# Fonctions vectorielles, courbes.

**Chap. 15 : cours complet.**

## 1. Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs vectorielles.

Définition 1.1 : dérivabilité en un point d'une fonction de variable réelle à valeurs vectorielles
Définition 1.2 : dérivabilité à droite et à gauche en un point
Théorème 1.1 : lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point
Théorème 1.2 : caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité
Théorème 1.3 : cas d'une composée avec une application linéaire ou bilinéaire
Définition 1.3 : dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, fonction de classe $C^1$
Théorème 1.4 : utilisation d'une base, fonctions composantes
Théorème 1.5 : caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle
Théorème 1.6 : cas d'une composée avec une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (« règle de la chaîne »)
Définition 1.4 : fonction de classe $C^n$, $C^\infty$
Théorème 1.7 : opérations sur les fonctions de classe $C^n$, $C^\infty$

## 2. Arcs paramétrés.

Définition 2.1 : arc paramétré
Définition 2.2 : trajectoire ou support géométrique d'un arc paramétré
Théorème 2.1 : réduction du domaine d'étude d'un arc paramétré plan
Remarque 2.1 : vérification des réductions du domaine d'étude
Définition 2.3 : point régulier
Définition 2.4 : demi-tangente, tangente à un arc paramétré en un point régulier
Théorème 2.2 : tangente en un point régulier vue comme « droite limite »
Définition 2.5 : branche infinie d'un arc paramétré plan
Définition 2.6 : point simple, double, multiple d'un arc paramétré
Remarque 2.2 : point limite
Définition 2.7 : longueur d'un arc paramétré

## 3. Courbes et surfaces implicites.

Définition 3.1 : courbe implicite, point régulier
Théorème 3.1 : équation de la tangente à une courbe implicite en un point régulier
Définition 3.2 : surface implicite, point régulier
Définition 3.3 et théorème 3.2 : plan tangent en un point régulier d'une surface implicite
Définition 3.4 : courbe tracée sur une surface
Exemple 3.2 : courbes coordonnées d'une surface explicite
Théorème 3.3 : tangentes à une courbe régulière tracée sur une surface implicite

# Fonctions vectorielles, courbes.

## 1. Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs vectorielles.

***Définition 1.1 : dérivabilité en un point d'une fonction de variable réelle à valeurs vectorielles***

Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un réel élément de I.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}^p$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$.

***Définition 1.2 : dérivabilité à droite et à gauche en un point***

Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un réel élément de I.

On dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}^p$, et

dérivable à gauche en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}^p$.

On note alors ces limites (lorsqu'elles existent) respectivement $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

***Théorème 1.1 : lien entre dérivabilité à droite, à gauche et dérivabilité en un point***

Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un réel intérieur à I.

f est alors dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche avec : $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Dans ce cas on a : $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

*Démonstration :*

La démonstration est formellement identique à celle pour les fonctions de ℝ dans ℝ.

***Remarque :***

Dans toute la suite, pour : a ∈ I, on notera $I_a$ un intervalle contenant a et inclus dans I.

***Théorème 1.2 : caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité***

Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans $\mathbb{R}^p$, et soit a un réel élément de I.

f est dérivable en a si et seulement si il existe : α ∈ F, et une fonction ε telle que :

∀ h ∈ $I_a$, $f(a+h) = f(a) + h.\alpha + h.\varepsilon(h)$, avec : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

De plus, si f est dérivable en a, elle est continue en a.

*Démonstration :*

[⇒] Si f est dérivable en a, alors si on pose :

- ∀ h ∈ $I_a$, h ≠ 0, $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$,
- $\varepsilon(0) = 0$,

alors on a bien : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, et : ∀ h ∈ $I_a$, on a : $f(a+h) = f(a) + h.\alpha + h.\varepsilon(h)$.

[⇐] Si f admet le développement limité précédent, alors :

∀ h ∈ $I_a$, h ≠ 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \alpha = \varepsilon(h)$, et cette quantité tend vers 0 quand h tend vers 0,

autrement dit $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et vaut α, donc f est dérivable en a et : $f'(a) = \alpha$.

De plus, si f est dérivable en a, alors en faisant tendre h vers 0 dans le développement limité précédent, on a immédiatement : $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$,

et f est alors bien continue en a.

