Fonctions vectorielles, courbes et surfaces (corrigés).

Continuité, dérivabilité de fonctions vectorielles de variable réelle.

1. a. Il suffit ici de proposer une fonction qui répond au problème, par exemple :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = \begin{pmatrix} -1+2.t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est bien continue de [0,1] dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car ses n^2 fonctions composantes le sont de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
De plus les valeurs en 0 et 1 sont bien celles attendues.

b. Ici la réponse est non.
En effet, si une telle fonction existait on pourrait définir φ, de [0,1] dans $\mathbb{R}$ en posant :
$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = \det(f(t))$.
φ serait alors continue, par composition de f avec $\det$, elle-même continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
De plus on aurait : $\varphi(-1) = \det(f(-1)) = -1$, et : $\varphi(-1) = \det(f(-1)) = 1$.
Donc le théorème des valeurs intermédiaires garantirait l'existence d'une valeur : a $\in$ [0,1], telle que : $\varphi(a) = 0$, autrement dit une valeur où la matrice $f(a)$ ne serait pas inversible.

2. Notons tout d'abord : $\forall t \in I,\ f(t) = x(t) + i.y(t)$, où x et y sont respectivement les parties réelle et imaginaire de f.
f étant supposée dérivable sur I, x et y le sont aussi.
De plus : $\forall t \in I,\ |f(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, et cette fonction est dérivable sur I par opérations.
En effet : $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$, est dérivable de I dans $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de produits de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivable, et f ne s'annulant pas, les valeurs obtenues sont bien dans $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par opérations $|f|$ est bien dérivable sur I.
Puis : $\forall t \in I,\ |f|'(t) = \dfrac{x(t).x'(t) + y(t).y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$.
Par ailleurs : $\forall t \in I,\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{f'(t)}{f(t)}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{f'(t).\overline{f(t)}}{f(t).\overline{f(t)}}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{(x(t).x'(t) + y(t).y'(t)) + i.(x'(t).y(t) + y'(t).x(t))}{x(t)^2 + y(t)^2}\right)$,
et donc : $\forall t \in I,\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{f'(t)}{f(t)}\right) = \dfrac{(x(t).x'(t) + y(t).y'(t))}{x(t)^2 + y(t)^2}$.
Il est alors clair que : ($|f|$ est croissante) $\Leftrightarrow$ ($\forall t \in I,\ x(t).x'(t) + y(t).y'(t) \geq 0$) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Re}\left(\dfrac{f'}{f}\right) \geq 0$).

3. • Toutes les fonctions composantes de la fonction : $t \mapsto C(t) = \alpha.A(t) + B(t)$, sont dérivables sur I, et :
$\forall t \in I,\ c_{i,j}'(t) = \alpha.a_{i,j}'(t) + b_{i,j}'(t)$,
autrement dit : $(\alpha.A + B)' = \alpha.A' + B'$.
• De même, toutes les fonctions composantes de la fonction : $t \mapsto C(t) = (A(t).B(t))$, sont dérivables sur I et : $\forall t \in I,\ c_{i,j}'(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right)'(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k}'(t).b_{k,j}(t) + a_{i,k}(t).b_{k,j}'(t))$,
autrement dit : $(A.B)' = a'.B + A.B'$.
• On montre de la même façon que : $({}^tA)' = {}^tA'$, que : $(tr(A))' = tr(A')$, et que : $(\overline{A})' = \overline{A'}$.
On peut aussi dans ces trois cas indiquer qu'on compose une fonction dérivable φ de I dans $\mathbb{R}$ avec une application $\mathbb{R}$-linéaire u et que donc dans chaque cas : $(uo\varphi)' = uo\varphi'$.
• Pour cette dernière fonction, on peut utiliser des développements limités de chaque colonne de la fonction matricielle A.

En effet, en notant $C_1, \dots, C_n$ ces colonnes, elles sont toutes dérivables de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque leurs composantes sont elles-mêmes dérivables sur I du fait de la dérivabilité de A sur I.
Puis : $\forall t \in I$, $\forall h \in \mathbb{R}$, tel que : $(t+h) \in I$, on a :

$$\det(A(t+h)) = \det(C_1(t) + h.C_1'(t) + h.\varepsilon_1(h), \dots, C_n(t) + h.C_n'(t) + h.\varepsilon_n(h)).$$

Si on développe alors cette expression, on obtient plusieurs termes :
- on conserve tous les termes C_i : $\det(C_1(t), \dots, C_n(t)) = \det(A(t))$,
- on conserve tous les termes C_i sauf 1 : $\sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), h.C_i'(t) + h.\varepsilon_i(h), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t))$,

ou : $h.\sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t)) + h.\sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), \varepsilon_i(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t))$,

et la deuxième somme tend vers 0 quand h tend vers 0 du fait des fonctions ε_i,
- on conserve moins de (n – 2) termes C_i.

Dans toutes les expressions qui apparaissent il y a alors au moins deux places où on peut factoriser par h.
Une fois factorisées par h^2, les expressions restantes (soit $\theta(h)$) tendent vers 0 ou ont une limite finie.

Donc : $\det(A(t+h)) = \det(A(t)) + h.\sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t)) + h.\varepsilon(h) + h^2.\theta(h)$.

Si enfin, on calcule la limite du taux d'accroissement, on aboutit à :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\det(A(t+h)) - \det(A(t))}{h} = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t)),$$

autrement dit la fonction $\det(A)$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I$, $(\det(A))' = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \dots, C_n)$.

4. Raisonnons par l'absurde.
Si f s'annule une infinité de fois sur [a,b], alors on peut construire une suite de valeurs, toutes distinctes, incluse dans [a,b].
De cette suite, on peut en extraire une suite (x_n) convergente et cette suite vérifie donc :
   - $\forall n \neq p$, $x_n \neq x_p$,
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$,
   - $\exists \alpha \in [a,b]$, $\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n$, et :
   - α est distinct de tous les termes de la suite (et peut être égal à un seul d'entre eux).

   Puisque f est continue sur [a,b], elle l'est en particulier en α, et : $0 = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$.

   De plus : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\alpha \neq x_n$, et : $\dfrac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} = 0$.

   Or puisque f est dérivable en α, on a aussi : $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$.

   Donc comme (x_n) tend vers α, on en déduit que : $f'(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} = 0$.

   Finalement, on a donc : $\|f(\alpha)\|^2 + \|f'(\alpha)\|^2 = 0$, ce qui est impossible.
   f ne s'annule donc au plus qu'un nombre fini de fois sur [a,b].

