.E.R. s'entend dans le vide. Cela correspond alors à une pulsation $\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8}{1,06 \cdot 10^{-6}} = 1,78 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

Ensuite, la partie imaginaire de $\mathcal{I}m(\underline{n}^2) = 2 \cdot n' \cdot n'' = \frac{\tau \cdot \omega_p^2}{\omega \cdot (1 + \tau^2 \omega^2)}$

Ce qui donne : $n' = 0,43$

Le milieu étant dispersif, la vitesse de propagation de l'énergie ne correspond pas à la vitesse de phase et sera elle inférieure à c .

III.4 L'onde étant ici plane, on utilise la relation $\underline{E} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E}}{\omega} = \underline{n} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \underline{E} \cdot \underline{u}_y$

PARTIE II APPLICATION DU LASER AU TRAITEMENT ET L'USINAGE DES PIÈCES

I Traitement thermique de l'acier par laser

I.1 Application des relations précédentes : $A = \frac{P_0}{P_L} = \frac{J_0}{J_L} = 1 - R$ donc $J_0 = J_L \cdot (1 - R) = 720 \text{ W.cm}^{-2}$

I.2

I.2.b le flux thermique est opposé au gradient de température

I.2.b On effectue un bilan d'énergie pour une tranche dz du système, pendant une durée dt , ce qui donne

$$\underbrace{\rho \cdot c \cdot S \cdot dz \cdot (T(z, t + dt) - T(z, t))}_{\text{variat. elt. d'énergie du } \Sigma} = \underbrace{J(z, t) \cdot S \cdot dt}_{\delta Q_{\text{entrant}}} - \underbrace{J(z + dz, t) \cdot S \cdot dt}_{\delta Q_{\text{sortant}}}$$

En effectuant des développements limités à l'ordre 1 et en utilisant la loi de Fourier, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c} \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{K}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

I.2.b On repart de la relation $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c} \frac{\partial j}{\partial z}$ qui nous donne

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{K} \cdot J = -\frac{1}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2}$$

I.3 La température est initialement uniforme, par conséquent $J(z, 0) = 0$

I.4 L'équation de la diffusion permet de déterminer la dimension de D : $[D] : L^2 \cdot T^{-1}$, donc

$[u] : L \cdot (T \cdot L^2 \cdot T^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ donc u est sans dimension.

L'équation de la diffusion donne, vu la forme de la solution proposée, et en tenant compte que :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-1}{4 \cdot \sqrt{D \cdot t} \cdot t} \cdot A \cdot f'(u) \quad \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot A \cdot f'(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial J}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot A \cdot f''(u) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{D \cdot t}} \right)^2 \cdot A \cdot f''(u)$$

D'autre part, $f'(u) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2}$ et $f''(u) = -2 \cdot u \cdot f'(u)$

et L'équation de la diffusion donne alors

$$\frac{-z}{4 \cdot \sqrt{D \cdot t} \cdot t} \cdot A \cdot f'(u) = D \cdot \left[\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{D \cdot t}} \right)^2 \cdot A \cdot (-2 \cdot u \cdot f'(u)) \right]$$

En développant, on obtient bien l'égalité. (mais le calcul me semble bien long pour une question non bloquante pour la suite...)

Pour A , on peut remarquer que $u(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ et que $f(u \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, par conséquent, $J(z, 0) = A = J_0$

$$1.5 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \left[\frac{2 \cdot J_0}{K} \sqrt{D \cdot t} \cdot \left(\underbrace{-2 \cdot u \cdot \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}}_{-u \cdot f'(u)} - f(u) + u \cdot f'(u) \right) \right] =$$

$$\frac{-J_0}{K} \cdot f(u) = \frac{-J(z, t)}{K}$$

1.6 La fin de l'impulsion laser correspond à $F(u) = \frac{(T_a - T_0) \cdot K}{2 \cdot J_0 \cdot \sqrt{D \cdot t_p}} = 0,38$. On lit sur le graphe $u(d) = 0,2$.

$$d = 2 \cdot u(d) \cdot \sqrt{D \cdot t_p} = 0,25 \text{ mm}$$

II Usinage d'une feuille de métal par vaporisation

II.1

II.1.a Il s'agit du transfert thermique nécessaire pour faire passer le corps pur d'un état à un autre, à température et pression constantes.

II.1.a La transformation étant supposée monobare, $\Delta H = Q$, Q étant le transfert thermique de l'extérieur vers le système (S)

II.2

II.2.b NB : si vous oubliez la phase de "chauffage" du solide, la question suivante doit vous y faire penser....

$$\Delta H = \rho \cdot S \cdot e \cdot (c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0) + L_F)$$

II.2.b Première phase : $Q_1 = \rho \cdot S \cdot e \cdot c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0) = J_L \cdot S \cdot t_1$

Seconde phase : $Q_2 = \rho \cdot S \cdot e \cdot L_F = J_L \cdot S \cdot (t_2 - t_1)$.

On en déduit : $t_1 = \frac{\rho \cdot e \cdot c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0)}{J_L}$ et $t_2 - t_1 = \frac{\rho \cdot e \cdot L_F}{J_L}$

II.2.b On doit vérifier que $t_2 < t_p$, soit $J_0 = (1 - R) \cdot J_L > \frac{\rho \cdot e}{t_p} [c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0) + L_F]$

II.2.b AN : $J_{L(\min)} = \frac{2700 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,28} [900(933 - 293) + 397 \cdot 10^3] = 9380 \text{ W.cm}^{-2}$

soit une puissance moyenne minimale $\mathcal{P}_{\min} = J_L \cdot \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4} = 47 \text{ W}$

II.2.b On peut constituer un système afocal à l'aide de deux lentilles : le foyer objet de la seconde devant être placé dans le plan focal image de la première.

II.3

II.3.c Pendant une durée dt , la feuille se déplace d'une distance $V_M \cdot dt$, le volume découpé correspond donc à $V_M \cdot dt \cdot e \cdot \Phi$. Le bilan d'énergie donne donc : $\rho \cdot V_M \cdot dt \cdot e \cdot \Phi \cdot (c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0) + L_F) = (1 - R) \cdot \mathcal{P}_L \cdot dt$, ce qui permet d'en déduire la vitesse :

$$V_M = \frac{(1 - R) \cdot \mathcal{P}_L}{\rho \cdot e \cdot \Phi \cdot (c_{p(s)} \cdot (T_F - T_0) + L_F)}$$

Application numérique : $V_M = 15 \text{ cm.s}^{-1}$

II.3.c Une partie de l'énergie est transférée par conduction au reste de la plaque de métal, l'ensemble de la puissance du faisceau lumineux n'est pas converti en chaleur.