**Définition 1.3 : dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, fonction de classe $C^1$**

Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.
La fonction f' ainsi définie est alors appelée fonction dérivée de f.
On dit que f est de classe $C^1$ sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

**Théorème 1.3 : dérivabilité d'une combinaison linéaire**

Soient f et g des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, et soit a un réel élément de I.
Si f et g sont dérivables en a alors pour tout : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda.f + \mu.g)$ est dérivable en a et :

$(\lambda.f + \mu.g)'(a) = \lambda.f'(a) + \mu.g'(a)$.

Plus généralement, si f et g sont dérivables sur I (ou de classe $C^1$ sur I), alors $(\lambda.f + \mu.g)$ est dérivable sur I (ou de classe $C^1$ sur I).

*Démonstration :*

On a donc :

$\forall$ h $\in$ $I_a$, $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon_1(h)$, et : $g(a+h) = g(a) + h.g'(a) + h.\varepsilon_2(h)$,

avec : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

Donc : $\forall$ h $\in$ $I_a$, $(\lambda.f + \mu.g)(a+h) = (\lambda.f(a) + \mu.g(a)) + h.(\lambda.f'(a) + \mu.g'(a)) + h.(\lambda\varepsilon_1(h) + \mu.\varepsilon_2(h))$,

et on a clairement : $\lim\limits_{h\to 0}(\lambda\varepsilon_1(h) + \mu.\varepsilon_2(h)) = 0$.

Donc $(\lambda.f + \mu.g)$ est dérivable en a, et : $(\lambda.f + \mu.g)'(a) = \lambda.f'(a) + \mu.g'(a)$.

La forme obtenue pour la dérivée en a de $(\lambda.f + \mu.g)$ permet de déduire les deux autres points indiqués dans l'énoncé du théorème.

**Théorème 1.4 : cas d'une composée avec une application linéaire ou bilinéaire**

Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^p$, a un réel élément de I tel que f soit dérivable en a.
Si : L $\in$ $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, alors $L \circ f$ est dérivable en a et : $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.
De même soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}^p$, a un réel élément de I et B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
Si f et g sont dérivables en a, la fonction : $x \mapsto B(f(x), g(x))$, est dérivable en a, et :

$(B(f,g))'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))$.

Plus généralement, si f (ou f et g) est (sont) dérivable(s) ou de classe $C^1$ sur I, alors $L \circ f$ (ou $B(f,g)$) le sont aussi.

*Démonstration :*

On utilise à nouveau des développements limités.

- On a donc : $\forall$ h $\in$ $I_a$, $f(a+h) = f(a) + h.\alpha + h.\varepsilon(h)$, avec : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Donc : $L \circ f(a+h) = L(f(a)) + h.L(\alpha) + h.L(\varepsilon(h))$.

Or L étant linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, espaces vectoriels de dimension finie, elle est continue et :

$\lim\limits_{h\to 0} L(\varepsilon(h)) = L(\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h)) = L(0) = 0$.

Donc le développement limité obtenu montre que $L \circ f$ est dérivable en a et que :

$(L \circ f)'(a) = L(\alpha) = L(f'(a))$.

- On peut reprendre le même principe qu'au-dessus pour B, et on a donc :

$\forall$ h $\in$ $I_a$, $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon_1(h)$, et : $g(a+h) = g(a) + h.g'(a) + h.\varepsilon_2(h)$,

avec : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

Donc : $B(f(a+h), g(a+h)) = B(f(a), g(a)) + h.[B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))] + h.\varepsilon(h)$, avec :

$$\varepsilon(h) = [B(f(a), \varepsilon_2(h)) + B(\varepsilon_1(h), g(a))] \\ + h.[B(f'(a), g'(a)) + B(f'(a), \varepsilon_2(h)) + B(\varepsilon_1(h), g'(a)) + B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))].$$

Puis B est bilinéaire entre espaces de dimension finie donc continue en tout point, et comme :

- $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^p$, $B(x,0) = 0$,
- $\forall$ y $\in$ $\mathbb{R}^q$, $B(0,y) = 0$, et : $B(0,0) = 0$,

on en déduit que : $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Finalement B est bien dérivable en a et : $(B(f,g))'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))$.

La dérivabilité ou le caractère $C^1$ découle de la forme des dérivées qu'on vient d'obtenir.

