Fonctions de plusieurs variables.

1. Fonctions différentiables, fonctions de classe C^1.

Définition 1.1 et théorème 1.1 : fonction différentiable en un point

Soient E et F des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
On dit que f est différentiable en a si et seulement si :
$\exists\ \varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\forall\ h \in E$, tel que : $(a + h) \in U$, $f(a + h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$.
La quantité o(h) signifie que la fonction résiduelle peut se mettre sous la forme suivante :
$o(h) = \|h\|.\varepsilon(h)$, où $\|\ .\ \|$ est une norme quelconque sur E, et où : $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.
On peut remarquer que toutes les normes étant équivalentes dans E (puisque l'espace est de dimension finie), la notion de « fonction négligeable devant h » est indépendante du choix de la norme que l'on peut faire dans E.
φ est alors appelée différentielle de f en a, ou application linéaire tangente en a, et notée df(a).
φ est alors unique.

Démonstration :

Supposons que φ et ψ vérifient les mêmes hypothèses.
Alors : $\forall\ h \in E$, tel que : $(a + h) \in U$, alors: $\varphi(h) - \psi(h) = o(h)$.
Or si on note: $\theta = \varphi - \psi$, qui est linéaire, si et e est un vecteur de E, alors :
$\forall\ t \in \mathbb{R}$, tel que : $(a + t.e) \in U$, on a : $\theta(t.e) = t.\theta(e) = o(t.e) = t.\varepsilon(t)$, où ε tend vers 0 quand t tend vers 0.
Pour t non nul, on en déduit que : $\theta(e) = \varepsilon(t)$.
Mais comme $\theta(e)$ ne dépend pas de t, cette fonction constate ne peut tendre vers 0 que si elle est nulle.
Conclusion : $\forall\ e \in E$, $\theta(e) = 0$, et θ est nulle, d'où : $\varphi = \psi$.
Remarque : il est toujours possible, pour tout vecteur e en particulier non nul, de trouver : $\delta > 0$, tel que pour tout : $t \in]-\delta,+\delta[$, $(a + t.e) \in U$, car U est un ouvert de E.

Théorème 1.2 : cas particulier d'une fonction d'un intervalle I de ℝ dans ℝ

Soit I un intervalle de ℝ.
Soit f une fonction de I dans ℝ.
f est différentiable en un point a de I si et seulement si f est dérivable en a.
On a alors : $\forall\ x \in I$, avec : $(a + x) \in I$, $f(a + x) = f(a) + f'(x).x + o(x)$,
et df(a) est l'application linéaire de ℝ dans ℝ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $df(a)(x) = f'(a).x$.

Démonstration :

Il suffit de dire qu'une application linéaire φ de ℝ dans ℝ a pour forme :
$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \alpha.x$.
En reprenant la caractérisation d'une application de I dans ℝ dérivable en un point qui utilise des développements limités, il est alors clair que les deux propositions sont équivalentes et que, si f est dérivable en a, elle y est différentiable et que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $df(a)(x) = f'(a).x$.

Théorème 1.3 : la différentiabilité entraîne la continuité

Soient E et F des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

Si f est différentiable en a, alors : $\forall\ h \in E$, tel que : $(a + h) \in U$, $f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$.
Or df(a), comme application linéaire de E dans F, espaces vectoriels de dimension finie, est continue.
Donc : $\lim\limits_{h\to 0} df(a)(h) = df(a)(0) = 0$, d'où on déduit la continuité de f en a.

Théorème 1.4 : la différentiabilité entraîne l'existence d'une dérivée selon tout vecteur

Soient E et F des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit u un vecteur de E.
Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a suivant le vecteur u et :
$Df_u(a) = df(a)(u)$.

Démonstration :

Supposons donc f différentiable en a.

Alors : $\forall$ u $\in$ E, $\forall$ t $\in$ ℝ*, tel que : (a + t.u) $\in$ U, f(a + t.u) = f(a) + df(a)(t.u) + o(t.u).

En notant alors $\|.\|$ une norme sur E, on peut transformer l'expression précédente en :

f(a + t.u) = f(a) + t.df(a)(u) + $\|t.u\|\varepsilon(t.u)$ = f(a) + t.df(a)(u) + t.signe(t).$\|u\|.\varepsilon(t.u)$.

D'où : $\forall$ t $\in$ ℝ*, tel que : (a + t.u) $\in$ U, $\frac{1}{t}[f(a+t.u) - f(a)] = df(a)(u) + \text{signe}(t).\|u\|.\varepsilon(t.u)$.

Il alors clair que cette expression admet bien une limite quand t tend vers 0 qui est df(a)(u).

Théorème 1.5 : expression de la différentielle en un point

Soient E et F des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie, soit U un ouvert de E et a un point de U.

Soit f une fonction définie de U dans F.

Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathscr{B}$ et pour tout vecteur h de E s'écrivant : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i$, on a : $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Démonstration :

On sait déjà, d'après les théorème 1.4 que f admet des dérivées partielles selon tout vecteur en a et que de plus : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $D_{e_i}(f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i)$.

Alors : $\forall$ h $\in$ E, avec : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i$, on a : $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i.df(a)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Théorème 1.6 : différentiabilité des fonctions de classe C^1

Soient E et F des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.

Soit f une fonction définie de U dans F.

Si f est de classe C^1 sur U, alors f est différentiable en tout point de U.

Démonstration : hors programme

On va utiliser la norme infinie (notée ici $\|.\|$) dans E attachée à une base $\mathscr{B}$ et on notera également $\|.\|$ une norme quelconque dans F.

Soit par ailleurs : a $\in$ U.

