Correction Concours blanc - CCP PC 2009 - I

Problème I Voiles solaires

I.1 Orbites héliocentriques

I.1.1 $\overrightarrow{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$
$\overrightarrow{a} = \ddot{r}.\overrightarrow{u_r}\dot{r}.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}^2(-\overrightarrow{u_r})$

I.1.2 $\overrightarrow{F} = -\dfrac{Gmm_S}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ avec conservation $\begin{cases} \text{du moment cinétique } \overrightarrow{\mathcal{L}} \\ \text{de l'énergie mécanique } E_m \end{cases}$

I.1.3 Le PFD donne $-\dfrac{Gmm_S}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$
pour une orbite circulaire, $r = C^{te}$ et $\dot{\theta} = C^{te} = \dfrac{2\pi}{T}$ donc

$$T = \sqrt{\frac{r_M^3 4\pi^2}{Gm_S}}$$

I.1.4 Pour le cas général, on a $m.\ddot{r} = \underbrace{-\dfrac{Gmm_S}{r^2} + mr\dot{\theta}^2}_{E'_p}$, soit, comme $\mathcal{L} = mr^2\dot{\theta} = C^{te}$ (moment cinétique) :

$$E_p = \frac{Gmm_S}{r^2} + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2}$$

I.1.5 L'énergie potentielle effective est telle que $E_m = \dfrac{1}{2}m.\dot{r}^2 + E_p(r)$ et, comme pour ce système conservatif $E_m = C^{te}$,

$$E_p(r) = E_m - \underbrace{\frac{1}{2}m.\dot{r}^2}_{\geqslant 0} \rightarrow E_p \leqslant E_m$$

Donc $\begin{cases} E_C : r_{Cmin} < r < \infty \rightarrow \text{ hyperbole} \\ E_B : r_{Bmin} < r < r_{Bmax} \rightarrow \text{ ellipse} \\ E_A : r = C^{te} \rightarrow \text{ cercle} \end{cases}$

I.2 Une voile solaire

I.2.1 Ici on veut la quantité de mouvement cédée par les particules à la voile, soit l'opposée de la variation de quantité de mouvement pour le système particule : $\delta\overrightarrow{p} = -(\overrightarrow{p_r} - \overrightarrow{p_i}) = -(p.sin\alpha.\overrightarrow{u} - p.cos\alpha.\overrightarrow{n}) - (p.sin\alpha.\overrightarrow{u} + p.cos\alpha.\overrightarrow{n}) = 2.p.cos\alpha.\overrightarrow{n}$ Or dans la base cylindrique, $\overrightarrow{n} = cos\alpha\overrightarrow{e_r} + sin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$ soit, dans cette base

$$\delta\overrightarrow{p}\begin{cases} 2.p.cos^2\alpha \\ p.sin2\alpha \end{cases}$$

I.2.2 $\underbrace{\dfrac{\Delta\overrightarrow{p}}{\Delta t}}_{\text{pour les part.}} = -N_i\delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{F}_{voile\rightarrow particules}$ donc $\overrightarrow{F} = N_i.\delta p$

I.2.3 $\Phi = E.\Phi_i = E.\dfrac{N_i}{S.cos\alpha} \rightarrow N_i = \Phi.\dfrac{S.cos\alpha}{E}$, ce qui permet d'en déduire

$$\overrightarrow{F} = -\Phi.\frac{S.cos\alpha}{p.c}(-2.p.cos\alpha.\overrightarrow{n}) = \frac{2.\Phi.S.cos^2\alpha}{c}.\overrightarrow{n}$$

I.2.4 $F_\theta = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{e_{theta}} = \dfrac{2.\Phi.S.cos^2\alpha.sin\alpha}{c}$ ce qui permet de déterminer les extrema de cette composante

$$\frac{dF_{theta}}{d\alpha} = 0 \rightarrow cos\alpha.(1 - 3.sin^2\alpha) = 0$$

Or la composante est minimum pour $cos\alpha = 0$, on choisit donc

$$\alpha_m = asin\sqrt{\frac{1}{3}} = 35,3$$

I.2.5

$$a = \frac{F_\theta}{m} = \frac{2.\Phi.S.cos^2\alpha.sin\alpha}{m.c}$$

AN :

I.3 Temps de transit

I.3.1 Il s'agit en fait de l'énergie potentielle effective.
Si on repère l'énergie mécanique correspondant à l'orbite circulaire sur l'ancienne courbe (son minimum), on s'aperçoit que pour cette même valeur d'énergie, il existe deux valeurs r_{min} et r_{max} avec la nouvelle énergie potentielle effective. Mais ces valeurs étant très proches, l'orbite est très faiblement elliptique.