***Théorème 1.5 : utilisation d'une base, fonctions composantes***

Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans $ℝ^p$, et soit a un réel élément de I.

On note ($f_1$, …, $f_n$) les fonctions composantes de f dans la base canonique de $ℝ^p$, soit : $f = \sum_{i=1}^{p} f_i.e_i$.

Alors f est dérivable en a si et seulement si les fonctions composantes de f sont dérivables en a et :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(a).e_i.$$

Plus généralement, f est dérivable (ou de classe $C^1$) sur I si et seulement si ses fonctions composantes sont dérivables (ou de classe $C^1$) sur I.

*Démonstration :*

Le premier point est évidemment une conséquence immédiate sur l'existence d'une limite pour une fonction à valeurs dans $ℝ^p$.

***Exemple 1.1 : dérivabilité d'un produit scalaire, d'un produit mixte (déterminant) dans $ℝ^2$***

Soient f et g des fonctions dérivables d'un intervalle I dans $ℝ^2$, muni de sa structure euclidienne canonique.

La fonction $(f|g)$, produit scalaire de f et de g est dérivable sur I et :

$\forall$ a $\in$ I, $(f|g)'(a) = (f'(a)|g(a)) + (f(a)|g'(a))$.

De même la fonction : $((f|g)) = \det_B(f,g)$, produit mixte de f et de g, ou déterminant dans la base canonique de f et de g, est dérivable sur I et :

$\forall$ a $\in$ I, $((f|g))'(a) = \det_B(f'(a), g(a)) + \det_B(f(a), g'(a))$.

*Démonstration :*

Les applications de $ℝ^2$ dans ℝ définie par :

- (x,y) $\mapsto$ $(x|y)$, et :
- (x,y) $\mapsto$ $((x|y)) = \det_B(x,y)$,

sont bilinéaires donc $(f|g)$ et : $((f|g)) = \det_B(f,g)$, sont dérivables sur I et leur dérivée est donnée par le théorème 1.4.

***Théorème 1.6 : cas d'une composée avec une application de ℝ dans ℝ (« règle de la chaîne »)***

Soient I et J des intervalles de ℝ, soient φ une fonction de I dans J et f une fonction de J dans $ℝ^p$.

Si φ est dérivable en : a $\in$ I, et si f est dérivable en : b = φ(a), alors $fo\varphi$ est dérivable en a et :

$(fo\varphi)'(a) = \varphi'(a).(f'o\varphi)(a)$.

Plus généralement, si φ est dérivable (de classe $C^1$) sur I, et si f est dérivable (de classe $C^1$) sur J, alors $fo\varphi$ est dérivable (de classe $C^1$) sur I.

*Démonstration :*

Si : $f = \sum_{i=1}^{p} f_i.e_i$, dans la base canonique de $ℝ^p$, alors : $fo\varphi = \sum_{i=1}^{p} (f_i o\varphi).e_i$.

Dans ce cas il est clair, en utilisant les théorèmes sur les fonctions de ℝ dans ℝ, que si φ et f sont dérivables respectivement en a et b (ou dérivables sur I et J, ou de classe $C^1$ sur I et J), alors toutes les fonctions $(f_i o\varphi)$ sont dérivables en a (ou dérivables sur I ou de classe $C^1$ sur I).

Donc $(fo\varphi)$ a les mêmes propriétés d'après le théorème précédent.

De plus : $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ p, $\forall$ a $\in$ I, $(f_i o\varphi)'(a) = \varphi'(a).(f_i'o\varphi)(a)$, et :

$$\forall a \in I,\ (fo\varphi)'(a) = \sum_{i=1}^{p} (f_i o\varphi)'(a).e_i = \sum_{i=1}^{p} \varphi'(a).(f_i'o\varphi)(a).e_i = \varphi'(a).\sum_{i=1}^{p} (f_i'o\varphi)(a).e_i = \varphi'(a).f'o\varphi(a).$$

La généralisation à la dérivabilité ou au caractère $C^1$ s'obtient comme précédemment à partir de la forme de la dérivée obtenue.

***Définition 1.4 : fonction de classe $C^n$, $C^\infty$***

Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^p$.

Pour : $k \geq 1$, on dit que f est de classe $C^k$ sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est de classe $C^{k-1}$ sur I.