Alors il existe : R > 0, tel que : $\forall$ h $\in$ E, ($\|h\|$ ≤ R) $\Rightarrow$ ((a + h) $\in$ U), puisque U est un ouvert de E.

Soit : h = $h_1.e_1 + \ldots + h_n.e_n$, tel que : 0 < $\|h\|$ ≤ R.

Alors : (a + h) $\in$ U, et : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, (a + $h_1.e_1 + \ldots + h_i.e_i$) $\in$ U.

On pose alors : $\eta(h) = \frac{1}{\|h\|}.\left[f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]$.

On va passer de a à (a+h) par l'intermédiaire de toutes les valeurs (a + $h_1.e_1 + \ldots + h_i.e_i$), soit :

$$\eta(h) = \frac{1}{\|h\|}.\left[\sum_{i=1}^{n}[f(a+h_1.e_1+\ldots+h_i.e_i) - f(a+h_1.e_1+\ldots+h_{i-1}.e_{i-1})] - \sum_{i=1}^{n} h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right].$$

On applique alors le théorème des accroissements finis aux n fonctions d'une seule variable :

$\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $\varphi_i : t \mapsto f(a + h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + t.e_i)$, sur $[0,h_i]$,

et on peut écrire :

$$\forall\, 1 \le i \le n,\ \exists\, \theta_i \in\,]0,1[,\ \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = h_i.\varphi_i'(\theta_i.h_i) = h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + \theta_i.h_i.e_i).$$

Donc : $\exists\, (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in\,]0,1[^n$, $\eta(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\|h\|}.\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + \theta_i.h_i.e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]$.

Il suffit alors de dire que toutes les fonctions dérivées partielles sont continues en a, et donc que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, 0 < R' \le R,\ \forall\, k \in E,\ (\|k\| \le R') \Rightarrow \left(\forall\, 1 \le i \le n,\ \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+k) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\| \le \frac{\varepsilon}{n}\right).$$

Par conséquent avec les notations précédentes, pour un h dans E tel que : $\|h\| \leq R'$, on a : $\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$\|h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + \theta_i.h_i.e_i\| \leq R'$, donc : $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + \theta_i.h_i.e_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\| \leq \dfrac{\varepsilon}{n}$.

Comme enfin, on a de plus pour tout h non nul : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\dfrac{|h_i|}{\|h\|} \leq 1$, on en déduit que :

$$\forall\ h \in E,\ (\|h\| \leq R') \Rightarrow \left(\|\eta(h)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|h_i|}{\|h\|}.\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + h_1.e_1 + \ldots + h_{i-1}.e_{i-1} + \theta_i.h_i.e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\| \leq n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon\right).$$

Autrement dit la fonction η tend vers 0 quand h tend vers 0, et donc :

$f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \|h\|.\eta(h) = o(h)$, soit finalement : $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h)$.

f est bien différentiable en a.

2. Opérations sur les fonctions de classe C^1.

Théorème 2.1 : utilisation de fonctions composantes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Soit : $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_p)$, une base de F et $f_1, \ldots, f_p$ les composantes de f dans la base $\mathcal{C}$, à savoir :
$f = f_1.v_1 + \ldots + f_p.v_p$.
Alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ le sont.
De plus pour une base $\mathcal{B}$ fixée de E, on a alors : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).\overrightarrow{v_j}$.

Démonstration :

On peut commencer par fixer une base : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, dans l'espace E.
Soit alors : $a \in U$.

f admet alors une dérivée partielle en a suivant la $i^{\text{ème}}$ variable si et seulement si $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}[f(a + t.e_i) - f(a)]$ existe et cette limite existe si et seulement si les différentes composantes de cette fonction matricielle admettent elles aussi une limite quand t tend vers 0, ce qui correspond à dire que les fonctions f_j admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les variables.
Une fois exprimées ensuite les différentes dérivées partielles, on obtient de même que ces dérivées partielles sont continues sur U si et seulement si les composantes de ces dérivées partielles le sont.

Il suffit pour conclure de remarquer que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).\overrightarrow{v_j}$, pour en déduire la dernière partie de l'équivalence.

Théorème 2.2 et définition 2.1 : matrice jacobienne d'une fonction en un point

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction définie de U dans F, de classe C^1 sur U.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F (supposés respectivement de dimension n et p).
Alors, pour tout élément a de U, on appelle jacobienne (ou matrice jacobienne) de f en a la matrice à p lignes et n colonnes définie par : $\mathrm{Jac}(f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$,

où les $f_1, \ldots, f_p$ désignent les fonctions composantes de f dans $\mathcal{C}$ et où les x_i font référence aux coordonnées d'un vecteur de E dans $\mathscr{B}$.

De plus : $\forall$ h $\in$ E, tel que : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i.e_i$, alors : $\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_p(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{pmatrix} + \mathrm{Jac}(f)(a).\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(h) \\ \vdots \\ o_p(h) \end{pmatrix}$.

Démonstration :

La dernière écriture proposée correspond simplement à l'égalité vectorielle :

$\forall$ h $\in$ E, f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h),

exprimée matriciellement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Théorème 2.3 : composée de fonctions de classe C^1

Soient E, F et G trois ℝ-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et V un ouvert de F.

Soient f et g des fonctions de U dans F et de V dans G respectivement, telles que : f(U) $\subset$ V.

Si f et g sont de classe C^1 sur U et V respectivement, alors gof est de classe C^1 sur U, et :

$\forall$ a $\in$ U, d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a).

De plus dans des bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de E, F, G respectivement, on a : Jac(gof)(a) = Jac(g)(f(a)).Jac(f)(a).

Démonstration :

Soient : a $\in$ U, et : h $\in$ E, tel que : (a + h) $\in$ U.