5. Notons g la fonction proposée, définie donc par : $\forall x \geq a$, $g(x) = e^{-2.\lambda.x}.|f(x)|^2 = e^{-2.\lambda.x}.f(x).\overline{f(x)}$.
Par opérations, g est alors dérivable sur $[a,+\infty)$, et :
$\forall x \geq a$, $g'(x) = -2.\lambda.e^{-2.\lambda.x}.|f(x)|^2 + e^{-2.\lambda.x}.(f'(x).\overline{f(x)} + f(x).\overline{f'(x)})$, car l'application : $z \mapsto \overline{z}$, est $\mathbb{R}$-linéaire dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
On peut aussi regarder à la main la dérivée de : $x \mapsto \overline{f(x)}$, à l'aide des parties réelle et imaginaire.
On en déduit donc que :
$\forall x \geq a$, $g'(x) = -2.\lambda.e^{-2.\lambda.x}.|f(x)|^2 + 2.e^{-2.\lambda.x}.\mathrm{Re}(f'(x).\overline{f(x)}) \leq 2.e^{-2.\lambda.x}.(-\lambda.|f(x)|^2 + |f'(x).\overline{f(x)}|)$, ce qui

entraîne : ∀ x ≥ a, $g'(x) \leq 2.e^{-2.\lambda.x}.\left|f(x)\right|(\left|f'(x)\right| - \lambda.\left|f(x)\right|)$, puisque : ∀ x ≥ a, $\left|f(x)\right| = \left|\overline{f(x)}\right|$.

Finalement : ∀ x ≥ a, $g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur [a,+∞), et puisque : $g(a) = e^{-2.\lambda.a}.\left|f(a)\right|^2 = 0$, elle reste négative sur [a,+∞).

Comme il est de plus immédiat que g est positive sur cet intervalle, g est donc nulle.

Conclusion : ∀ x ≥ a, $e^{-2.\lambda.x}.\left|f(x)\right|^2 = 0$, soit : $f(x) = 0$.

6. Puisque le mouvement est circulaire on a : ∀ t ∈ I, $\overrightarrow{OM(t)} \neq \vec{0}$, sinon le point est immobile en O.

   Donc : ∀ t ∈ I, ∃ λ(t) ∈ ℝ, $\overrightarrow{a(t)} = \lambda(t).\overrightarrow{OM(t)}$.

   Puis : ∃ C ∈ ℝ, ∀ t ∈ I, $\left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|^2 = (\overrightarrow{OM(t)}|\overrightarrow{OM(t)}) = C$, et en dérivant : $2.(\overrightarrow{v(t)}|\overrightarrow{OM(t)}) = 0$.

   Si alors $\overrightarrow{a(t)}$ est non nulle, alors λ(t) aussi et on en déduit : $\frac{2}{\lambda(t)}.(\overrightarrow{v(t)}|\overrightarrow{a(t)}) = 0$, donc : $(\overrightarrow{v(t)}|\overrightarrow{a(t)}) = 0$, et si $\overrightarrow{a(t)}$ est nulle, cette dernière relation est encore vérifiée.

   Donc : ∀ t ∈ I, $(\overrightarrow{v(t)}|\overrightarrow{a(t)}) = 0$.

   On en déduit que la dérivée de la fonction : t ↦ $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|^2$, est nulle puisqu'elle vaut $2.(\overrightarrow{v(t)}|\overrightarrow{a(t)})$.

   Donc cette dernière fonction est constante, tout comme $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|$ et le mouvement est uniforme.

Courbes en cartésiennes.

7. a. Cette première courbe correspond à la fonction f définie sur ℝ par : ∀ x ∈ ℝ, $f(x) = \sqrt[3]{x^2.(x-6)}$.

   Elle y est continue et elle est dérivable sur ℝ \ {0,6}.

   De plus : ∀ x ∈ ℝ \ {0,6}, $f'(x) = \frac{1}{3}.(x^2.(x-6))^{-\frac{2}{3}}.(3.x^2 - 12.x) = \frac{x.(x-4)}{\sqrt[3]{x^2.(x-6)}^2}$.

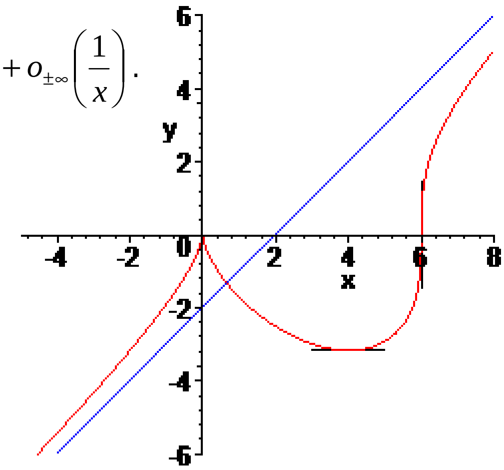
   f est donc croissante sur ℝ⁻, décroissante sur]0,4[, puis à nouveau croissante sur]4,+∞).

   En 4, f présente un minimum local où elle vaut : $f(4) = -2.\sqrt[3]{4}$.

   Pour x tendant vers ±∞, f(x) tend vers ±∞, donc la courbe Γ présente deux branches infinies.

   De plus on a en ±∞ :

$$f(x) = x.\sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} = x.\left(1 - \frac{1}{3}.\frac{6}{x} - \frac{2}{9}.\frac{1}{2!}.\frac{36}{x^2} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - 2 - \frac{4}{x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$



   Autrement dit la courbe admet pour asymptote la droite Δ d'équation : $y = x - 2$, et la courbe se situe au-dessous (respectivement au-dessus) de Δ en +∞ (respectivement. -∞).

   Enfin aux points où f n'est pas dérivable, on constate que :

   - $\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty$, et la courbe présente en ce point une tangente verticale,
   - $\lim_{x \to 6^\pm} f'(x) = +\infty$, et la courbe présente encore en ce point une tangente verticale.

   On peut alors proposer ce tracé :

   b. La seconde courbe correspond à la fonction f définie sur ℝ* par : ∀ x ∈ ℝ*, $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

   f est alors continue et dérivable sur ℝ*, et : ∀ ∈ ℝ*, $f'(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}.e^{\frac{1}{x}}\right).\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2}$.

   Si on note φ la fonction qui apparaît dans la parenthèse, on a ensuite : ∀ ∈ ℝ*, $\varphi'(x) = -\frac{1 + 2.x}{x^3}.e^{\frac{1}{x}}$.

On en déduit que φ est décroissante sur $]-\infty,-\frac{1}{2}[$, avec : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-e^{-2}>0$, puis croissante sur $]-\frac{1}{2},0[$, et enfin décroissante sur $]0,+\infty)$, avec : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Donc φ reste positive sur ℝ* et f' aussi.
f est donc croissante sur ℝ⁻* et sur ℝ⁺*.
Puis, on a en ±∞ :

$$f(x)=x.\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}=x.\left(2++\frac{1}{x}+\frac{1}{2.x^2}+\frac{1}{6.x^3}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-1}=\frac{x}{2}.\left(1+\frac{1}{2.x}+\frac{1}{4.x^2}+\frac{1}{12.x^3}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-1},$$

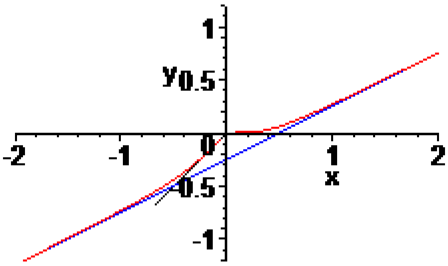
et donc : $f(x)=\frac{x}{2}.\left(1-\frac{1}{2.x}+\frac{1}{48.x^3}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48.x^2}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

La courbe admet donc une asymptote d'équation : $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$, et la courbe se situe au-dessus de cette droite en ±∞.

