

Equations différentielles linéaires d'ordre 1.

Définition 1.1 : équation différentielle linéaire d'ordre 1, équation homogène associée, solution d'une telle équation différentielle

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 une équation du type :

$$(E) \ a(t).y' + b(t).y = c(t),$$

où a, b, c sont des fonctions définies et **continues** d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et y est une fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une solution de (E) est une fonction ϕ définie sur un sous-intervalle J de I , continue et dérivable sur J , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telle que : $\forall t \in J, a(t).\phi'(t) + b(t).\phi(t) = c(t)$.

On appelle équation différentielle **homogène** (ou **sans second membre**) **associée à (E)** l'équation :

$$(EH) \ a(t).y' + b(t).y = 0.$$

Théorème 1.1 : de Cauchy-Lipschitz

Soit : (E) $a(t).y' + b(t).y = c(t)$, (où a, b, c sont trois fonctions définies et **continues** d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (EH) son équation homogène associée.

Sur un intervalle : $J \subset I$, où la fonction a ne s'annule pas, les solutions de (EH) sont les fonctions :

$$y(t) = k.\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}.dt\right), \text{ où } k \text{ appartient à } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Les solutions de (EH) sur I forment donc un **K**-espace vectoriel de dimension 1 noté **$S_I(EH)$** .

Toujours sur un intervalle où a ne s'annule pas, les solutions de (E) ont, elles, pour forme :

$$y = y_{0E} + y_H, \text{ où } y_{0E} \text{ est une solution particulière de (E), et } y_H \text{ une solution quelconque de (EH).}$$

Les solutions de (E) sur I forment donc un espace affine de dimension 1 noté **$S_I(E)$** .

Exemple : résolution d'une équation linéaire homogène simple du premier ordre

Résoudre l'équation différentielle : (EH) $t.y' + (2.t^2 + 1).y = 0$.

L'équation proposée est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène.

Les coefficients sont des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, donc on peut essayer de la résoudre sur $\mathbb{R}$.

Mais le théorème de Cauchy-Lipschitz ne garantit des solutions que sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas.

Sur l'un de ces intervalles, les solutions de (EH) sont alors :

$$y(t) = C.\exp\left(-\int \frac{2.t^2 + 1}{t}.dt\right) = C.\frac{e^{-t^2}}{t}, \text{ avec : } C \in \mathbb{R} \text{ (une constante par intervalle),}$$

sachant que la valeur absolue disparaît puisque t garde un signe constant sur chaque intervalle, et qu'on peut « amalgamer » le signe de t à la constante.

Théorème 1.2 : méthode de variation de la constante

Soit : (E) $a(t).y' + b(t).y = c(t)$, (où a, b, c sont trois fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (EH) son équation homogène associée.

Soit y_0 une **solution de (EH)** sur un intervalle : $J \subset I$.

Alors soit y_0 est la fonction nulle, soit elle ne s'annule pas sur J .

Si y_0 n'est pas la fonction nulle, si on pose de plus : $\forall t \in J, y(t) = k(t).y_0(t)$, où k est une fonction inconnue **supposée définie, continue et dérivable** sur J , et **si a ne s'annule pas sur J** , alors y est solution de (E) sur J si et seulement si :

$$\forall t \in J, k'(t) = \frac{c(t)}{a(t).y_0(t)},$$

et après intégration, cela fournit une solution particulière y_p de (E) sur J .

Les solutions de (E) sur J sont alors les fonctions y de la forme :

$$\forall t \in J, y(t) = y_p(t) + C.y_0(t),$$

où y_0 est la fonction solution de (EH) précédente, supposée non identiquement nulle.

Exemple : résolution d'une équation linéaire du premier ordre avec second membre

Résoudre l'équation différentielle : (E) $t.y' + (2.t^2 + 1).y = t$.

On a déjà résolu l'équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation (E), on cherche y sous la forme : $y(t) = C(t) \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}$, avec C dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{*-}$.

y est alors solution de l'équation si et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{*-}$, $C'(t) \cdot \frac{e^{-t^2}}{t} \cdot t = t$, soit : $C'(t) = t \cdot e^{t^2}$.