Alors : f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + o(h),

Si de plus : k = df(a)(h) + o(h), est tel que : (f(a) + k) $\in$ V, alors, g étant elle-même différentiable en f(a) :

g(f(a) + k) = g(f(a)) + dg(f(a))(k) + o(k).

Donc globalement, si : (a + h) $\in$ U, et : (f(a + h) $\in$ V), on peut écrire, puisque dg(f(a)) est linéaire :

gof(a + h) = gof(a) + dg(f(a))(df(a)(h) + o(h)) + o(df(a)(h) + o(h)), et donc :

gof(a + h) = gof(a) + dg(f(a))(df(a)(h)) + dg(f(a))(o(h)) + o(df(a)(h) + o(h)).

On remarque alors que :

- dg(f(a))(o(h)) = dg(f(a))($\|h\|.\varepsilon(h)$)= $\|h\|$ .dg(f(a))(ε(h)),

et comme dg(f(a)) est continue en 0, on a : $\lim_{h\to 0} dg(f(a))(\varepsilon(h)) = 0$, ce qui montre que dg(f(a))(o(h)) est bien du type o(h),

- $\|df(a)(h) + o(h)\| \leq \|\|df(a)\|\|.\|h\| + \|h\|.\|\varepsilon(h)\| \leq \|h\|.[\|\|df(a)\|\| + M]$, où $\|\|df(a)\|\|$ est la norme triple de l'application linéaire df(a) de E dans F, rapportés à des normes quelconques, et où : M $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, majore la fonction ε au voisinage de 0, ce qui est possible, puisque ε tend vers 0 en 0.

On constate alors que : o(df(a)(h) + o(h)) = $\|df(a)(h) + o(h)\|$.ε(df(a)(h)+o(h)).

Enfin, pour h non nul, on peut écrire : o(df(a)(h) + o(h)) = $\|h\|.\eta(h)$,

avec : $\eta(h) = \left[[\|\|df(a)\|\| + M].\dfrac{\|df(a)(h) + o(h)\|}{\|h\|.[\|\|df(a)\|\| + M]}.\varepsilon(df(a)(h) + o(h)) \right]$,

Or df(a) est continue en 0, et : $\|\eta(h)\| \leq [\|\|df(a)\|\| + M].\|\varepsilon(df(a)(h) + o(h))\|$, donc la fonction η tend vers 0 en 0, et finalement : o(df(a)(h) + o(h)) = o(h).

Conclusion : gof est différentiable en tout point a de U et : $\forall$ a $\in$ U, d(gof)(a) = dg(f(a))odf(a).

L'égalité proposée ensuite pour les matrices jacobiennes n'est que la traduction matricielle de l'égalité précédente sur les endomorphismes.

On termine en remarquant que les fonctions composantes de d(gof)(a) s'écrivent :

$\forall$ a $\in$ U, $\forall$ 1 $\leq$ k $\leq$ q (avec : q = dim(G)), $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[(gof)_k](a) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)).\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$,

et sous cette forme, il est clair que toutes les dérivées partielles de ces fonctions composantes sont continues sur U, donc que (gof) est bien de classe C^1 sur U, en utilisant évidemment le théorème 2.1.

Exemple 2.2 : différentielle le long d'une courbe paramétrée

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F un espace vectoriel dimension finie.

Soit f une fonction de U dans F, de classe C^1.

Soit Γ une courbe du plan paramétrée par une fonction φ de classe C^1 d'un intervalle I de ℝ dans $\mathbb{R}^2$ de

telle sorte que : $\varphi(I) \subset U$.
Alors $f\circ\varphi$ est de classe C^1 de I dans F, et : $\forall\ t \in I$, $(f\circ\varphi)'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t))$.

Démonstration :

Les théorèmes 2.1 et 1.2 montrent que φ est différentiable si et seulement si ses fonctions composantes (qu'on peut noter x et y) le sont.
Puis : $\forall\ t \in I$, $Jac(f\circ\varphi)(t) = Jac(f)(\varphi(t)).Jac(\varphi)(t)$.
Soit donc, en notant $f_1, \dots, f_p$ les fonctions composantes de f dans une base $\mathscr{C}$ de F :

$$\forall\ 1 \le j \le p,\ \frac{\partial}{\partial t}[(f\circ\varphi)_j](t) = \frac{\partial f_j}{\partial x}(x(t),y(t)).x'(t) + \frac{\partial f_j}{\partial y}(x(t),y(t)).y'(t),$$

et puisque $f\circ\varphi$ n'est en fait une fonction que de la seule variable t, on conclut à :

$\forall\ 1 \le j \le p$, $[(f\circ\varphi)_j]'(t) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x}(x(t),y(t)).x'(t) + \dfrac{\partial f_j}{\partial y}(x(t),y(t)).y'(t) = df_j(\varphi(t))(\varphi'(t))$, comme annoncé, ou encore la formule identique portant sur f et non plus sur ses fonctions composantes.

Théorème 2.4 et définition 2.2 : espaces vectoriels et algèbres de fonctions de classe C^1

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.
L'ensemble $C^1(U,F)$ des fonctions de classe C^1 de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De plus, pour a fixé dans U, l'application : $f \mapsto df(a)$, est linéaire de $C^1(U,F)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$.
Par ailleurs, l'ensemble $C^1(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ forme une $\mathbb{R}$-algèbre.
En particulier, pour : $(f,g) \in (C^1(U,\mathbb{R}))^2$, on a :

- $\forall\ a \in U$, $d(f.g)(a) = f(a).dg(a) + g(a).df(a)$,

soit en particulier, pour les dérivées partielles par rapport aux n variables correspondant à une base $\mathscr{B}$ de E : $\forall\ a \in U$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f.g](a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).g(a) + f(a).\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.