Enfin, on peut prolonger la fonction en 0 en posant :
$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,
puis on constate que :

- $f'(x)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}.e^{\frac{1}{x}}.e^{\frac{-2}{x}}\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}}\xrightarrow[0^+]{}0$,
- $f'(x)\xrightarrow[0^-]{}1$,

autrement dit la courbe présente deux demi-tangentes en ce point (qu'on qualifie d'anguleux).
On peut alors proposer le tracé suivant :



Courbes paramétrées.

8. a. L'arc paramétré correspond à une fonction de classe C^1 définie de ℝ* dans $ℝ^2$.
Il n'y a pas de réduction apparente du domaine d'étude.
On constate que l'arc présente 4 branches infinies :

• lorsque t tend vers 0^+, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers +∞.

De plus : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=+\infty$, et la courbe présente une branche parabolique de direction 0y.

• lorsque t end vers 0^-, $x(t)$ tend vers -∞ et $y(t)$ tend vers +∞.

De plus : $\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{1}{t}=-\infty$, et la courbe présente une branche parabolique de direction 0y.

• quand t tend vers ±∞, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers ±∞.

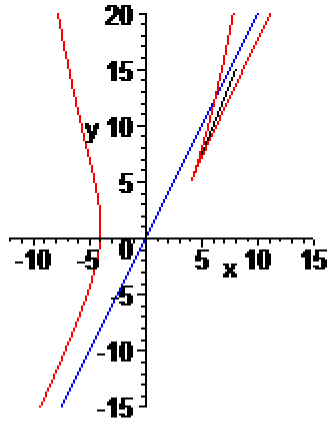
De plus : $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=2$, et : ∀ t ∈ ℝ*, $y(t)-2.x(t)=\frac{3}{t^2}-\frac{6}{t}\underset{\pm\infty}{\sim}-\frac{6}{t}$.

Donc la courbe admet pour asymptote la droite d'équation : $y-2.x=0$, et se situe au-dessous (respectivement au-dessus) de cette asymptote en +∞ (respectivement -∞).

Enfin : ∀ t ∈ ℝ*, $\begin{cases} x'(t)=3.t^2-\frac{3}{t^2}=\frac{3}{t^2}.(t^4-1). \\ y(t)=6.t^2-\frac{6}{t^3}=\frac{6}{t^3}.(t^5-1). \end{cases}$

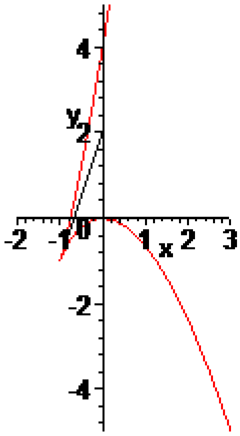
On en déduit les variations de x et de y et notamment le fait que tous les points sont réguliers sauf celui correspondant à : t = 1, qui a pour coordonnées (4,5).
Puis : ∀ h ≠ 0,

- $x(1+h)=(1+h)^3+\frac{3}{1+h}=4+6.h^2+o_0(h^2)$, et :



- $y(1+h) = 2.(1+h)^3 + \dfrac{3}{(1+h)^2} = 5 + 15.h^2 + o_0(h^2)$.

Donc : ∀ h ≠ 0, $\overrightarrow{m(1)m(1+h)} = 3.h^2.(2.\vec{i} + 5.\vec{j}) + \overrightarrow{o(h^2)}$, et la direction limite de la corde en ce point joignant m(1) à m(t) est donc : $2.\vec{i} + 5.\vec{j}$.
La courbe présente donc au point m(1) une tangente dirigée par le vecteur précédent.
On en déduit le tracé de la courbe.



b. L'arc paramétré correspond à une fonction de classe C^1 définie de ℝ dans ℝ^2.
Il n'y a pas de réduction apparente du domaine d'étude.
On constate que l'arc présente 2 branches infinies :
- lorsque t tend vers +∞, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers +∞,
- lorsque t tend vers -∞, $x(t)$ tend vers +∞ et $y(t)$ tend vers -∞.

De plus : $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, et la courbe présente deux branches paraboliques de direction Oy.

Enfin : ∀ t ∈ ℝ, $\begin{cases} x'(t) = 2.t \\ y(t) = 6.t^2 + 6.t \end{cases}$, et on en déduit que tous les points sont réguliers sauf celui correspondant à : t = 0, qui a pour coordonnées (-1,-1).
On en déduit aussi les variations de x et de y en fonction de t.
Pour le point non régulier :

∀ h ≠ 0, $\overrightarrow{m(0)m(0+h)} = h^2.(\vec{i} + 3.\vec{j}) + \overrightarrow{o(h^2)}$,

et la direction limite de la corde en ce point joignant m(0) à m(t) donc : $\vec{i} + 3.\vec{j}$.
La courbe présente donc en ce point une tangente dirigée par le vecteur précédent.
On termine avec le tracé de la courbe.

c. L'arc paramétré correspond à une fonction de classe C^1 définie de ℝ dans ℝ^2.
Il n'y a pas de réduction apparente du domaine d'étude.
On constate que l'arc présente 2 branches infinies :
- lorsque t tend vers ±∞, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers ±∞,
- lorsque t tend vers -∞, $x(t)$ tend vers et $y(t)$ tendent vers +∞,

De plus : $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$, et la courbe présente une direction asymptotique suivant la droite Δ : $y = x$.

Puis : $y(t) - x(t) = -t + \arctan(t) + t.\left(1 + \dfrac{2}{t^3}\right).\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)^{-1} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(\dfrac{1}{t}) - t + t.\left(1 - \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t^3} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)\right)$,

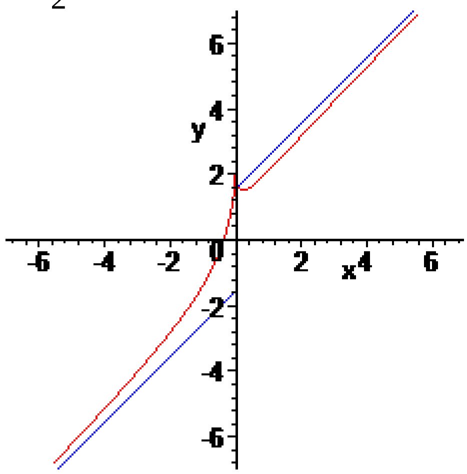
d'où : $y(t) - x(t) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{t} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right) - \dfrac{1}{t} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{t} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et : $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(y(t) - x(t)) = \dfrac{\pi}{2}$.