On trouve ainsi : $C(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + K$, avec : $K \in \mathbb{R}$ (une constante par intervalle).

On peut noter que K redonne les solutions de l'équation homogène associée.

Finalement, les solutions sont : $y(t) = \frac{1}{2 \cdot t} + K \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}$, avec : $K \in \mathbb{R}$ (une constante par intervalle d'étude).

Théorème 1.3 : de Cauchy-Lipschitz, version « condition initiale »

Soit : (E) $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c(t)$, (où a, b, c sont trois fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (EH) son équation homogène associée.

Soit : $J \subset I$, un intervalle où a ne s'annule pas.

Alors pour : $t_0 \in J$, et : $y_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe une unique solution y de (E) sur J telle que de plus : $y(t_0) = y_0$.

Exemple : résolution d'une équation linéaire du premier ordre avec condition initiale

Si on reprend l'équation précédente, avec la condition initiale : $y(1) = \frac{1}{e}$, on trouve l'unique solution pour ce

« problème de Cauchy » qui est :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, y(t) = \frac{1}{2 \cdot t} + K \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}, \text{ avec : } \frac{1}{e} = \frac{1}{2} + \frac{K}{e}, \text{ soit la fonction définie avec : } K = 1 - \frac{e}{2}.$$

$$\text{Finalement : } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, y(t) = \frac{1}{2 \cdot t} + \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}.$$

Remarque : principe de superposition

Soit : (E) $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c(t)$, (où a, b, c sont trois fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une équation différentielle linéaire d'ordre 1, telle que : $c = c_1 + c_2$.

Si y_1 et y_2 sont des solutions respectivement de : (E₁) $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c_1(t)$, et : (E₂) $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c_2(t)$, sur un intervalle : $J \subset I$, alors $y_1 + y_2$ est solution de (E) sur J .

Exemple : résolution avec application du principe de superposition

Soit l'équation différentielle : (E) $y' - y = 1 + e^{2 \cdot t}$.

Cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$, et les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C \cdot e^t, \text{ avec : } C \in \mathbb{R}.$$

De plus :

- $t \mapsto -1$, est solution de : $y' - y = 1$, sur $\mathbb{R}$,
- $t \mapsto e^{2 \cdot t}$, est solution de : $y' - y = e^{2 \cdot t}$, sur $\mathbb{R}$,

donc : $t \mapsto e^{2 \cdot t} - 1$, est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont : $t \mapsto C \cdot e^t + e^{2 \cdot t} - 1$, avec : $C \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.4 : raccordement de solutions

Soit : (E) $a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c(t)$, (où a, b, c sont trois fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Soient $]\alpha, \beta[$ et $]\beta, \gamma[$ des intervalles inclus dans I sur lesquels a ne s'annule pas et tels que : $a(\beta) = 0$.

Une fonction y de $]\alpha, \gamma[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie sur $]\alpha, \gamma[$ est solution de (E) sur $]\alpha, \gamma[$ si et seulement si :

- la restriction y_1 de y à $]\alpha, \beta[$ est solution de (E) sur $]\alpha, \beta[$, donc a la forme annoncée par le th. 1.2,
- la restriction y_2 de y à $]\beta, \gamma[$ est solution de (E) sur $]\beta, \gamma[$, donc a la forme annoncée par le th. 1.2,
- y_1 admet une limite finie à gauche en β , y_2 admet une limite finie à droite en β , égales à $y(\beta)$,
- la fonction y est dérivable en β .

Exemple : résolution d'une équation linéaire du premier ordre avec raccordement

Si on reprend l'équation précédente, et qu'on essaie de trouver une (des) solution(s) sur $\mathbb{R}$, une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ sera a fortiori solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, et donc vaudra :

- $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, y(t) = \frac{1}{2t} + K_+ \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}$, avec : $K_+ \in \mathbb{R}$,
- $\forall t \in \mathbb{R}^{-*}, y(t) = \frac{1}{2t} + K_- \cdot \frac{e^{-t^2}}{t}$, avec : $K_- \in \mathbb{R}$.