- si de plus f ne s'annule pas sur U : $\forall\ a \in U, d\left(\dfrac{1}{f}\right)(a) = -\dfrac{1}{(f(a))^2}.df(a)$,
- si g ne s'annule pas sur U : $\forall\ a \in U, d\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a).df(a) - f(a).dg(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :

- pour un point a de U et une fonction f de U dans F, l'existence pour : $1 \le i \le n$, de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vient du fait que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}[f(a+t.e_i) - f(a)]$ existe dans F.

Il est alors clair que si c'est le cas pour f et g, c'est encore vrai pour $[\lambda.f+\mu.g]$, avec : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
De plus, on a alors : $\forall\ a \in U$, $\forall\ 1 \le i \le n$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[\lambda.f + \mu.g](a) = \lambda.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu.\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$,
et sous cette forme, si toutes les dérivées partielles de f et de g sont continues sur U, celles de $[\lambda.f+\mu.g]$ le sont aussi.
Donc on vient d'établir que $C^1(U,F)$ forme bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(U,F)$ puisqu'il est clair par ailleurs que le premier est bien inclus dans le second et que $C^1(U,F)$ contenant la fonction nulle, il est non vide.
Les expressions précédentes permettent également d'obtenir que $[\lambda.f+\mu.g]$ est différentiable en tout point a de U et que : $\forall\ a \in U$, $d(\lambda.f+\mu.g)(a) = \lambda.df(a) + \mu.dg(a)$.
Donc : $f \mapsto df(a)$, est linéaire de $C^1(U,F)$ dans $\mathscr{L}(E,F)$.

- si maintenant f et g sont de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$, et si a est un point de U, alors :

$\forall\ 1 \le i \le n$, $\varphi_i : t \mapsto [f.g](a + t.e_i)$,
est une fonction qui admet une dérivée en 0, comme produit de deux fonctions d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.
De plus : $\forall\ 1 \le i \le n$, $\varphi_i'(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}[f.g](a) = f(a).\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).g(a)$.
On vient donc d'établir que [f.g] admet des dérivées partielles en tout point de U et que vu la forme trouvée, ces dérivées partielles sont continues sur U.

Donc [f,g] est bien de classe C^1 sur U et $C^1(U,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}(U,\mathbb{R})$.
Enfin : $\forall$ a $\in$ U, $\forall$ h $\in$ U, tel que : (a+h) $\in$ U, on a :

$$d[f.g](a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\left[f(a).\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).g(a)\right].h_i = f(a).dg(a)(h)+g(a).df(a)(h) = [f(a).dg(a)+g(a).df(a)](h).$$

C'est bien le résultat annoncé.

• de même, si f ne s'annule pas sur U, on a : $\forall$ a $\in$ U, $\forall$ $1 \le i \le n$, $\psi_i : t \mapsto \dfrac{1}{f(a+t.e_i)}$, admet une dérivée en 0, comme inverse d'une fonction d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui en admet une, et :

$$\forall\ 1 \le i \le n,\ \psi_i'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{f}\right](a) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).\frac{1}{(f(a))^2},$$

et on obtient de la même façon que précédemment la forme annoncée de la différentielle.
• le dernier point combine simplement les deux points qui le précédent.

Théorème 2.5 : propriété dimensionnelle des C^1-difféomorphismes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient U et V des ouverts respectivement de E et de F.
Si f est un C^1-difféomorphisme de U sur V, alors : dim(E) = dim(F).

Démonstration :

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de U sur V, f est une bijection de U sur V, de classe C^1 sur U et sa réciproque étant elle aussi de classe C^1, mais sur V.
Donc : $\forall$ x $\in$ U, $f^{-1}of(x) = x$.
Or dans ce cas, $f^{-1}of$ (soit l'identité de U) est encore de classe C^1, et : $\forall$ x $\in$ U, $d(f^{-1})(f(x))odf(x) = id_E$.
De même, $\forall$ y $\in$ V, $fof^{-1}(y) = y$, conduit à : $\forall$ y $\in$ V, $df(f^{-1}(y))od(f^{-1})(y) = id_F$.
Soit alors : a $\in$ U, fixé, et : b = f(a) $\in$ V.
On constate alors que df(a) est linéaire de E dans F et admet une réciproque qui est $d(f^{-1})(b)$.
Donc c'est un isomorphisme de E sur F et : dim(E) = dim(F).

Théorème 2.6 : caractérisation des C^1-difféomorphismes

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient U et V des ouverts respectivement de E et de F.
Soit f une fonction définie de U dans F.
Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur f(U) si et seulement si :
- f est injective sur U,
- $\forall$ a $\in$ U, df(a) $\in$ Gl(E,F).

Démonstration : hors programme et admis

Théorème 2.7 et définition 2.5 : gradient d'une fonction de classe C^1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et soit U un ouvert de E.
Soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.
Alors pour tout : a $\in$ U, df(a) est une forme linéaire sur E et il existe un unique vecteur appelé gradient de f en a, que l'on note grad(f)(a), tel que :
$\forall$ h $\in$ E, df(a)(h) = (grad(f)(a)|h), où on a noté (.|.) le produit scalaire dans E.
De plus, si on se place dans une base orthonormale : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, de E, alors le gradient de f en a a pour coordonnées les dérivées partielles de f en a, soit : $\mathrm{grad}(f)(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).e_i$.
En particulier, si : $E = \mathbb{R}^n$, et si $\mathscr{B}$ est la base canonique de E, on note alors :

$$\forall\ a \in U,\ \mathrm{grad}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Démonstration :

Le fait que, pour a fixé, df(a) soit une forme linéaire découle du fait que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Puis on sait que toute forme linéaire, une fois fixé un produit scalaire sur E, peut se voir comme le produit scalaire avec un vecteur de E, et ceci pour un unique vecteur de E.
Enfin, dans une base orthonormale : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, de E, le produit scalaire considéré prend une forme canonique, et on a donc :

$\forall$ a $\in$ U, $\forall$ h $\in$ E, df(a)(h) = $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$, si h est de la forme : h = $h_1.e_1 + \dots + h_n.e_n$.

