Fonctions de plusieurs variables.

1. Fonctions différentiables, fonctions de classe C^1.

Définition 1.1 et théorème 1.1 : fonction différentiable en un point
Théorème 1.2 : cas particulier d'une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Théorème 1.3 : la différentiabilité entraîne la continuité
Définition 1.2 : dérivée d'une fonction suivant un vecteur en un point
Théorème 1.4 : la différentiabilité entraîne l'existence d'une dérivée selon tout vecteur
Définition 1.3 : dérivées partielles d'une fonction en un point dans une base donnée
Remarque :
Théorème 1.5 : expression de la différentielle en un point
Définition 1.4 : fonction de classe C^1 sur un ouvert de E
Théorème 1.6 : différentiabilité des fonctions de classe C^1

2. Opérations sur les fonctions de classe C^1.

Théorème 2.1 : utilisation de fonctions composantes
Théorème 2.2 et définition 2.1 : matrice jacobienne d'une fonction en un point
Théorème 2.3 : composée de fonctions de classe C^1 et produit de matrices jacobiennes
Exemple 2.1 : changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$
Exemple 2.2 : différentielle le long d'une courbe paramétrée
Théorème 2.4 et définition 2.2 : espaces vectoriels et algèbres de fonctions de classe C^1
Définition 2.3 : jacobien
Définition 2.4 : C^1-difféomorphisme
Théorème 2.5 : propriété dimensionnelle des C^1-difféomorphismes
Théorème 2.6 : caractérisation des C^1-difféomorphismes
Théorème 2.7 et définition 2.5 : gradient d'une fonction de classe C^1
Exemple 2.3 : expression du gradient en coordonnées polaires
Théorème 2.8 : accroissements finis
Théorème 2.9 : caractérisation des fonctions constantes à valeurs scalaires

3. Dérivées d'ordre supérieur. Etude d'extrema de fonctions à valeurs réelles.

Définition 3.1 : fonction de classe C^k, C^∞
Théorème 3.1 et définition 3.2 : espaces $C^k(U,F)$, $C^\infty(U,F)$
Théorème 3.2 : produit et quotient de fonctions de classe C^k
Théorème 3.3 : de Schwarz
Définition 3.3 : extremum d'une fonction à valeurs réelles
Définition 3.4 : point critique d'une fonction de classe C^1 à valeurs réelles
Théorème 3.4 : condition nécessaire d'extremum pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert

4. Formes différentielles et intégrales curvilignes.

Définition 4.1 : forme différentielle de classe C^k et de degré 1
Remarque 4.1 : interprétation d'une forme différentielle en termes de champ de vecteurs
Définition 4.2 : forme différentielle exacte (ou totale), primitive d'une forme différentielle exacte
Définition 4.3 : forme différentielle fermée
Théorème 4.1 : exacte $\Rightarrow$ fermée
Définition 4.4 : ouvert étoilé
Théorème 4.2 : de Poincaré, réciproque du théorème 4.1 sur un ouvert étoilé.
Théorème 4.3 et définition 4.5 : intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe
Théorème 4.4 : cas d'une forme différentielle exacte

5. Intégrales doubles et triples.

Définitions et résultats admis : surface d'un domaine quarrable du plan, définition et propriétés de l'intégrale double d'une fonction continue sur un domaine « simple » du plan
Théorème 5.1 : de Fubini, cas d'un rectangle
Théorème 5.2 : de Fubini, cas général
Exemple 5.1 : interprétation de l'intégrale d'une fonction de [a,b] dans $\mathbb{R}$ en termes de surface
Théorème 5.3 : changement de variable
Théorème 5.4 : changement de variable polaires-cartésiennes dans une intégrale double
Remarque 5.1 : intégrale triple

Fonctions de plusieurs variables.