La courbe admet donc pour asymptote la droite Δ d'équation : $y - x = \dfrac{\pi}{2}$, et elle se situe à l'infini en-dessous de l'asymptote.

De même, et à l'aide de : ∀ t > 0, $\arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$,

on montre que la droite Δ' d'équation :

$y - x = -\dfrac{\pi}{2}$, est asymptote à la courbe, celle-ci se situant en -∞ au-dessus de l'asymptote.

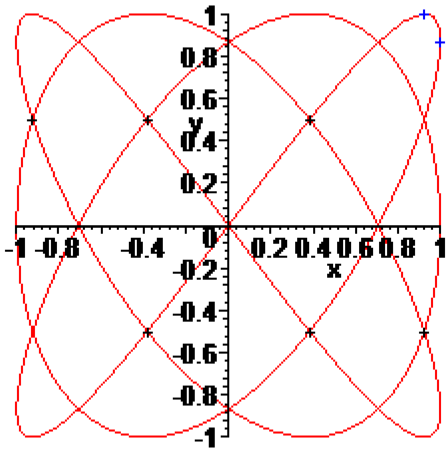


Enfin : ∀ t ∈ ℝ, $\begin{cases} x'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \\ y(t) = \dfrac{t^4 + 3.t^2 - 4.t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{t.(t-1).(t^2 - 3.t + 4)}{(t^2+1)^2}. \end{cases}$

Tous les points sont donc réguliers sauf celui correspondant

à : t = 0, qui a pour coordonnées (0,2).
En ce point, on a : ∀ h ≠ 0, $\overrightarrow{m(0)m(0+h)} = h^2.(-2.\vec{j}) + o(h^2)$, et la direction limite de la corde en ce point joignant m(0) à m(t) est donc : $(-2.\vec{j})$.
La courbe présente donc en ce point une tangente dirigée par le vecteur précédent (tangente verticale).
On termine avec le tracé de la courbe.

d. L'arc paramétré correspond à une fonction de classe C^1 définie de ℝ dans $ℝ^2$.
Cette fonction est évidemment 2π-périodique : il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2.π pour avoir le tracé complet.
De plus en changeant t en –t, on constate que m(-t) est symétrique de m(t) par rapport à l'origine.
Il suffit donc d'étudier la courbe sur [0,π] : la remarque précédente permet de récupérer géométriquement le tracé sur [-π,0] par symétrie par rapport à O et cela redonne l'équivalent de l'étude sur [-π,+π] qui est bien un intervalle de longueur 2.π.
Enfin, si on change t en (π – t), on constate que m(π –t) est symétrique de m(t) par rapport à l'axe Ox.
Donc il suffit de faire l'étude sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et de compléter par symétrie par rapport à Ox.



La courbe ne présente pas de branche infinie
De plus : ∀ t ∈ $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\begin{cases} x'(t) = 3.\cos(3.t) \\ y'(t) = 4.\cos(4.t) \end{cases}$, et tous les points sont réguliers car :

$$\forall\, t \in [0,\frac{\pi}{2}],\ (x'(t) = 0) \Leftrightarrow (3.t = \frac{\pi}{2}, \text{ ou : } 3.t = \frac{3.\pi}{2})$$
$$\Leftrightarrow (t = \frac{\pi}{6}, \text{ ou : } t = \frac{\pi}{2}),$$

et en ces deux valeurs, y' ne s'annule pas.
Le premier point où la tangente à la courbe est horizontale est déterminé par : $y'(t) = 0$, ce qui donne : $t = \frac{\pi}{8}$, et qui correspond au point de coordonnées $\left(\sin\left(\frac{3.\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{4.\pi}{8}\right)\right)$ soit environ (0.92,1).

Le premier point où la tangente à la courbe est verticale correspond à : $x'(t) = 0$, soit : $t = \frac{\pi}{6}$,et on obtient le point de coordonnées $\left(\sin\left(\frac{3.\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{4.\pi}{6}\right)\right)$ ou encore $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et environ : (1, 0.87).

Remarque : les points correspondants sont marqués d'une croix bleue sur le tracé précédent.
On peut tracer ensuite la courbe et constater qu'il y a des points multiples.
Pour trouver ces points multiples, on pose alors le problème :
trouver les couples (t,t'), tels que : 0 ≤ t' < t < 2.π, $x(t) = x(t')$, et : $y(t) = y(t')$.
La première équation est équivalente à : $3.t = 3.t' + 2.k.\pi$, ou : $3.t = \pi - 3.t' + 2.k.\pi$, avec : k ∈ ℤ.
Le premier cas donne alors : $t = t' + \frac{2.k.\pi}{3}$, avec : 1 ≤ k ≤ 2, vu les conditions imposées sur t et t'.
Si on reporte dans la deuxième équation, on obtient :

- pour : k = 1, $t = t' + \frac{2.\pi}{3}$, et : $\sin(4.t' + \frac{8.\pi}{3}) = \sin(4.t')$, donne encore deux possibilités :

  - soit : $4.t' + \frac{8.\pi}{3} = 4.t' + 2.p.\pi$, avec : p ∈ ℤ, ce qui ne donne aucune solution,
  - soit : $4.t' + \frac{8.\pi}{3} = \pi - 4.t' + 2.p.\pi$, avec : p ∈ ℤ, soit : $t' = -\frac{5.\pi}{24} + \frac{p.\pi}{4} = \frac{(6.p-5).\pi}{24}$, $t = \frac{(6.p+11).\pi}{24}$.

En rappelant : 0 ≤ t' < t < 2.π, on constate que p doit vérifier $(6.p - 5 \geq 0)$ et $(6.p + 11 \leq 48)$, soit 6 possibilités pour p : p ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}, qui donnent 6 couples solutions pour (t,t') :

$\left(\dfrac{17.\pi}{24},\dfrac{\pi}{24}\right)$, $\left(\dfrac{23.\pi}{24},\dfrac{7.\pi}{24}\right)$, $\left(\dfrac{29.\pi}{24},\dfrac{13.\pi}{24}\right)$, $\left(\dfrac{35.\pi}{24},\dfrac{19.\pi}{24}\right)$, $\left(\dfrac{41.\pi}{24},\dfrac{25.\pi}{24}\right)$, $\left(\dfrac{47.\pi}{24},\dfrac{31.\pi}{24}\right)$.

Remarque : les points correspondants sont marqués d'une croix noire sur le tracé précédent.