Enfin, si on note : grad(f)(a) = $\alpha_1.e_1 + \dots + \alpha_n.e_n$, l'unique vecteur qui répond au problème, on a par ailleurs : $\forall$ h $\in$ E, (grad(f)(a)|h) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.h_i$.

Il est donc clair qu'on a bien : $\forall$ a $\in$ U, $\mathrm{grad}(f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).e_i$.

Exemple 2.3 : expression du gradient en coordonnées polaires

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas (0,0), et f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.
On pose par ailleurs : $F(\rho,\theta) = f(\rho.\cos(\theta),\rho.\sin(\theta)) = f(x,y)$, avec : $x = \rho.\cos(\theta)$, $y = \rho.\sin(\theta)$.
Autrement dit, f et F pourraient représenter la même grandeur physique (attaché au point M de coordonnées cartésiennes (x,y) et polaires (ρ,θ)).
Si on note u_θ et u'_θ les vecteurs : $u_\theta = \cos(\theta).i + \sin(\theta).j$, et : $u'_\theta = -\sin(\theta).i + \cos(\theta).j$, avec (i,j) la base orthonormale naturelle de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle les coordonnées sont notées x et y, alors :

$\forall$ (x,y) $\in$ U, $\mathrm{grad}(f)(x,y) = \mathrm{grad}(f)(\rho.\cos(\theta),\rho.\sin(\theta)) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta).u_\theta + \frac{1}{\rho}.\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta).u'_\theta$.

Démonstration :

Notons Φ la C^1-difféomorphisme de $]-\pi,+\pi]\times]0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, défini par :
$\forall (\rho,\theta) \in]-\pi,+\pi]\times]0,+\infty)$, $\Phi(\rho,\theta) = (\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))$.
Alors U est inclus dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, et sur $\Phi^{-1}(U)$, on a : $F = fo\Phi$, ou encore : $f = Fo\Phi^{-1}$, sur U.
Puis : $\forall$ (x,y) $\in$ U, $Jac(f)(x,y) = Jac(F)(\Phi^{-1}(x,y)).(Jac(\Phi^{-1})(x,y))$.
Si de plus, on note : $\forall$ (x,y) $\in$ U, $x = \rho.\cos(\theta)$, $y = \rho.\sin(\theta)$, alors :

$Jac(\Phi^{-1})(x,y) = (Jac(\Phi)(\rho,\theta))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{\rho}.\sin(\theta) & \frac{1}{\rho}.\cos(\theta) \end{pmatrix}$, puis

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta).\cos(\theta) - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta).\sin(\theta)$, et : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta).\sin(\theta) + \frac{1}{\rho}.\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta).\cos(\theta)$.

On constate alors en développant $\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta).u_\theta + \frac{1}{\rho}.\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho,\theta).u'_\theta$, qu'on réobtient bien grad(f)(x,y).

Théorème 2.8 : accroissements finis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|.\|$ et U un ouvert convexe de E.
Soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que : $\exists$ k $\geq$ 0, $\forall$ a $\in$ U, df(a) est k-lipschitzienne.
Alors : $\forall$ (a,b) $\in$ U^2, $|f(b) - f(a)| \leq k.\|b - a\|$.

Démonstration :

Considérons le segment inclus dans U des points définis par :
$\forall$ t $\in$ [0,1], u(t) = (1 – t).a + t.b.
Alors : $t \mapsto (fou)(t)$, est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (comme on l'a vu dans l'exemple 2.2).
Puis : $\forall$ t $\in$ [0,1], on a : (fou)'(t) = df(u(t))(u'(t)).
Donc : f(b) – f(a) = fou(1) – fou(0) = $\int_0^1 (fou)'(t).dt = \int_0^1 df(u(t))(u'(t)).dt$.
Mais on peut alors utiliser l'inégalité de la moyenne et le fait que, pour tout t dans [0,1], l'application (linéaire) df(u(t)) est k-lipschitzienne.
Enfin, il est clair que : $\forall$ t $\in$ [0,1], u'(t) = b – a, et donc on obtient alors :

|f(b) – f(a)| = $\left|\int_0^1 (fou)'(t).dt\right| \leq \int_0^1 |df(u(t))(u'(t))|.dt \leq \int_0^1 k.\|u'(t)\|.dt = k.\|b - a\|$.

Théorème 2.9 : caractérisation des fonctions constantes à valeurs scalaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert convexe de E.
Une fonction f de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est constante si et seulement si : $\forall$ a $\in$ U, df(a) = 0.

Démonstration :

Si pour tout a dans U, df(a) est nulle, elle est alors 0-lipschitzienne.

Donc : $\forall (a,b) \in U^2$, $|f(b) - f(a)| \leq 0.\|b - a\| = 0$, et f est bien constante sur U.

3. Dérivées d'ordre supérieur. Etude d'extrema de fonctions à valeurs réelles.

Théorème 3.1 et définition 3.2 : espaces $C^k(U,F)$, $C^\infty(U,F)$

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.

Alors pour tout entier k, l'ensemble $C^k(U,F)$ des fonctions de classe C^k de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De plus, si D_i désigne la dérivation partielle par rapport à une variable d'une base $\mathcal{B}$ de E, alors cette application est linéaire de $C^k(U,F)$ dans $C^{k-1}(U,F)$, pour : $k \geq 1$.