1. Fonctions différentiables, fonctions de classe C^1.

Définition 1.1 et théorème 1.1 : fonction différentiable en un point

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
On dit que f est différentiable en a si et seulement si :
$\exists\ \varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\forall\ h \in E$, tel que : $(a + h) \in U$, $f(a + h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$.
La quantité o(h) signifie que la fonction résiduelle peut se mettre sous la forme suivante :
$o(h) = \|h\|.\varepsilon(h)$, où $\|\ .\ \|$ est une norme quelconque sur E, et où : $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.
On peut remarquer que toutes les normes étant équivalentes dans E (puisque l'espace est de dimension finie), la notion de « fonction négligeable devant h » est indépendante du choix de la norme que l'on peut faire dans E.
φ est alors appelée différentielle de f en a, ou application linéaire tangente en a, et notée df(a).
φ est alors unique.

Théorème 1.2 : cas particulier d'une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
f est différentiable en un point a de I si et seulement si f est dérivable en a.
On a alors : $\forall\ x \in I$, avec : $(a + x) \in I$, $f(a + x) = f(a) + f'(x).x + o(x)$,
et df(a) est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $df(a)(x) = f'(a).x$.

Théorème 1.3 : la différentiabilité entraîne la continuité

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Définition 1.2 : dérivée d'une fonction suivant un vecteur en un point

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit u un vecteur de E.
On dit que f admet une dérivée selon le vecteur u en a si et seulement si $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a + t.u) - f(a)]$ existe.
Si on note φ la fonction définie localement autour de 0 par : $\varphi(t) = f(a + t.u)$, la dérivée de f en a selon le vecteur u est donc $\varphi'(0)$.
On peut alors noter $Df_u(a)$ cette limite.

Théorème 1.4 : la différentiabilité entraîne l'existence d'une dérivée selon tout vecteur

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit u un vecteur de E.
Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a suivant le vecteur u et :
$Df_u(a) = df(a)(u)$.

Définition 1.3 : dérivées partielles d'une fonction en un point dans une base donnée

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E.
Pour : $1 \leq i \leq n$, si f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_i, on appelle $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a le vecteur $D_{e_i}(f)(a)$, et on le note : $D_{e_i}(f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ou $D_i(f)(a)$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base choisie.

Remarque :

Une fois une base de E fixée, on note très souvent (et abusivement) $f(x_1, \dots, x_n)$ la valeur de f(x), où on a noté : $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, en faisant référence dans f aux coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ choisie, plutôt qu'au vecteur lui-même.
On parle alors de dérivée partielle suivant la $i^{\text{ème}}$ variable (ou la $i^{\text{ème}}$ place) au lieu de faire référence au $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base correspondant.
Dans toute la suite du chapitre, on supposera au besoin fixée une base $\mathscr{B}$ de l'espace de départ ce qui fait que la fonction considérée peut alors être vue comme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans F ou de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ si l'on fixe une base dans F, la base de référence choisie dans $\mathbb{R}^n$ étant alors la base canonique.
On supposera dans la suite du chapitre, sauf mention de contraire que : dim(E) = n, dim(F) = p.

Théorème 1.5** : **expression de la différentielle en un point

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathscr{B}$ et pour tout vecteur h de E s'écrivant : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i$, on a : $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Définition 1.4 : fonction de classe C^1 sur un ouvert de E

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit f une fonction définie de U dans F.
On dit que f est de classe C^1 sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point de U et si ces n fonctions sont toutes continues sur U.
Cette définition est indépendante de la base choisie.

Théorème 1.6 : différentiabilité des fonctions de classe C^1

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Si f est de classe C^1 sur U, alors f est différentiable en tout point de U.

2. Opérations sur les fonctions de classe C^1.

Théorème 2.1 : utilisation de fonctions composantes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit : $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_p)$, une base de F et $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f dans la base $\mathscr{C}$, à savoir : $f = f_1.v_1 + \dots + f_p.v_p$.
Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont.
De plus pour une base $\mathscr{B}$ fixée de E, on a alors : $\forall\ 1 \le i \le n$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).\overrightarrow{v_j}$.

Théorème 2.2 et définition 2.1 : matrice jacobienne d'une fonction en un point

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction définie de U dans F, de classe C^1 sur U.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F (supposés respectivement de dimension n et p).
Alors, pour tout élément a de U, on appelle jacobienne (ou matrice jacobienne) de f en a la matrice à p lignes et n colonnes définie par : $\mathrm{Jac}(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$,
où les $f_1, \dots, f_p$ désignent les fonctions composantes de f dans $\mathscr{C}$ et où les x_i font référence aux coordonnées d'un vecteur de E dans $\mathscr{B}$.