On dit de même que f est de classe $C^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $C^k$, pour tout : $k \in \mathbb{N}$.

***Théorème 1.7 : opérations sur les fonctions de classe $C^n$, $C^\infty$***

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit : $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Les propriétés vérifiées pour les fonctions dérivables se généralisent aux fonctions de classe $C^n$, de la façon suivante :

• si f est définie de I dans $\mathbb{R}^p$, et s'écrit : $f = \sum_{i=1}^{p} f_i.e_i$ , dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, alors f est de classe $C^n$ sur I si et seulement si ses fonctions composantes sont de classe $C^n$ sur I et dans ce cas :

$\forall a \in I, \forall k \leq n,\ f^{(k)}(a) = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(k)}(a).e_i$

• si f et g sont de classe $C^n$ de I dans $\mathbb{R}^p$, alors : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda.f + \mu.g)$ est de classe $C^n$ sur I et :

$\forall k \leq n,\ (\lambda.f + \mu.g)^{(k)} = \lambda.f^{(k)} + \mu.g^{(k)}$.

*Démonstration :*

Tous ces ensembles sont inclus dans $\mathcal{F}$(I,**K**), sont non vides puisque la fonction nulle de I dans **K** appartient à chacun d'entre eux, et ils sont stables en utilisant notamment le théorème 1.4.

La linéarité de la dérivation $n^{\text{ième}}$ des fonctions de classe $C^n$ est soit également une conséquence de ces deux théorèmes, soit obtenu directement par récurrence sur n.

## 2. Arcs paramétrés.

***Définition 2.1 : arc paramétré***

On appelle arc paramétré de classe $C^k$ un couple (I,f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$p de classe $C^k$, où k est un entier : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.

***Définition 2.2 : trajectoire ou support géométrique d'un arc paramétré***

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.

La trajectoire ou le support géométrique de l'arc paramétré est l'ensemble :

$\Gamma = \{m \in \mathbb{R}^p, \exists t \in I, Om = f(t)\}$.

***Théorème 2.1 : réduction du domaine d'étude d'un arc paramétré plan***

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$ dans $\mathbb{R}^2$ avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$, et : $\forall t \in I,\ f(t) = (x(t), y(t))$.

On peut examiner ce que deviennent les coordonnées x(t) et y(t) d'un point lorsque l'on transforme t de la façon suivante, ce qui donne alors lieu aux réductions du domaine indiquées :

- t changé en (t + T) : domaine réduit à un intervalle de longueur T (ex : $\mathbb{R}$ réduit à $[\alpha,\alpha+T]$),
- t changé en – t : domaine réduit à sa partie positive (ex : $\mathbb{R}$ réduit à $\mathbb{R}^+$)
- t changé en $\frac{1}{t}$ : domaine réduit à sa partie dans [-1,+1] (ex : $\mathbb{R}$ réduit à [-1,+1]).

On constate alors que :

- x et y invariants : l'arc est globalement invariant,
- x invariant et y changé en son opposé : arc invariant dans la symétrie par rapport à Ox,
- y invariant et x changé en son opposé : arc invariant dans la symétrie par rapport à Oy,
- x et y changés en leur opposé : arc invariant dans la symétrie par rapport à O,
- x et y échangés : arc invariant dans la symétrie par rapport à la première bissectrice soit la droite d'équation : x = y,

• x changé en (x + a) et y invariant : arc invariant dans la translation de vecteur a.i (même chose en l'adaptant si x est inchangé et y changé en (y + b)).

*Démonstration :*

La plupart des résultats sont immédiats.
Traitons par exemple le cas où, en changent t en –t, x et y sont échangés.
La symétrie orthogonale s ayant pour axe la première bissectrice (droite d'équation : x = y), a pour expression cartésienne : $\forall$ M(x,y) $\in \mathbb{R}^2$, (M'(x',y') = s(M)) $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.
Si maintenant on connaît l'arc paramétré sur le domaine : $D^+ = D \cap \mathbb{R}^+$, (D étant supposé symétrique par rapport à 0), la portion $\Gamma^+$ de l'arc obtenue a pour image par la symétrie orthogonale précédente un autre arc $\Gamma^-$ et cette portion correspond aux points obtenus lorsque le paramètre varie dans : $D^- = D \cap \mathbb{R}^-$.
En effet, si on note, pour : $t \in D^+$, M = M(x(t),y(t)), son image par s est M' de coordonnées (y(t),x(t)), qui est donc bien le point M(x(-t),y(-t)).