De même l'ensemble $C^\infty(U,F)$ des fonctions de classe C^∞ de U dans F forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et pour tout : $1 \leq i \leq n$, D_i est un endomorphisme de cet espace.

Démonstration :

Comme pour les fonctions de classe C^1 de U dans F, on démontre que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(U,F)$ (voir théorème 2.4).

De la même façon, on démontre que pour une base donnée, la dérivation des fonctions par rapport à une des variables (coordonnées) dans cette base, est bien linéaire de $C^k(U,f)$ dans $C^{k-1}(U,F)$.

Théorème 3.2 : produit et quotient de fonctions de classe C^k

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.

Soit : $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Alors si f et g sont des fonctions de classe C^k de U dans $\mathbb{R}$, alors $[f.g]$ est encore de classe C^k sur U.

De plus, si f ne s'annule pas sur U, alors $\frac{1}{f}$ est encore de classe C^k sur U.

Démonstration :

On va procéder par récurrence que k.

Si f et g sont de classe C^0 sur U, $[f.g]$ est de classe C^0 sur U, comme on l'a déjà vu.

Supposons maintenant le résultat acquis pour : $k \geq 0$, et f et g de classe C^{k+1} sur U.

Alors f et g admettent des dérivées partielles par rapport à toutes leurs variables, et $[f.g]$ aussi.

De plus, en notant : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E, on a :

$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \frac{\partial}{\partial x_i}[f.g] = \frac{\partial f}{\partial x_i}.g + f.\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Or toutes les fonctions qui interviennent dans cette expression sont de classe au moins C^k sur U, donc les produits aussi par hypothèse de récurrence et les sommes d'après le théorème 3.1.

Donc les fonctions dérivées partielles sont de classe C^k sur U, et $[f.g]$ est bien de classe C^{k+1} sur U.

Quand f ne s'annule pas sur U, le traitement de $\frac{1}{f}$ se fait de la même façon.

Théorème 3.3 : de Schwarz

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit U un ouvert de E.

Si f est une fonction de classe C^2 de U dans F, alors, pour tout base $\mathcal{B}$ de E :

$$\forall a \in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$ où les indices de dérivation partielle font référence à la base $\mathcal{B}$.

Plus généralement, si f est de classe C^k de U dans F, avec : $k \geq 2$, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance dans toute dérivée partielle de f d'ordre supérieur ou égal à 2 en tout point de U.

Démonstration : hors programme

• on va commencer par démontrer le résultat pour les fonctions à valeurs réelles et donc on considère f de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$.

Soit : $a \in U$, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base $\mathcal{B}$ de E et : $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$.

On note : $V = \{(h_i,h_j) \in \mathbb{R}^2,\ (a + h_i.e_i + h_j.e_j) \in U\}$.

Soit par ailleurs φ définie de [0,1] dans $\mathbb{R}$ par :

$\varphi(t) = f(a + t.h_i.e_i + h_j.e_j) - f(a + t.h_i.e_i)$.

φ est alors définie, continue et dérivable sur [0,1], et sa dérivée vaut :

$\forall$ t $\in$ [0,1], $\varphi'(t) = h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + t.h_i.e_i + h_j.e_j) - h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + t.h_i.e_i)$.

On peut alors lui appliquer le théorème des accroissements finis, pour obtenir :

$\exists\ \theta_\varphi \in\ ]0,1[$, $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_\varphi) = h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + h_j.e_j) - h_i.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i)$.

Pour cette valeur θ_φ fixée, notons alors ψ la fonction de [0,1] dans ℝ, définie par :

$\forall$ t $\in$ [0,1], $\psi(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + t.h_j.e_j)$.

Elle est également définie, continue et dérivable sur [0,1] et le théorème des accroissements finis à nouveau donne :

$\exists\ \theta_\psi \in\ ]0,1[$, $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta_\psi) = h_j.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + \theta_\psi..h_j.e_j)$.

Globalement, on a donc :

$\varphi(1) - \varphi(0) = (f(a + h_i.e_i + h_j.e_j) - f(a + h_i.e_i)) - (f(a + h_j.e_j) - f(a))$

$= h_i.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + h_j.e_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i)\right)$

$= h_i.(\psi(1) - \psi(0))$

$= h_i.h_j.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + \theta_\psi..h_j.e_j)$.

En intervertissant les rôles de i et de j, on peut également trouver θ'_φ et θ'_ψ dans]0,1[, tels que :

$(f(a + h_i.e_i + h_j.e_j) - f(a + h_j.e_j)) - (f(a + h_i.e_i) - f(a)) = h_i.h_j.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta'_\varphi.h_i.e_i + \theta'_\psi..h_j.e_j)$.

Donc, en divisant par $(h_i.h_j)$, pour : $h_i.h_j \neq 0$, on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta'_\varphi.h_i.e_i + \theta'_\psi..h_j.e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + \theta_\varphi.h_i.e_i + \theta_\psi..h_j.e_j)$$

Enfin, lorsque l'on fait tendre (h_i, h_j) vers (0,0), puisque les deux dérivées partielles secondes sont continues en a, on obtient à la limite : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

• puisque le résultat vient d'être établi pour les fonctions à valeurs réelles, et si f est maintenant de classe C^2 sur U, à valeurs dans F, il est vrai pour toutes ses fonctions composantes dans n'importe quelle base de F (puisqu'elles sont alors elles-mêmes C^2 sur U), donc le résultat reste vrai pour f.
• enfin, pour un ordre de dérivation plus élevé, on peut l'obtenir par exemple par récurrence sur le nombre de dérivations concernées, en utilisant le résultat établi dans le cas des fonctions de classe C^2.