De plus : $\forall$ h $\in$ E, tel que : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i$, alors : $\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_p(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{pmatrix} + \mathrm{Jac}(f)(a).\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(h) \\ \vdots \\ o_p(h) \end{pmatrix}$.

Théorème 2.3 : composée de fonctions de classe C^1

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et V un ouvert de F.
Soient f et g des fonctions de U dans F et de V dans G respectivement, telles que : f(U) $\subset$ V.
Si f et g sont de classe C^1 sur U et V respectivement, alors gof est de classe C^1 sur U, et :
$\forall$ a $\in$ U, d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a).
De plus dans des bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E, F, G respectivement, on a : Jac(gof)(a) = Jac(g)(f(a)).Jac(f)(a).

Exemple 2.1 : changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$

Soit f une fonction de classe C^1 d'un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans V, et : g = foφ.
On note alors : $\forall$ (x,y) $\in$ U, φ(x,y) = (u(x,y),v(x,y)).
On a dans ce cas : $\forall$ (x,y) $\in$ U, g(x,y) = f(u(x,y),v(x,y)).
Il arrive souvent qu'on désigne par x et y les variables de g et (abusivement) par u et v les variables de f, u et v étant à la fois vues comme coordonnées dans V et comme fonctions des « anciennes » coordonnées x et y.
g est alors de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$, et :
$\forall$ $(x_0, y_0) \in$ U, $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)).\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)).\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$,
de même pour la dérivée de g par rapport à sa deuxième variable.
Si on considère alors une grandeur physique scalaire F définie sur une portion Π du plan géométrique dans lequel on dispose de deux systèmes de coordonnées, et dont le calcul se fait, soit par une fonction f en référence au premier système de coordonnées (ici (u,v)), soit par g en référence au second système (ici (x,y)), on arrive alors à l'expression « à la physicienne » :
$\forall$ M $\in$ Π, F(M) = f(u,v) = g(x,y), puis :
$\forall$ M $\in$ Π, $\frac{\partial F}{\partial x}(M) = \frac{\partial F}{\partial u}(M).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(M).\frac{\partial v}{\partial x}$, ou plus simplement : $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$,
les dérivées partielles indiquant à chaque fois à quelle façon de calculer F (soit f, soit g) on se réfère.

Exemple 2.2 : différentielle le long d'une courbe paramétrée

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F un espace vectoriel dimension finie.
Soit f une fonction de U dans F, de classe C^1.
Soit Γ une courbe du plan paramétrée par une fonction φ de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ de telle sorte que : φ(I) $\subset$ U.
Alors foφ est de classe C^1 de I dans F, et : $\forall$ t $\in$ I, (foφ)'(t) = df(φ(t))(φ'(t)).

Théorème 2.4 et définition 2.2 : espaces vectoriels et algèbres de fonctions de classe C^1

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
L'ensemble C^1(U,F) des fonctions de classe C^1 de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De plus, pour a fixé dans U, l'application : f $\mapsto$ df(a), est linéaire de C^1(U,F) dans $\mathscr{L}$(E,F).
Par ailleurs, l'ensemble $C^1(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ forme une $\mathbb{R}$-algèbre.
En particulier, pour : (f,g) $\in$ $(C^1(U,\mathbb{R}))^2$, on a :

- $\forall$ a $\in$ U, d(f.g)(a) = f(a).dg(a) + g(a).df(a),

soit en particulier, pour les dérivées partielles par rapport aux n variables correspondant à une base $\mathscr{B}$ de E : $\forall$ a $\in$ U, $\frac{\partial}{\partial x_i}[f.g](a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).g(a) + f(a).\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.

- si de plus f ne s'annule pas sur U : $\forall$ a $\in$ U, $d\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{(f(a))^2}.df(a)$,
- si g ne s'annule pas sur U : $\forall$ a $\in$ U, $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a).df(a) - f(a).dg(a)}{(g(a))^2}$.

Définition 2.3 : jacobien

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f de classe C^1 de U dans F, et soit : $a \in U$.
On appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a : $J(f)(a) = \det(Jac(f)(a))$.