***Remarque 2.1 : vérification des réductions du domaine d'étude***

Dans tous les cas, lorsqu'on effectue une ou plusieurs réduction du domaine d'étude d'un arc paramétré, il est prudent d'effectuer les transformations inverses qui conduisent à réduire le domaine, pour s'assurer que le domaine retenu à la fin permet bien d'étudier tout l'arc, et de noter en parallèle les transformations géométriques du plan qui permettent d'obtenir la totalité de son dessin.

***Définition 2.3 : point régulier***

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.
Pour : $t \in I$, on dit que le point m(t) de l'arc est régulier si et seulement si : $f'(t) \neq 0$.
Dans le cas contraire, on dit que le point est singulier ou stationnaire.
Si tous les points d'un arc paramétré sont réguliers, on parle alors d'arc régulier.

***Définition 2.4 : demi-tangente, tangente à un arc paramétré en un point régulier***

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.
Pour : $t_0 \in I$, correspondant à un point régulier, on appelle tangente au point $m(t_0)$ à l'arc la droite passant par $m(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{f'(t_0)}$.
Lorsque f n'est définie qu'à droite ou à gauche de $t_0$, ou n'admet qu'une dérivée à droite ou à gauche en $t_0$, on parle de demi-tangente à l'arc en $m(t_0)$.

***Théorème 2.2 : tangente en un point régulier vue comme « droite limite »***

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.
Soit : $t_0 \in I$, tel $m(t_0)$ soit un point régulier de l'arc.
Alors $\overrightarrow{f'(t_0)}$ correspond à la direction limite du vecteur $\overrightarrow{m(t)m(t_0)}$ lorsque t tend vers $t_0$.
La tangente (ou demi-tangente) correspond alors à la « droite limite » (ou la « demi-droite limite ») obtenue « limite » des cordes $[m(t_0)m(t)]$, lorsque t tend vers $t_0$.

*Démonstration :*

La corde entre $m(t_0)$ et m(t) correspond à la direction :

$\forall$ $t \in I$, avec : $t = t_0 + h$, $\overrightarrow{m(t_0)m(t)} = \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) = h.\vec{f}'(t_0) + \vec{o}(h)$, et :

$$\frac{\overrightarrow{m(t_0)m(t)}}{\left\|\overrightarrow{m(t_0)m(t)}\right\|} = \frac{h.\overrightarrow{f'(t_0)} + \vec{o}(h)}{\left\|h.\overrightarrow{f'(t_0)} + \vec{o}(h)\right\|} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm \frac{\overrightarrow{f'(t_0)}}{\left\|\overrightarrow{f'(t_0)}\right\|},$$

autrement dit, il y a bien la direction limite est bien donnée par $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

***Définition 2.5 : branche infinie d'un arc paramétré plan***

Soit (I,f) un arc paramétré plan de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$, soit : $\forall$ $t \in I$, $f(t) = (x(t), y(t))$.
On dit que l'arc présente une branche infinie lorsque x ou y (ou les deux) tendent vers $\pm\infty$ quand t tend vers $t_0$ ou vers $\pm\infty$.

On étudie alors la limite en $t_0$ (ou en $\pm\infty$) du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$.

• si ce rapport admet une limite infinie en cette valeur $t_0$ (éventuellement en $\pm\infty$), on dit que l'arc présente une branche parabolique dans la direction Oy,
• si ce rapport admet une limite nulle en cette valeur $t_0$ (éventuellement en $\pm\infty$), on parle de branche parabolique dans la direction Ox,
• si ce rapport admet une limite finie m non nulle, on dit que l'arc présente une direction asymptotique d'équation : y = m.x.
Dans ce dernier cas, on étudie alors [y(t) – m.x(t)] en la valeur $t_0$ considérée (ou en $\pm\infty$), et si cette fonction admet une limite finie p, alors l'arc présente une asymptote d'équation : y = m.x + p.