Théorème 3.4 : condition nécessaire d'extremum pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E.
Soit f une fonction de U dans ℝ de classe C^1 sur U.
Si f présente un extremum local ou global en un point a de U, alors a est un point critique de f et on a donc : df(a) = 0.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $\|.\|$ la norme infinie attachée à cette norme.

Puisque U est un ouvert de E, il existe : R > 0, tel que : B(a,R) $\subset$ U.
En particulier : $\forall$ $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\forall\ 1 \leq i \leq n,\ |h_i| < R) \Rightarrow ((a + h_1.e_1 + \dots h_n.e_n) \in U)$.
De plus, si f présente un extremum local en a, on peut considérer, quitte à prendre une valeur de R plus petite que f présente un extremum global en a sur la boule B(a,R).
Puis pour : $1 \leq i \leq n$, la fonction partielle φ_i de]-R,+R[dans ℝ, définie par : $\forall$ t $\in$]-R,+R[, $\varphi_i(t) = f(a + t.e_i)$, présente un extremum en 0.

Donc, puisque de plus φ_i est dérivable en 0, on a : $\varphi_i'(0) = 0$, soit : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Et comme toutes les dérivées partielles de f en a (E étant rapporté à la base $\mathscr{B}$) sont nulles, la différentielle de f en a est bien nulle.

4. Formes différentielles et intégrales curvilignes.

Théorème 4.1 : interprétation d'une forme différentielle en termes de champ de vecteurs

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$), et de degré 1.

Si ω est exacte sur U, alors elle est fermée.

Démonstration :

Si ω est de classe C^1 sur U, alors les composantes de ω (soit P, Q et éventuellement R) sont de classe C^1 sur U.

Si de plus ω est exacte sur U, alors il existe f de classe au moins C^2 de U dans $\mathbb{R}$, telle que : $\omega = df$.

En particulier : $\forall$ a $\in$ U, $P(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, et : $Q(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, (et éventuellement : $R(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$).

Mais puisque f est de classe au moins C^2 sur U, ses dérivées partielles secondes croisées sont égales en tout point de U, ce qui s'écrit : $\forall$ a $\in$ U, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, soit : $\frac{\partial P}{\partial y}(a) = \frac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

Dans le case d'une forme différentielle définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on a également les deux autres égalités qui se déduisent du caractère C^2 de f.

Donc ω est bien fermée.

Théorème 4.2 : de Poincaré, réciproque du théorème 4.1 sur un ouvert étoilé

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ω une forme différentielle de classe C^k (pour un entier : $k \geq 2$, ou : $k = +\infty$), et de degré 1.

Si ω est fermée sur U et si U est étoilé, alors elle est exacte.

Démonstration : hors programme et admis

Pour information, elle utilise une généralisation du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre.

Plus précisément, on montre (dans $\mathbb{R}^2$) que si : $\omega = P.dx + Q.dy$, sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^2$, et si U est étoilé par rapport : $a = (\alpha,\beta)$, alors la fonction F définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ F(x,y) = \int_0^1 [(x-\alpha).P(\alpha + t.(x-\alpha), \beta + t.(y-\beta)) + (y-\beta).Q(\alpha + t.(x-\alpha), \beta + t.(y-\beta))].dt,$$

est telle que : $\omega = dF$, sur U.

Théorème 4.3 et définition 4.5 : intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe

Soient : $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et $([a,b],\varphi)$ un arc paramétré γ dont l'image est incluse dans U.

Soit $([c,d],\psi)$ un paramétrage équivalent et de même sens que $([a,b],\varphi)$, autrement dit tel qu'il existe un C^1-difféomorphisme θ de [a,b] dans [c,d] croissant, vérifiant : $\psi = \varphi o \theta$.

Soit ω une forme différentielle de classe au moins C^1 et de degré 1, définie sur U.

On note par ailleurs : $\omega = P.dx + Q.dy$, $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$, $\psi = (\psi_x, \psi_y)$, avec au besoin une troisième composante si : $E = \mathbb{R}^3$.

Alors : $\int_a^b (P(\varphi(t)).\varphi'_x(t) + Q(\varphi(t)).\varphi'_y(t)).dt = \int_c^d (P(\psi(u)).\psi'_x(u) + Q(\psi(u)).\psi'_y(u)).du$.

On appelle alors intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté $([a,b],\varphi)$, la valeur commune de toutes les intégrales précédentes.

On note alors cette valeur commune $\int_{\gamma^+} \omega$.

Démonstration :

On sait qu'il existe un C^1-difféomorphisme θ de [a,b] dans [c,d], tel que : $\theta(a) = c$, $\theta(b) = d$, et : $\varphi = \psi o \theta$.

Dans l'intégrale $\int_c^d (P(\psi(u)).\psi'_x(u) + Q(\psi(u)).\psi'_y(u)).du$, en effectue alors le changement de variable : $u = \theta(t)$, qui se traduit en particulier par : $du = \theta'(t).dt$.

On obtient alors :

$$\int_c^d (P(\psi(u)).\psi'_x(u) + Q(\psi(u)).\psi'_y(u)).du = \int_a^b (P(\psi o \theta(t)).\psi'_x(\theta(t)) + Q(\psi o \theta(t)).\psi'_y(\theta(t))).\theta'(t).dt.$$

Or : $\psi o \theta = \varphi$, donc également pour les fonctions composantes : $\psi_x = \varphi_x o \theta$, et : $\psi_y = \varphi_y o \theta$, et on reconnaît

également leur dérivée à l'aide de θ'(t).
Autrement dit :

$$\int_a^b (P(\psi o\theta(t)).\psi'_x(\theta(t)) + Q(\psi o\theta(t)).\psi'_y(\theta(t))).\theta'(t).dt = \int_a^b (P(\varphi(t)).\varphi'_x(t) + Q(\varphi(t)).\varphi'_y(t)).dt\,.$$

C'est bien ce qui était annoncé.