I.3.2 $\dfrac{d\overrightarrow{\mathcal{M}}}{dt} = \rightarrow(\overrightarrow{R_{ext}}, O) = r(t)\overrightarrow{e_r} \wedge (F_r\overrightarrow{e_r} + F_\theta\overrightarrow{e_\theta}) = r(t).F_\theta\overrightarrow{e_z}$

I.3.3 Le PFD donne $\begin{cases} -r\dot{\theta}^2 = \dfrac{-Gm_S}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{F_\theta}{m} \end{cases}$ soit

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm_S}{r^3}} \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3}{2}.\frac{\dot{r}}{r}.\dot{\theta}$$

La composante orthoradiale du PFD donne alors la relation recherchée, avec $C = \dfrac{2}{\sqrt{Gm_S}}$

I.3.4 Par conservation de l'énergie : $\Phi(r)/4\pi r^2 = C^{te}$. Or pour $r = r_T$ on a

$$\left(\frac{F_\theta}{m}\right)_{(r=r_T)} = \frac{2\Phi(r_T)cos^2\alpha_m sin\alpha_m}{m.c} = a$$

On déduit donc de la conservation du flux que $\dfrac{F_\theta}{m} = a.\dfrac{r_T^2}{r^2}$, soit

$$\dot{r} = C.r^{\frac{3}{2}}.a.\frac{r_T^2}{r} = \underbrace{C.r_T^2}_{C'}.\frac{a}{\sqrt{r}}$$

I.3.5 On a par conséquen $\sqrt{r}.dr = C'.a.dt$, ce qui donne par intégration :

$$t_{TM} = \frac{2}{3.C'.a}\left(r_M^{\frac{3}{2}} - r_T^{\frac{3}{2}}\right)$$

AN : $t_{TM} \equiv 8\ ans$

Problème II Vibrations transverses

II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde

II.1.1 $tans\alpha \equiv \alpha = \dfrac{dh}{dx}$ et $F_y = \left\|\overrightarrow{F}\right\| sin\alpha$. Comme $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = C^{te} = T$:

$$F_y = \frac{\partial h}{\partial x}T$$

II.1.2 Pour un élément dx de la corde :

$$F_y(x+dx) - F_y(x) = dm\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

$$T\underbrace{\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x+dx)} - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x)}\right)}_{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.dx} = \mu.dx\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

II.1.3 L'équation ci-dessus est vérifiée en tout point entre A et B, $\dfrac{\partial^2 dh}{\partial dx^2}$ est donc définie en tous ces points, $\dfrac{\partial dh}{\partial dx}$ est donc dérivable et continue.

II.1.4 La solution proposée doit vérifier $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$, soit

$$-k^2h(x,t) - \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2 h(x,t)\right) = 0$$

$$\omega = \pm k.c$$

II.1.5 On exploite les conditions aux limites $h(0,t) = h(2L,t) = 0\ \forall t$ soit

$$\begin{cases} h(0,t) = sin\Phi = 0 \\ h(2L,t) = sin(2kL+\Phi) \end{cases} = 0$$

On choisit $\Phi = 0$ pour vérifier la première égalité. Cela entraine alors que $sin(2kL) = 0$, soit

$$k_n = \frac{n\pi}{2L} \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{2L} \qquad f_n = \frac{nc}{4L}$$

II.1.6 Voir cours

II.1.7 On rappelle que $\langle cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$. Alors

$$< e(x,t) >= \frac{\mu}{2}\left[\frac{\omega^2}{2}Z^2 sin^2(kx) + \frac{1}{2}c^2k^2Z^2cos^2(kx)\right]$$

$$< e(x,t) >= \frac{\mu\omega^2Z^2}{4}$$

II.1.8 La seule énergie associée à la vibration est mécanique. On exploite donc le résultat précédent

$$< e_{tot} >= \left(\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)^2\frac{\mu Z^2}{4} = \left(\frac{\pi Z}{4L}\right)^2 T$$

II.2 Perturbation par une masse

II.2.1 Tous les modes n'ayant pas de noeuds en l'absence de masse en $x = L$ seront perturbés, donc les modes n impairs. Les autres ne seront pas perturbés.

II.2.2 PFD pour la masse, projeté selon l'axe vertical

$$m.\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -T\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{L^-} + T\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{L^+}$$

II.2.3 $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{L^-} = \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)_{L^-} = K.cosKL.cos\omega t$

$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{L^+} = \left(\frac{\partial h(2L-x,t)}{\partial x}\right)_{L^-} = -K.cosKL.cos\omega t$

$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\omega^2.sinKL.cos\omega t$

D'où la relation proposée, en utilisant le PFD de la question précédente.

II.2.4

II.2.5 $cotan(KL) = cotan(k_1L + \beta mL)$ avec $k_1 = \frac{\pi}{2L}$ donc

$cotan(KL) = cotan\left(\frac{\pi}{2} + \beta mL\right) \equiv -\beta mL = \frac{m\omega^2}{2KT}$

II.2.6 $\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{K-k_1}{k_1} = \frac{\beta m}{k_1} = \frac{-m\omega^2}{2KTLk_1}$

$\frac{\Delta f_1}{f_1} \equiv -\frac{m\omega^2}{2TLk_1^2}$ et $k_1 = \frac{\omega}{c}$ donc

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} \equiv -\frac{m}{2\mu L}$$

II.3 Quartz

II.3.1 Alors $\Delta f_1 = -f_1\frac{m}{\rho_q S}.\frac{1}{2L}$ avec $k_1 = \frac{\pi}{2L}$ donc $\frac{1}{2L} = \frac{k_1}{\pi} = \frac{2\pi f_1}{c_q}$ d'ù la relation proposée.

Pour un passe bande : $\Delta f_c = \frac{f_0}{Q} = 2,5\ Hz$ Bande passante extrêmement faible au regard de la fréquence propre.

II.3.2 On peut donc considérer qu'une variation de $\Delta f_1 >> \Delta f_c$ sera détectable. On en déduit

$$\frac{m}{S} >> \frac{\Delta f_c.\rho_q.c_q}{2f_1^2}$$

Soit $m >> 3.10^{-3}\ ng$

On peut donc estimer la sensibilité à $0,03\ ng$ pour la surface de vibration proposée.