Définition 2.4 : C^1-difféomorphisme

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient U et V des ouverts respectivement de E et de F.
On dit qu'une fonction f définie de U dans V est un C^1-difféomorphisme de U sur V si et seulement si :

- f est une bijection de U sur V,
- f est de classe C^1 sur U,
- f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Théorème 2.5 : propriété dimensionnelle des C^1-difféomorphismes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient U et V des ouverts respectivement de E et de F.
Si f est un C^1-difféomorphisme de U sur V, alors : $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème 2.6 : caractérisation des C^1-difféomorphismes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient U et V des ouverts respectivement de E et de F.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur f(U) si et seulement si :

- f est injective sur U,
- $\forall a \in U$, $df(a) \in Gl(E,F)$.

Théorème 2.7 et définition 2.5 : gradient d'une fonction de classe C^1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.
Alors pour tout : $a \in U$, df(a) est une forme linéaire sur E et il existe un unique vecteur appelé gradient de f en a, que l'on note grad(f)(a), tel que :
$\forall h \in E$, $df(a)(h) = (grad(f)(a)|h)$, où on a noté (.|.) le produit scalaire dans E.
De plus, si on se place dans une base orthonormale : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, de E, alors le gradient de f en a a pour coordonnées les dérivées partielles de f en a, soit : $\mathrm{grad}(f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).e_i$.
En particulier, si : $E = \mathbb{R}^n$, et si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, on note alors :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{grad}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Exemple 2.3 : expression du gradient en coordonnées polaires

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas (0,0), et f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.
On pose par ailleurs : $F(\rho,\theta) = f(\rho.\cos(\theta),\rho.\sin(\theta)) = f(x,y)$, avec : $x = \rho.\cos(\theta)$, $y = \rho.\sin(\theta)$.
Autrement dit, f et F pourraient représenter la même grandeur physique (attaché au point M de coordonnées cartésiennes (x,y) et polaires (ρ,θ)).
Si on note u_θ et u'_θ les vecteurs : $u_\theta = \cos(\theta).i + \sin(\theta).j$, et : $u'_\theta = -\sin(\theta).i + \cos(\theta).j$, avec (i,j) la base orthonormale naturelle de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle les coordonnées sont notées x et y, alors :

$$\forall (x,y) \in U,\ \mathrm{grad}(f)(x,y) = \mathrm{grad}(f)(\rho.\cos(\theta),\rho.\sin(\theta)) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta).u_\theta + \frac{1}{\rho}.\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta).u'_\theta .$$

Théorème 2.8 : accroissements finis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|.\|$ et U un ouvert convexe de E.
Soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que : $\exists k \geq 0$, $\forall a \in U$, df(a) est k-lipschitzienne.
Alors : $\forall (a,b) \in U^2$, $|f(b) - f(a)| \leq k.\|b - a\|$.

Théorème 2.9 : caractérisation des fonctions constantes à valeurs scalaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert convexe de E.
Une fonction f de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est constante si et seulement si : $\forall a \in U$, $df(a) = 0$.

3. Dérivées d'ordre supérieur. Etude d'extrema de fonctions à valeurs réelles.

Définition 3.1 : fonction de classe C^k, C^∞

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction de U dans F, et soit : $k \geq 2$.
Soit enfin $\mathscr{B}$ une base de E.
On dit que la fonction f est de classe C^k sur U si et seulement si f est de classe C^1 sur U et si toutes ses dérivées partielles dans la base $\mathscr{B}$ sont de classe C^{k-1}.
On dira de même que f est de classe C^∞ sur U si et seulement si elle de classe C^k pour tout entier k.
Cette définition est comme pour les fonctions de classe C^1, indépendante de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Théorème 3.1 et définition 3.2 : espaces $C^k(U,F)$, $C^\infty(U,F)$

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Alors pour tout entier k, l'ensemble $C^k(U,F)$ des fonctions de classe C^k de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De plus, si D_i désigne la dérivation partielle par rapport à une variable d'une base $\mathscr{B}$ de E, alors cette application est linéaire de $C^k(U,F)$ dans $C^{k-1}(U,F)$, pour : $k \geq 1$.
De même l'ensemble $C^\infty(U,F)$ des fonctions de classe C^∞ de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et pour tout : $1 \leq i \leq n$, D_i est un endomorphisme de cet espace.