Théorème 4.4 : cas d'une forme différentielle exacte

Soient : E = $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de E, et ([a,b],φ) un arc paramétré γ dont l'image est incluse dans U.
Soit ω une forme différentielle de classe au moins C^2 et de degré 1, définie sur U.
Si ω est une forme différentielle exacte sur U, et si f est une primitive de ω sur U, donc telle que : ω = df,
alors : $\int_{\gamma^+} \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(B) - f(A)$,
où on a noté A et B les « extrémités » géométriques de l'arc considéré.
En particulier, si γ est un arc fermé, alors : $\int_{\gamma^+} \omega = 0$.
Enfin, si pour une forme différentielle ω définie sur U, de classe au moins C^2 et de degré 1, on peut trouver un arc paramétré fermé γ tel que : $\int_{\gamma^+} \omega \neq 0$, alors ω n'est pas exacte.

Démonstration :

L'exemple 2.2 (et sa démonstration) ont montré que, si : θ = df, alors l'application : t ↦ foφ(t), définie de [a,b] dans ℝ, est de classe C^1 sur [a,b] et a pour dérivée :

∀ t ∈ [a,b], (foφ)'(t) = df(φ(t))(φ'(t)) = $\frac{d}{dt}[fo\varphi](t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).y'(t)$, où on a noté : φ(t) = (x(t),y(t)), pour tout : t ∈ [a,b].

Donc : $\int_{\gamma^+} \omega = \int_a^b (P(\varphi(t)).\varphi'_x(t) + Q(\varphi(t)).\varphi'_y(t)).dt = \int_a^b (P(\varphi(t)).x'(t) + Q(\varphi(t)).y'(t)).dt$ n et en remplaçant P et Q par les dérivées partielles de f, on obtient :

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).y'(t)\right).dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt}[fo\varphi](t)\right).dt = [fo\varphi(t)]_a^b = fo\varphi(b) - fo\varphi(a)\,.$$

Si l'arc est fermé, on a de plus : φ(a) = φ(b), donc bien : $\int_{\gamma^+} \omega = 0$.
La dernière remarque est la contraposée du résultat qu'on vient d'établir.

5. Intégrales doubles.

Théorème 5.1 : de Fubini, cas d'un rectangle

Soit D un rectangle du plan : D = [a,b]×[c,d], et f une fonction définie et continue sur D.

Alors : $\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y).dy\right).dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y).dx\right).dy$.

En particulier, si f peut se mettre sous la forme : ∀ (x,y) ∈ D, f(x,y) = g(x).h(y), alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b g(x).dx.\int_c^d h(y).dy\,.$$

Démonstration : hors programme et admis

Théorème 5.2 : de Fubini, cas général

Si D est un domaine du plan qui peut se décrire par : D = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$, a ≤ x ≤ b, φ(x) ≤ y ≤ ψ(x)}, et si f est une fonction continue sur D, alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y).dy\right).dx\,.$$

De même, si D peut se décrire par : D = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$, c ≤ y ≤ d, φ(y) ≤ x ≤ ψ(y)}, alors :

$$\iint_D f(x,y).dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y).dx\right).dy\,.$$

Démonstration : hors programme et admis

Exemple : interprétation de l'intégrale d'une fonction de [a,b] dans ℝ en termes de surface

Soit f une fonction définie, continue et positive d'un segment [a,b] inclus dans ℝ à valeurs dans ℝ.

Soit D le domaine limité par les droites de $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique, d'équations :
$y = 0$, $x = a$, $x = b$, et la courbe d'équation : $y = f(x)$.
Alors : $\iint_D dxdy = \int_a^b f(x).dx$.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini à l'ensemble : $D = \{(x,y),\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, et on obtient :

$$\iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right).dx = \int_a^b f(x).dx.$$

Théorème 5.3 : changement de variable
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et D un compact « simple » du plan, tel que : $D \subset U$.
Soit Φ un C^1-difféomorphisme de U sur V.
Soit f une fonction définie et continue sur $\Phi(D)$.
Alors : $\iint_{\Phi(D)} f(x,y).dxdy = \iint_D f(\Phi(u,v)).\left|\det(\mathrm{Jac}(\Phi))\right|.dudv$.

Démonstration : hors programme et admis

Théorème 5.4 : changement de variable polaires-cartésiennes dans une intégrale double
Soit Δ un compact « simple » du plan, décrit en coordonnées cartésiennes et soit D sa description en coordonnées polaires, description injective sauf éventuellement pour le bord de D ou de Δ.
Autrement dit : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $((x,y) \in \Delta) \Leftrightarrow ((\rho,\theta) \in D)$, en posant : $x = \rho.\cos(\theta)$, $y = \rho.\sin(\theta)$.
Soit f une fonction définie et continue sur Δ.
Alors : $\iint_\Delta f(x,y).dxdy = \iint_D f(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)).\rho.d\rho d\theta$.

Démonstration : hors programme et admis
On peut néanmoins remarquer que ρ correspond à la valeur absolue du jacobien du changement de variables polaires-cartésiennes.

Remarque 5.1 : intégrales triples
Les propriétés vues pour les intégrales doubles se généralisent aux intégrales triples, de fonctions continues d'un domaine D de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
En particulier, on retrouve le théorème de Fubini et le principe du changement de variable.

Démonstration : hors programme et admis