***Définition 2.6 : point simple, double, multiple d'un arc paramétré***
Soit (I,f) un arc paramétré de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$.
Pour : $t \in I$, on dit que le point m(t) de cet arc est simple si et seulement si :
$\forall t' \in I, (t \neq t') \Rightarrow (m(t) \neq m(t'))$.
On dit de même que le point m(t) est double, pour : $t \in I$, si et seulement si : $\exists ! t' \in I, t \neq t', m(t) = m(t')$.
Enfin, plus généralement, on dit que le point m(t), pour : $t \in I$, est multiple si et seulement m(t) n'est pas un point simple de l'arc paramétré.

***Remarque 2.2 : point limite***
Soit (I,f) un arc paramétré plan de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$, soit : $\forall t \in I$, $f(t) = (x(t), y(t))$.
Lorsque x et y tendent vers des limites finies $x_0$ et $y_0$ en $t_0$ ou $\pm\infty$, on dit que l'arc présente un point limite $m_0$ de coordonnées $x_0$ et $y_0$.
Dans ce cas on peut également étudier la direction limite de $\overrightarrow{m_0 m(t)}$ quand t tend vers $t_0$ ou vers $\pm\infty$.

***Définition 2.7 : longueur d'un arc paramétré***
Soit (I,f) un arc paramétré plan régulier de classe $C^k$, avec : $k \geq 1$, ou : $k = +\infty$, $\mathbb{R}^p$ étant muni de $\|\,.\,\|_2$ provenant de la structure euclidienne canonique.
On appelle longueur de l'arc entre les points de paramètre $t_1$ et $t_2$ la quantité : $L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \overrightarrow{f'(t)} \right\|_2 .dt$.
Lorsque l'arc est plan, cette valeur vaut donc : $L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.dt$, où : $f = (x, y)$.

## 3. Courbes et surfaces implicites.

***Définition 3.1 : courbe implicite, point régulier***
On appelle courbe du plan définie par une équation implicite un ensemble : $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = 0\}$, où f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On dira qu'un point : $m(x,y) \in \Gamma$, d'une telle courbe est régulier lorsque : $df(x,y) \neq (0,0)$.

***Théorème 3.1 : équation de la tangente à une courbe implicite en un point régulier***
Soit : $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = 0\}$, et $m(x_0,y_0)$ un point régulier de cette courbe.
Alors la courbe est localement un arc paramétré et la tangente à la courbe en ce point a pour équation :
$$(x - x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0) + (y - y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 y_0) = 0.$$

*Démonstration :*
Puisque $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$ est non nul, alors l'une de ses deux composantes au moins est non nulle.
Si : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors on admettra (théorème des fonctions implicites, dont la démonstration est assez difficile), qu'il existe des intervalles ouverts I et J et $\varphi$ de classe $C^1$ de I dans J tels que :
• $(x_0,y_0) \in I \times J$,

- I×J ⊂ U,
- $\varphi(x_0) = y_0$,
- ∀ (x,y) ∈ I×J, ( $f(x,y)=0$ ) ⇔ ( $y=\varphi(x)$ ).

Autrement dit, la relation : $f(x,y)=0$, définit localement y comme fonction de x.

Mais alors : ∀ x ∈ I, $f(x,\varphi(x))=0$, et en dérivant : $1.\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x).\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0$, et en particulier pour : x = $x_0$, on obtient : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\varphi'(x_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, d'où : $\varphi'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

L'arc paramétré ainsi défini admet pour tangente en $m_0$ la droite d'équation : $(y-y_0)=\varphi'(x_0).(x-x_0)$, ce qui s'écrit encore, après simplification : $(x-x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0y_0)+(y-y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0y_0)=0$.

On suit le même raisonnement et on aboutit au même résultat si : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$.

***Remarque :***

- Si f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors en tout point régulier $m_0(x_0,y_0)$ d'une ligne de niveau de f, définie par : $f(x,y)=\lambda$, avec : λ ∈ $\mathbb{R}$, le gradient $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0)$ de f en ce point est orthogonal à la ligne de niveau en ce point, c'est-à-dire qu'il est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau au point $m_0$.
- On peut également démontrer que $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0)$ est orienté dans le sens croissant des valeurs de f.