- pour : k = 1, $t = t'+\dfrac{8.\pi}{3}$, et : $\sin(4.t'+\dfrac{32.\pi}{3}) = \sin(4.t')$, donne encore deux possibilités :

  - soit : $4.t'+\dfrac{32.\pi}{3} = 4.t'+2.p.\pi$, avec : p ∈ ℤ, ce qui ne donne aucune solution,
  - soit : $4.t'+\dfrac{32.\pi}{3} = \pi - 4.t'+2.p.\pi$, (p ∈ ℤ), soit : $t' = -\dfrac{29.\pi}{24}+\dfrac{p.\pi}{4} = \dfrac{(6.p-29).\pi}{24}$, $t = \dfrac{(6.p+35).\pi}{24}$.

En rappelant : 0 ≤ t' < t < 2.π, on constate que p doit vérifier ($6.p-29 \geq 0$) et ($6.p+35 \leq 48$), soit 6 possibilités pour p : p ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}, qui donnent 6 couples solutions pour (t,t') :

Le deuxième cas donne : $t = -t'+\dfrac{(2.k+1).\pi}{3}$, avec k tel que : 0 ≤ k ≤ 5, pour garantir que : $t+t' \leq 4.\pi$.

L'étude détaillée de tous ces cas fournit les 11 points doubles manquants.

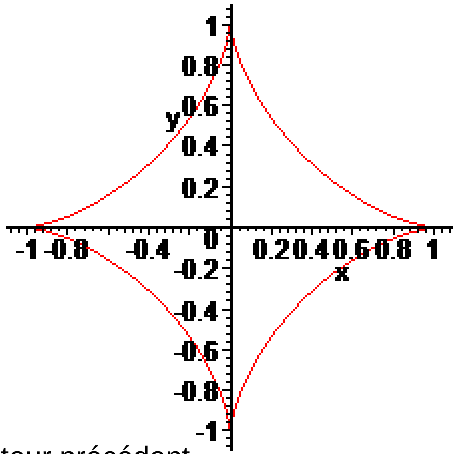
Remarque : cette courbe fait partie de la famille des courbes dites « de Lissajous ».

9. a. La fonction qui définit cet arc paramétré est définie sur ℝ.

Elle est 2.π-périodique et en changeant t en –t, puis en π – t, on restreint l'intervalle d'étude à $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ et on complète le tracé par symétrie par rapport à Oy puis Ox.

L'arc ne présente pas de branche infinie et :

∀ t ∈ $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $\begin{cases} x'(t) = -3.a.\sin(t).\cos^2(t) \\ y(t) = 3.a.\cos(t).\sin^2(t) \end{cases}$.



Tous les points sont réguliers sauf ceux correspondant à :

$t = 0$, et : $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Au voisinage de m(0), on peut écrire :

∀ h ≠ 0, $\overrightarrow{m(0)m(0+h)} = h^2.(-\dfrac{3}{2}.\vec{i}) + \overrightarrow{o(h^2)}$, et la direction limite de la corde en ce point joignant m(0) à m(t) est donc : $(-\vec{i})$.

La courbe présente donc en ce point une tangente dirigée par le vecteur précédent.

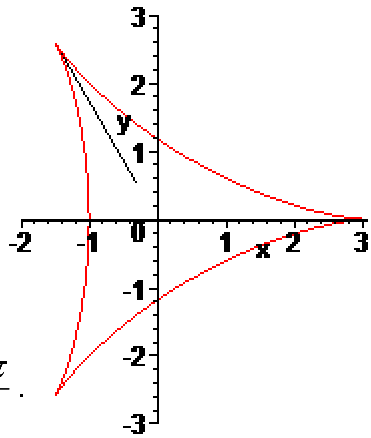
L'étude pour : $t = \dfrac{\pi}{2}$, est similaire et conduit à une tangente verticale.

On termine avec le tracé de la courbe.

b. La fonction qui définit cet arc paramétré est définie sur ℝ.

Elle est 2.π-périodique et en changeant t en –t, on restreint l'intervalle d'étude à [0,π] et on complète le tracé par symétrie par rapport à Ox.

L'arc ne présente pas de branche infinie et :



∀ t ∈ $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $\begin{cases} x'(t) = -2.\sin(t)+2.\sin(2.t) = 2.\sin(t).(-1+2.\cos(t)) \\ y(t) = 2.\cos(t)-2.\cos(2.t) = 2.(1-\cos(t)).(2.\cos(t)-1) \end{cases}$.

Tous les points sont réguliers sauf ceux correspondant à : $t = 0$, et : $t = \dfrac{2.\pi}{3}$.

Au voisinage de m(0), on peut écrire :

∀ h ≠ 0, $\overrightarrow{m(0)m(0+h)} = h^2.(-3.\vec{i}) + \overrightarrow{o(h^2)}$, et la direction limite de la corde en ce point joignant m(0) à m(t) est donc : $(-\vec{i})$.

La courbe présente donc en ce point une tangente dirigée par le vecteur précédent.

Pour : $t = \dfrac{2.\pi}{3}$, on a : $x\left(\dfrac{2.\pi}{3}+h\right) = 2.\cos\left(\dfrac{2.\pi}{3}+h\right)+\cos\left(\dfrac{4.\pi}{3}+2h\right) = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3.h^2}{2}+o_0(h^2)$, de même :

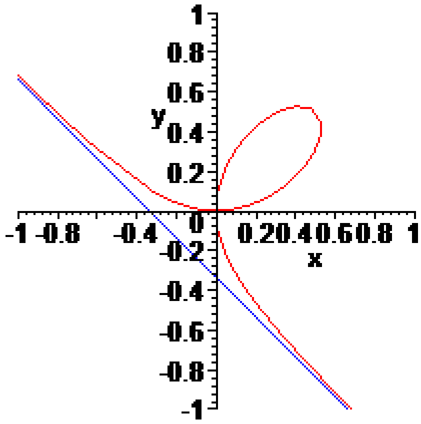
$$y\left(\frac{2.\pi}{3}+h\right)=2.\sin\left(\frac{2.\pi}{3}+h\right)-\sin\left(\frac{4.\pi}{3}+2h\right)=\frac{3.\sqrt{3}}{2}-\frac{3.\sqrt{3}}{2}.h^2+o_0(h^2),$$

et donc : $\overrightarrow{m\left(\frac{2.\pi}{3}\right)m\left(\frac{2.\pi}{3}+h\right)}=h^2.(\frac{3}{2}.\vec{i}-\frac{3.\sqrt{3}}{2}.\vec{j})+\overrightarrow{o(h^2)}$.