Théorème 3.2 : produit et quotient de fonctions de classe C^k

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.
Soit : $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Alors si f et g sont des fonctions de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$, alors [f.g] est encore de classe C^k sur U.
De plus, si f ne s'annule pas sur U, alors $\frac{1}{f}$ est encore de classe C^k sur U.

Théorème 3.3 : de Schwarz

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Si f est une fonction de classe C^2 de U dans F, alors, pour tout base $\mathscr{B}$ de E :

$\forall a \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, où les indices de dérivation partielle font référence à la base $\mathscr{B}$.

Plus généralement, si f est de classe C^k de U dans F, avec : $k \geq 2$, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance dans toute dérivée partielle de f d'ordre supérieur ou égal à 2 en tout point de U.

Définition 3.3 : extremum d'une fonction à valeurs réelles

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.
Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$.
On dit que f présente un minimum local (respectivement maximum local) en a si et seulement si il existe un voisinage ouvert V de a (ou une boule ouverte centrée en a) et inclus dans U tel que f(a) est le minimum (respectivement maximum) de f sur V.
On dit de même que f présente un minimum global (respectivement maximum local) en a si et seulement si f(a) est le minimum (respectivement maximum) de f sur U.

Définition 3.4 : point critique d'une fonction de classe C^1 à valeurs réelles

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.
Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.
On dit que a est un point critique de f si et seulement si : $df(a) = 0$.

Théorème 3.4 : condition nécessaire d'extremum pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.
Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.
Si f présente un extremum local ou global en un point a de U, alors a est un point critique de f et on a

donc : $df(a) = 0$.

4. Formes différentielles et intégrales curvilignes.

Définition 4.1 : forme différentielle de classe C^k et de degré 1

Soient : $E = \mathbb{R}^2$, et U un ouvert de E.

Pour un entier : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$, on appelle forme différentielle de classe C^k et de degré 1, une application ω de U dans E* (dual de E), telle que :

$\forall a \in U, \forall h = (h_1, h_2) \in E, \omega(a)(h) = P(a).h_1 + Q(a).h_2$,

où P et Q sont des fonctions de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$.

Si l'on note dx et dy les formes linéaires coordonnées dans E, alors on peut mettre ω sous la forme :

$w = P.dx + Q.dy$.

Lorsque : $E = \mathbb{R}^3$, la définition est la même avec dans l'expression de ω un terme supplémentaire valant :

$\forall a \in U, \forall h = (h_1, h_2, h_3) \in E, \omega(a)(h) = P(a).h_1 + Q(a).h_1 + R(a).h_3$, et : $\omega = P.dx + Q.dy + R.dz$.

Remarque 4.1 : interprétation d'une forme différentielle en termes de champ de vecteurs

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 1$), et de degré 1.

On peut attacher à ω un champ de vecteurs défini sur U, tel que en tout point a de E, les coordonnées du champ en a sont celles de $\omega(a)$ dans la base « canonique » de E* précédente, donc $(P(a),Q(a))$ ou $(P(a),Q(a),R(a))$.

Définition 4.2 : forme différentielle exacte (ou totale), primitive d'une forme différentielle exacte

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$), et de degré 1.

On dit que la forme différentielle ω est exacte (ou totale) sur U si et seulement si il existe une fonction f de classe C^{k+1} de U dans $\mathbb{R}$, telle que : $\omega = df$.

La fonction f est alors appelée primitive de ω sur U.

Définition 4.3 : forme différentielle fermée

Soient : $E = \mathbb{R}^2$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$), et de degré 1, telle que : $\omega = P.dx + Q.dy$.