***Définition 3.2 : surface implicite, point régulier***

On appelle surface de l'espace définie par une équation implicite un ensemble :

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=0\}$, où f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

On dira qu'un point : m(x,y,z) ∈ Σ, d'une telle surface est régulier lorsque : $df(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

On dira qu'une surface est régulière lorsque tous ses points sont réguliers.

***Définition 3.3 et théorème 3.2 : plan tangent en un point régulier d'une surface implicite***

Soient : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=0\}$, une surface de $\mathbb{R}^3$ où f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et soit $m_0(x_0,y_0,z_0)$ un point régulier de Σ.

On appelle plan tangent à Σ en $m_0$ le plan passant par $m_0$ et orthogonal à $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0,z_0)$.

Ce plan a pour équation : $(x-x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0).\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$.

*Démonstration :*

Soit : m(x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$.

Si on note $P_T(m_0)$ le plan cherché, on a donc :

(m ∈ $P_T(m_0)$) ⇔ ( $(\overrightarrow{m_0m}|\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0,z_0))=0$ )

$$\Leftrightarrow \left((x-x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0).\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0\right).$$

***Définition 3.4 : courbe tracée sur une surface***

Soit : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=0\}$, une surface de $\mathbb{R}^3$ où f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle courbe tracée sur cette surface un arc paramétré (I,φ), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $C^1$ de I dans $\mathbb{R}^3$, et telle que : ∀ t ∈ I, $fo\varphi(t)=0$.

**Exemple 3.2 : courbes coordonnées d'une surface explicite**

Soit g une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Alors : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = g(x,y)\}$, est un cas particulier de surface décrite dans la définition 3.3 et cette surface est régulière.

On appelle alors courbes coordonnées tracées sur cette surface les arcs paramétrés définis par :

- $t \mapsto (t,a,g(t,a))$, avec : $a \in \mathbb{R}$,
- $t \mapsto (a,t,g(a,t))$, avec : $a \in \mathbb{R}$.

Elles correspondent à l'intersection de $\Sigma$ avec les plans « verticaux » $\Pi_x$ et $\Pi_y$ d'équations respectives :

- $\Pi_x :\ x = a$,
- $\Pi_y :\ y = a$.

*Démonstration :*

On peut commencer par constater qu'en posant : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = g(x,y) - z$, alors :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $((x,y,z) \in \Sigma) \Leftrightarrow (g(x,y) = z) \Leftrightarrow (f(x,y,z) = 0)$.

De plus $\Sigma$ est bien régulière car : $\forall (x,y,z) \in \Sigma,\ \overrightarrow{grad} f(x,y,z) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z).\vec{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z).\vec{j} - \vec{k} = \vec{0}$.

Soit maintenant : $m(t_0) = (t_0, a, g(t_0,a))$.

Alors on a bien : $f(t_0, a, g(t_0,a)) = g(t_0,a) - g(t_0,a) = 0$, et : $m(t_0) \in \Sigma$.

**Théorème 3.3 : tangentes à une courbe régulière tracée sur une surface implicite**

Soit : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = 0\}$, une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ où f est une fonction de classe $C^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Soit un arc paramétré régulier $(I,\varphi)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi$ une fonction de classe $C^1$ de I dans $\mathbb{R}^3$, correspondant à une courbe tracée sur la surface $\Sigma$.

Pour tout point m(t) de l'arc, la tangente en m(t) est une droite incluse dans le plan tangent à $\Sigma$ en m(t).

*Démonstration :*

Notons : $\forall t \in I,\ \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, où x, y et z sont donc trois fonctions de classe $C^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

Puisque $(I,\varphi)$ est un arc tracé sur $\Sigma$, alors : $\forall t \in I,\ fo\varphi(t) = 0$.

En dérivant alors cette relation, on obtient :

$$\forall t \in I,\ x'(t).\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t)) + y'(t).\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t)) + z'(t).\frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t)) = 0.$$

Donc en tout point de l'arc, le vecteur $(x'(t), y'(t), z'(t))$ est orthogonal à $\overrightarrow{grad} f(x(t),y(t),z(t))$.

Autrement dit la tangente à l'arc en m(t) passe par un point du plan tangent $P_T(m(t))$ à $\Sigma$ et est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{grad} f(x(t),y(t),z(t))$, lui-même orthogonal à $P_T(m(t))$.

Donc la tangente est bien incluse dans le plant tangent $P_T(m(t))$.