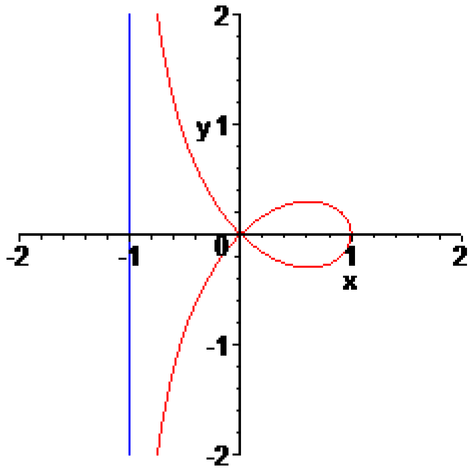
La direction limite de la corde en ce point joignant $m\left(\frac{2.\pi}{3}\right)$ à m(t) est donc : $\vec{i}-\sqrt{3}.\vec{j}$ $(-\vec{i})$.

La courbe présente donc en ce point une tangente dirigée par le vecteur précédent.
On termine avec le tracé de la courbe.

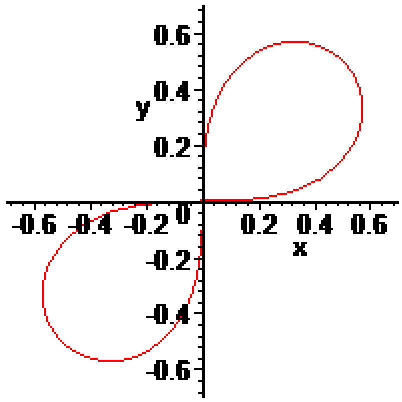
c. Le folium de Descartes présente une symétrie qu'on constate a posteriori en changeant t en $\frac{1}{t}$, ce qui permet de réduire l'étude à l'intervalle]-1,+1[, et qui donne lieu à une symétrie par rapport à la première bissectrice.
La courbe admet une asymptote (quand t tend vers -1) qui est la droite d'équation : $y=-x-\frac{1}{3}$.
Tous les points sont réguliers.
Elle présente également un point limite (lorsque t tend vers ±∞), et la tangente en ce point est verticale.



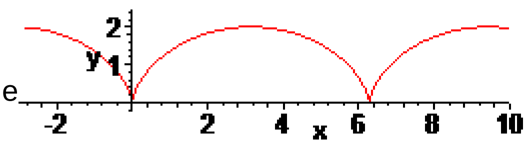
d. La strophoïde droite présente une symétrie par rapport à l'axe Ox, qu'on constate en changeant t en –t
et ce qui permet de réduire son étude à l'intervalle $\mathbb{R}^+$.
Elle admet une asymptote (quand t tend vers ±∞) d'équation : $x=-1$.



e. La lemniscate de Bernoulli présente une symétrie par rapport à l'origine qu'on constate en changeant t en –t.
On peut ainsi réduire l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$.
Elle présente une seconde symétrie, par rapport cette fois à la première bissectrice, qu'on constate en changeant t en $\frac{1}{t}$, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à [0,1].
Tous les points sont réguliers et elle n'admet pas d'asymptote.
Si on fait l'étude sur $\mathbb{R}^+$, on constate que l'origine est un point limite (qui devient ainsi un point double) et en ce point (lorsque t tend vers +∞), la tangente et alors verticale.



f. La cycloïde de droite (ou simplement « cycloïde ») présente une pseudo-périodicité puisque lorsque l'on change t en (t + 2.π),
le point m(t + 2.π) est le translaté du point m(t) par la translation de vecteur $2.\pi.\vec{i}$.
On peut ainsi ramener l'étude à un intervalle de longueur 2.π.
De plus, lorsque l'on change t en –t, on constate que la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe Oy.
On réduit donc finalement l'étude à l'intervalle [0,π].
Sur cet intervalle, on constate que tous les points sont réguliers sauf celui correspondant à : $t=0$, qui se trouve à l'origine, et en lequel on montre que la tangente est verticale.
Il n'y a pas de branche infinie dans les catégories décrites dans le cours mais bel et bien malgré tout une branche infinie, puisque $x(t)$ tend vers ±∞ quand t tend vers ±∞.



Problème géométrique sur ou conduisant à une courbe.

10. a. On peut commencer par écrire :
∀ M(x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$,
(M ∈ Γ) ⇒ ($x+y-z=0$, et : $(x+y)^2-x.y-1=0$) ⇒ ($x+y-z=0$, et : $x^2+y^2+x.y-1=0$), et :

(M $\in \Gamma$) $\Rightarrow$ ($x+y-z=0$, et : $x^2+y^2+(z^2-1)-1=0$) $\Rightarrow$ ($x+y-z=0$, et : $x^2+y^2+z^2=2$).

La réciproque de cette implication s'obtient avec :

($x+y-z=0$, et : $x^2+y^2+z^2=2$) $\Rightarrow$ ($x+y-z=0$, et : $x^2+y^2+(x+y)^2=2$), et la deuxième équation s'écrit encore : $2.x^2+2.y^2+2.x.y=2$, c'est-à-dire : $2-z^2=x^2+y^2=1-x.y$, soit finalement : $z^2-x.y-1=0$.

Donc Γ est bien l'intersection du plan d'équation : $x+y-z=0$,et de la sphère centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{2}$ d'équation : $x^2+y^2+z^2=2$.

Donc Γ est bien un cercle inclus dans le plan.

b. La droite passant par O (le centre de la sphère) et orthogonale au plan est l'ensemble des points M(x,y,z) du plan tels que $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, autrement dit tels que :

$\exists$ t $\in$ ℝ, $\overrightarrow{OM}=t.\vec{u}$, et donc tels que : $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$.

Le centre Ω du cercle est l'intersection de cette droite et du plan, et s'obtient avec : $t+t-(-t)=0$, soit : $t=\frac{1}{3}$, et donc : $\Omega\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Le rayon R s'obtient lui avec un point A du cercle en calculant AΩ ou avec le théorème de Pythagore puisque le triangle OAΩ est rectangle en Ω et donc : $1^2=O\Omega^2+R^2$.

Comme : $O\Omega^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$, on en déduit que : $R=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. a. On peut représenter cette hyperbole comme une courbe paramétrée avec : $\forall$ t $\in$ ℝ*, $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\frac{a^2}{t} \end{cases}$.

Tous les points sont alors réguliers et la tangente T(t) en m(t) est dirigée par : $\overrightarrow{f'(t)}=\left(1,-\frac{a^2}{t^2}\right)$.

La projection de O sur cette tangente est le point H de T(t) tel que $\overrightarrow{OH}$ soit orthogonal à T(t).

Or : (M(x,y) $\in$ T(t)) $\Leftrightarrow$ ($\det(\overrightarrow{m(t)M},\overrightarrow{f'(t)})=0$) $\Leftrightarrow$ ($\begin{vmatrix} x-t & 1 \\ y-\frac{a^2}{t} & -\frac{a^2}{t^2} \end{vmatrix}=0$) $\Leftrightarrow$ ($a^2.x+t^2.y-2.a^2.t=0$).

Donc H(x,y) est le point qui vérifie : $a^2.x+t^2.y-2.a^2.t=0$, et : $0=(\overrightarrow{OH}|\overrightarrow{f'(t)})=x-\frac{a^2}{t^2}.y$.