On dit que la forme différentielle ω est fermée sur U si et seulement si :

$$\forall a \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(a) = \frac{\partial Q}{\partial x}(a).$$

Si : $E = \mathbb{R}^3$, avec les mêmes notations et en particulier : $\omega = P.dx + Q.dy + R.dz$, on dira que ω est fermée sur U si et seulement si :

$$\forall a \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(a) = \frac{\partial Q}{\partial x}(a), \frac{\partial P}{\partial z}(a) = \frac{\partial R}{\partial x}(a), \frac{\partial R}{\partial y}(a) = \frac{\partial Q}{\partial z}(a),$$

ce qu'on peut résumer en : $\forall a \in U, \text{rot}(P,Q,R)(a) = 0$,

si on note : $\forall a \in U, \text{rot}(P,Q,R)(a) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a), \frac{\partial R}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial z}(a), \frac{\partial P}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial x}(a)\right)$.

Théorème 4.1 : exacte $\Rightarrow$ fermée

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 2$, ou : $k = +\infty$), et de degré 1.

Si ω est exacte sur U, alors elle est fermée.

Définition 4.4 : ouvert étoilé

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et U un ouvert de E.

On dit que U est étoilé si et seulement si il existe : $a \in U$, tel que pour tout : $b \in U$, le segment $[a,b]$ est inclus dans U.

On peut alors préciser que U est étoilé par rapport à a.

Théorème 4.2 : de Poincaré, réciproque du théorème 4.1 sur un ouvert étoilé

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 2$,

ou : k = +∞), et de degré 1.
Si ω est fermée sur U et si U est étoilé, alors elle est exacte.

Théorème 4.3 et définition 4.5 : intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe

Soient : E = $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ([a,b],φ) un arc paramétré γ dont l'image est incluse dans U.
Soit ([c,d],ψ) un paramétrage équivalent et de même sens que ([a,b],φ), autrement dit tel qu'il existe un C^1-difféomorphisme θ de [c,d] dans [a,b] croissant.
Soit ω une forme différentielle de classe au moins C^1 et de degré 1, définie sur U.
On note par ailleurs : $\omega = P.dx + Q.dy$, $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$, $\psi = (\psi_x, \psi_y)$, avec au besoin une troisième composante si : E = $\mathbb{R}^3$.

Alors : $\int_a^b (P(\varphi(t)).\varphi'_x(t) + Q(\varphi(t)).\varphi'_y(t)).dt = \int_c^d (P(\psi(u)).\psi'_x(u) + Q(\psi(u)).\psi'_y(u)).du$.

On appelle alors intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté ([a,b],φ), la valeur commune de toutes les intégrales précédentes.
On note alors cette valeur commune $\int_{\gamma^+} \omega$.

Théorème 4.4 : cas d'une forme différentielle exacte

Soient : E = $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ([a,b],φ) un arc paramétré γ dont l'image est incluse dans U.
Soit ω une forme différentielle de classe au moins C^2 et de degré 1, définie sur U.
Si ω est une forme différentielle exacte sur U, et si f est une primitive de ω sur U, donc telle que : ω = df,
alors : $\int_{\gamma^+} \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(B) - f(A)$,
où on a noté A et B les « extrémités » géométriques de l'arc considéré.
En particulier, si γ est un arc fermé, alors : $\int_{\gamma^+} \omega = 0$.
Enfin, si pour une forme différentielle ω définie sur U, de classe au moins C^2 et de degré 1, on peut trouver un arc paramétré fermé γ tel que : $\int_{\gamma^+} \omega \neq 0$, alors ω n'est pas exacte.

5. Intégrales doubles et triples.

Définitions et résultats admis : surface d'un domaine quarrable du plan, définition et propriétés de l'intégrale double d'une fonction continue sur un domaine « simple » du plan

• Surface d'un domaine du plan.
Soit D un domaine inclus dans $\mathbb{R}^2$, domaine quarrable du plan.
On découpe le plan en carrés élémentaires de côté de longueur $\frac{1}{n}$, puis on calcule la surface totale s_n des carrés précédents inclus dans D ainsi que la surface totale S_n des carrés précédents nécessaires pour recouvrir D.
Si : $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$, l'ensemble D est dit quarrable et la limite commune est appelée surface de D.