On obtient donc : ($x=\frac{2.a^4.t}{a^4+t^4}$, $y=\frac{2.a^4.t^3}{a^4+t^4}$).

b. Quand t parcourt ℝ*, ou obtient une nouvelle courbe paramétrée qui est une lemniscate de Bernoulli (voir exercice 9.e).

Courbes implicites.

12. a. Si on note : $\forall$ (x,y) $\in$ ℝ², $f(x,y)=y^3-y+2.x^2-x$, f est alors de classe C¹ sur ℝ², et :

$\forall$ (x,y) $\in$ ℝ², $\overrightarrow{grad}(f)(x,y)=(4.x-1,\ 3.y^2-1)$,

et ce gradient ne s'annule que pour : $(x,y)=\left(\frac{1}{4},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Or ces deux points n'appartiennent pas à Γ comme on le vérifie immédiatement.

Donc tous les points de Γ sont réguliers et au point $m_0(x_0,y_0)$ de Γ, la tangente à Γ a pour équation :

$(x-x_0).(4.x_0-1)+(y-y_0).(3.y_0^2-1)=0$.

b. On peut également constater que : $\forall$ (x,y) $\in$ ℝ², ($0=y^3-y+2.x^2-x$), correspond à une équation du second degré en x qui a pour discriminant : $\Delta = 1 - 8.(y^3 - y)$.

Pour les valeurs de y pour lesquelles ce discriminant est positif, on a alors :

$(f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 8.(y^3 - y)}}{4})$, soit la réunion des courbes annoncées.

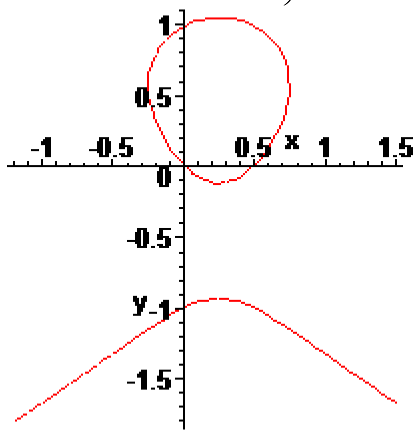
c. La tangente à la courbe d'équation : $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 8.(y^3 - y)}}{4}$, en $m_0(x_0,y_0)$ a pour vecteur directeur :

$\overrightarrow{u_0} = \left(\dfrac{-3.y_0^2 + 1}{2.\sqrt{1 - 8.(y_0^3 - y_0)}}\right).\vec{i} + \vec{j}$, sauf aux points où la racine s'annulent, auquel cas la tangente est alors horizontale.

• Lorsque la racine s'annule, on a : $y_0^3 - y_0 = \dfrac{1}{8}$, et : $x_0 = \dfrac{1}{4}$, et en un tel point, la tangente trouvée à la question a a alors pour équation : $(y - y_0).(3.y_0^2 - 1) = 0$, soit : $y = y_0$, car : $y_0 \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire bien une tangente horizontale.

• Sinon, on disposait à la question a d'un vecteur orthogonal à la tangente avec le gradient et on constate que : $(\overrightarrow{u_0} | \overrightarrow{grad}(f)(x_0 y_0)) = \left(\left(\dfrac{-3.y_0^2 + 1}{2.\sqrt{1 - 8.(y_0^3 - y_0)}}\right).\vec{i} + \vec{j} \middle| (4.x_0 - 1).\vec{i} + (3.y_0^2 - 1).\vec{j}\right)$, d'où :

$(\overrightarrow{u_0} | \overrightarrow{grad}(f)(x_0 y_0)) = (-3.y_0^2 + 1) + (3.y_0^2 - 1) = 0$.



Le vecteur $\overrightarrow{u_0}$ fournit bien une direction orthogonale au gradient donc dans la direction de la tangente trouvée à la question a.

Comme de plus, ces deux droites passent par le même point, elles sont identiques.

Le raisonnement mené ici s'adapte dans le cas où on retient le signe – dans l'expression de x.

d. Le tracé de Γ correspond à peu près à la courbe ci-contre.

13. a. Notons :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^7 + 3.x^2.y^2 + 2.y^3$, où f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7.x^6 + 6.x.y^2$, et : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6.x^2.y + 6.y^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annule si et seulement si : $y = 0$, ou : $y = -x^2$, et dans ces deux cas, on a :

• si : $y = 0$, alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7.x^6$, qui s'annule si et seulement si : $x = 0$.

• si : $y = -x^2$, alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 7.x^6 + 6.x^5 = x^5.(7.x + 6)$, qui s'annule si et seulement si :

$x = 0$, ou : $x = -\dfrac{6}{7}$.

Les deux dérivées partielles s'annulent donc en $(0,0)$ et en $\left(-\dfrac{6}{7}, -\dfrac{36}{49}\right)$.

Enfin, l'origine est sur la courbe (puisque : $f(0,0) = 0$) et ce point n'est pas régulier.

En revanche : $f\left(-\dfrac{6}{7}, -\dfrac{36}{49}\right) \neq 0$, et ça n'est pas un point de la courbe.

Conclusion : tous les points sont réguliers sauf l'origine.

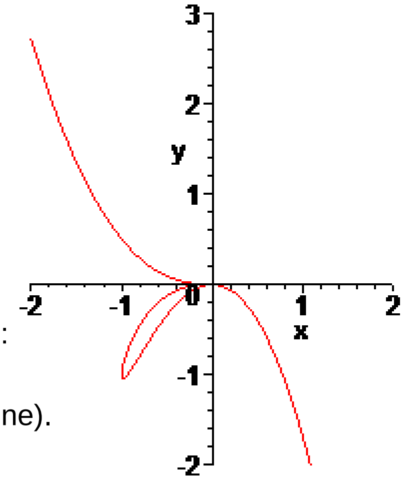
En un point régulier (x_0,y_0), la tangente à la courbe en ce point a pour équation :

$(x-x_0).(7.x_0^6+6.x_0.y_0^2)+(y-y_0).(6.x_0^2.y_0+6.y_0^2)=0$.

b. Si on pose comme proposé : $y=t.x^2$, alors : $f(x,y)=0$, donne :

$0=x^7+3.t^2.x^6+2.t^3.x^6=x^6.(x+3.t^2+2.t^3)$, soit, pour : x ≠ 0, les deux résultats :

- $x=-t^2.(3+2.t)$, puis :
- $y=t^5.(3+2.t)^2$.



Et comme la valeur : t = 0, redonne l'origine, on obtient ainsi tous les points de la courbe en représentation paramétrique (utilisant une fonction de t qu'on notera $\vec{F}$.