• Intégrabilité d'une fonction et intégrale double d'une fonction sur un domaine du plan.
Soit D un domaine compact « simple » du plan (ou plus généralement un domaine quarrable).
Soit f une fonction définie et bornée sur un ouvert contenant D.
On découpe le plan en carrés de coté de longueur $\frac{1}{n}$ et on note C_n^{int} l'ensemble de ces carrés qui sont inclus dans D, puis C_n^{ext} l'ensemble de ceux qui sont nécessaires pour recouvrir D.
Si : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{c\in C_n^{int}} \frac{1}{n^2}.\min_{x\in c}(f(x)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{c\in C_n^{ext}} \frac{1}{n^2}.\max_{x\in c}(f(x))$, on dit alors que f est intégrable sur D et on appelle intégrale double de f sur D la limite commune précédente, que l'on note alors $\iint_D f$ ou $\iint_D f(x,y).dxdy$.

• Intégrabilité des fonctions continues.
Pour tout domaine D compact « simple », les fonctions continues sur D sont intégrables sur D et forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $C^0(D,\mathbb{R})$.

• Linéarité de l'intégrale double.
Pour tout domaine D compact « simple », les fonctions continues sur D forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $C^0(D,\mathbb{R})$ et l'intégrale double sur D est une application linéaire de $C^0(D,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

- Positivité et croissance.

Soit f continue et positive sur un domaine D compact « simple » du plan. Alors : $\iint_D f \geq 0$.

De plus, si f et g sont définies et continues sur D et vérifient : f ≥ g, sur D, alors : $\iint_D f \geq \iint_D g$.

- Relation de Chasles.

Soient D_1 et D_2 des compacts « simples » du plan, dont l'intersection est de surface nulle.
Soit f définie et continue sur $D_1 \cup D_2$.
Alors : $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$.

- Cas particulier.

Si D et Δ sont des compacts « simples » du plan, tels que : $\Delta \subset D$, et si f est une fonction continue et positive sur D, alors : $\iint_\Delta f \leq \iint_D f$.

Théorème 5.1 : de Fubini, cas d'un rectangle

Soit D un rectangle du plan : D = [a,b]×[c,d], et f une fonction définie et continue sur D.

Alors : $\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y).dy \right).dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y).dx \right).dy$.

En particulier, si f peut se mettre sous la forme : ∀ (x,y) ∈ D, f(x,y) = g(x).h(y), alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b g(x).dx.\int_c^d h(y).dy.$$

Théorème 5.2 : de Fubini, cas général

Si D est un domaine du plan qui peut se décrire par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, et si f est une fonction continue sur D, alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y).dy \right).dx.$$

De même, si D peut se décrire par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y).dx \right).dy.$$

Exemple 5.1 : interprétation de l'intégrale d'une fonction de [a,b] dans ℝ en termes de surface

Soit f une fonction définie, continue et positive d'un segment [a,b] inclus dans ℝ à valeurs dans ℝ.
Soit D le domaine limité par les droites de $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique, d'équations :
y = 0, x = a, x = b, et la courbe d'équation : y = f(x).

Alors : $\iint_D dxdy = \int_a^b f(x).dx$.

Théorème 5.3 : changement de variable

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et D un compact « simple » du plan, tel que : $D \subset U$.
Soit Φ un C^1-difféomorphisme de U sur V.
Soit f une fonction définie et continue sur Φ(D).

Alors : $\iint_{\Phi(D)} f(x,y).dxdy = \iint_D f(\Phi(u,v)).\left|\det(\mathrm{Jac}(\Phi))\right|.dudv$.

Théorème 5.4 : changement de variable polaires-cartésiennes dans une intégrale double

Soit Δ un compact « simple » du plan, décrit en coordonnées cartésiennes et soit D sa description en coordonnées polaires, description injective sauf éventuellement pour le bord de D ou de Δ.
Autrement dit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $((x,y) \in \Delta) \Leftrightarrow ((\rho,\theta) \in D)$, en posant : x = ρ.cos(θ), y = ρ.sin(θ).
Soit f une fonction définie et continue sur Δ.

Alors : $\iint_\Delta f(x,y).dxdy = \iint_D f(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)).\rho.d\rho d\theta$.

Remarque 5.1 : intégrale triple

Les propriétés vues pour les intégrales doubles se généralisent aux intégrales triples, de fonctions continues d'un domaine D de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans ℝ.
En particulier, on retrouve le théorème de Fubini et le principe du changement de variable.