On a en fait étudié l'intersection de la courbe par des paraboles variables (pour : t ∈ ℝ*) et constaté que cette intersection se réduisait pour chaque parabole à un point.

c. Si on calcule les dérivées de x et de y comme fonctions de t, on obtient :

$x'(t)=-6.t.(t+1)$, et : $y'(t)=t^4.(3.t+2).(14.t+15)$, et le point correspondant à : t = 0, est le seul point non régulier (c'est encore l'origine).

En un point régulier, la tangente à la courbe a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x+t^2.(3.t+2) & -6.t.(t+1) \\ y-t^5.(3+2.t^2) & t^4.(3.t+2).(14.t+15) \end{vmatrix}=0,$$

ce déterminant exprimant la colinéarité entre $\overrightarrow{m(t)M}$ et $\overrightarrow{F'(t)}$.

d. Le tracé de Γ est proposé ci-contre et s'obtient après l'étude habituelle.

On peut obtenir la tangente à l'origine puisque : $\overrightarrow{m(0)m(t)}=t^2.(3+2.t).[-\vec{i}+t^3.(3+2.t).\vec{j}]$, et la direction limite est $-\vec{i}$, qui correspond bien à une tangente horizontale.

Surfaces implicites.

14. Une sphère a pour équation implicite : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, où (a,b,c) sont les coordonnées du centre Ω de la sphère et R est son rayon, avec : R > 0.

Elle correspond donc aux points du plan vérifiant : $f(x,y,z)=0$, avec :

∀ (x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2$.

Tous les points sont alors réguliers puisque :

∀ (x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2.(x-a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2.(y-b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2.(z-c)$.

Le seul point de $\mathbb{R}^3$ où les trois dérivées partielles s'annulent est donc Ω qui n'est pas sur la sphère.

En un point de la sphère, le plan tangent a pour équation :

$(x-x_0).(2.(x_0-a))+(y-y_0).(2.(y_0-b))+(z-z_0).(2.(z_0-c))=0$, et en développant :

$(x-a).(x_0-a)+(y-b).(y_0-b)+(z-c).(z_0-c)=R^2$.

La normale est quant à elle dirigée par $\overrightarrow{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)$ soit $2.\overrightarrow{\Omega m_0}$ ou simplement $\overrightarrow{\Omega m_0}$.

15. On note : ∀ (x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+2.z^2-1$, et tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers.

En effet, le gradient de f en tout point vaut : $\overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)=(2.x,2.y,4.z)$, et il ne s'annule qu'à l'origine, point qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$.

Donc ce gradient est orthogonal au plan tangent à $\mathcal{S}$ en m(x,y,z), et donc ce plan tangent est perpendiculaire à la droite proposée si et seulement si $\overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)$ est colinéaire à un vecteur directeur de Δ, par exemple à : $\vec{u}=(1,3,-2)$.

La condition de colinéarité s'écrit alors : ∃ λ ∈ ℝ, $2.x=\lambda$, $2.y=3.\lambda$, $4.z=-2.\lambda$.

De plus, le point m(x,y,z) est sur $\mathcal{S}$, donc λ vérifie : $\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{9.\lambda^2}{4}+2.\dfrac{\lambda^2}{4}=1$, soit : $\lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Il y a donc deux points qui peuvent convenir : $m_1\left(\dfrac{1}{2.\sqrt{3}},\dfrac{3}{2.\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2.\sqrt{3}}\right)$, et $m_2\left(-\dfrac{1}{2.\sqrt{3}},-\dfrac{3}{2.\sqrt{3}},\dfrac{1}{2.\sqrt{3}}\right)$.

Réciproquement, en ces points le plan tangent à $\mathcal{S}$ a pour équation :

$\varepsilon.\frac{2}{2.\sqrt{3}}.\left(x-\frac{\varepsilon}{2.\sqrt{3}}\right)+\frac{6.\varepsilon}{2.\sqrt{3}}.\left(y-\frac{3.\varepsilon}{2.\sqrt{3}}\right)-\frac{4.\varepsilon}{2.\sqrt{3}}.\left(z+\frac{\varepsilon}{2.\sqrt{3}}\right)=0$, avec : ε = ±1, ce qui s'écrit encore :

$x+3.y-2.z=2.\varepsilon.\sqrt{3}$.

La normale à ces plans est bien parallèle à la droite Δ.

16. On commence par noter : ∀ (x,y,z) ∈ ℝ³, $f(x,y,z)=z^3-x.y$.

Puis : ∀ (x,y,z) ∈ ℝ³, $\overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)=(-y,-x,3.z^2)$.

Tous les points sont donc réguliers sauf l'origine.

En un point régulier $m_0(x_0,y_0,z_0)$, une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ est par exemple :

$-(x-x_0).y_0-x_0.(y-y_0)+3.z_0^2.(z-z_0)=0$, ou encore : $x.y_0+y.x_0-3.z_0^2.z+x_0.y_0=0$.

La droite Δ correspond à l'ensemble des points m(x,y,z) tels que :

- $x=2$,
- $y=3.z+3$,
- $z=z$,

avec z quelconque dans ℝ.

Donc Δ est incluse dans le plan précédent si et seulement si :

∀ z ∈ ℝ, $2.y_0+(3.z+3).x_0-3.z_0^2.z+x_0.y_0=0$, soit encore :

- $3.x_0-3.z_0^2=0$ (coefficient de z),
- $2.y_0+3.x_0+x_0.y_0=0$ (coefficient constant).

On obtient donc : $x_0=z_0^2$.

Puis : $0=z_0^3-z_0^2.y_0$ (car : m_0 ∈ $\mathcal{S}$), soit : $y_0=z_0$, ou : $z_0=0$, (qu'on examinera en dernier) et enfin :

$2.z_0+3.z_0^2+z_0^3=0$, ce qui s'écrit encore : $z_0=0$, ou : $z_0=-1$, ou : $z_0=-2$.

Réciproquement :

- si : $z_0=-1$, alors : $x_0=1$, $y_0=-1$, le point est régulier et le plan tangent a pour équation en ce point :

$-x+y-3.z-1=0$, ou encore : $x-y+3.z+1=0$,

et la droite Δ est bien incluse dans ce plan (même démarche qu'au-dessus),

- si : $z_0=-2$, alors : $x_0=4$, $y_0=-2$, le point est régulier et le plan tangent a pour équation en ce point :

$-2.x+4.y-12.z-8=0$, ou encore : $x-2.y+6.z+4=0$,

et la droite Δ est bien incluse dans ce plan (même démarche qu'au-dessus).

- si enfin : $z_0=0$, alors : $x_0=0$.

Si de plus : $y_0=0$, alors le point n'est pas régulier et on n'étudie pas de plan tangent en ce point.

Si en revanche : $y_0\neq 0$, le point est régulier et le plan tangent à $\mathcal{S}$ en ce point a pour équation : $x=0$.

La droite Δ n'est évidemment pas incluse dans ce plan.

Conclusion, il y a deux points où le plan tangent à $\mathcal{S}$ en ces points contient Δ, ceux précisés au-dessus.