Une telle fonction doit avoir une limite finie en 0 (et y être continue) donc on doit prendre : $K_+ = K_- = -\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, on a : $\forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \frac{1 - e^{-t^2}}{2t}$.

La fonction ainsi trouvée est la seule possible.

Réciproquement, cette fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ (par construction), admet une limite finie en 0 (avec par exemple un développement limité) qui vaut 0, et la fonction ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est même de classe C^∞ car développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$).

Enfin, on vérifie que le prolongement (encore noté y) est solution en 0 car : $0 \cdot y'(0) + (0^2 + 1) \cdot y(0) = 0$.

Finalement (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, qui est la fonction y trouvée au-dessus.

Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1.

Définition 2.1 : système différentiel linéaire d'ordre 1, système homogène associé, solution d'un tel système

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un entier : $n \geq 2$.

On appelle système différentiel linéaire d'ordre 1 un système du type :

$$(S) \quad X' = A(t) \cdot X + B(t), \text{ ou : } \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B(t), \text{ ou : } \begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t) \cdot x_1 + \dots + a_{1,n}(t) \cdot x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t) \cdot x_1 + \dots + a_{n,n}(t) \cdot x_n + b_n(t) \end{cases},$$

où A une fonction matricielle de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et B une fonction matricielle de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et X une fonction inconnue à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On appelle solution de (S) une fonction X définie d'un sous-intervalle : $J \subset I$, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, continue et dérivable sur J telle que :

$$\forall t \in J, X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t).$$

On appelle système linéaire homogène associé à (S) le système (SH) : $X' = A(t) \cdot X$.

Remarque : un tel système est équivalent à une équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1 du type : (E) $x' = a(t)(x) + b(t)$, (où a est une fonction de I dans $\mathcal{L}(F)$, b une fonction de I dans F avec F un K-espace vectoriel de dimension n) et où x est une fonction inconnue de J dans F, dérivable sur J.

Théorème 2.1 : solutions d'un système différentiel homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un entier : $n \geq 2$.

Soit : (SH) $X' = A \cdot X$, un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 (où A est une **matrice constante** appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Alors le système **admet des solutions sur $\mathbb{R}$** qui forment un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n.

En particulier, pour tout : $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, et tout : $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution du

$$\text{système (S) sur } \mathbb{R} : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ telle que de plus : } \forall 1 \leq i \leq n, x_i(t_0) = x_{0i}.$$

Théorème 2.2 : résolution pratique d'un système différentiel homogène à coefficients constants

Soit : (SH) $X' = A \cdot X$, un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 (où A est une matrice constante appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

• Si A est diagonalisable, alors : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \exists D$ diagonale, réelle ou complexe, $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Dans ce cas, si pour une fonction X de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, on pose : $Y = P^{-1} \cdot X$, alors :

(X est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (Y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$), et :

(X solution de (SH) sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (Y est solution de : $Y' = D \cdot Y$, sur $\mathbb{R}$).

Ce dernier système étant diagonal, il se ramène à la résolution de n équations scalaires d'ordre 1 indépendantes, et on obtient les solutions de (SH) en calculant : $X = P.Y$, pour les solutions Y trouvées.

• Si A est trigonalisable (ce qui est toujours le cas pour une matrice complexe), alors : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\exists T$ triangulaire supérieure, réelle ou complexes, $T = P^{-1}.A.P$.

Dans ce cas, si pour une fonction X de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, on pose : $Y = P^{-1}.X$, alors :

(X est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (Y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$), et :

(X solution de (SH) sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (Y est solution de : $Y' = T.Y$, sur $\mathbb{R}$).

Ce dernier système peut s'écrire :

$$\begin{cases} y_1' &= t_{1,1}.y_1 + \cdots + t_{1,n}.y_n \\ \vdots & \\ y_{n-1}' &= t_{n-1,n-1}.y_{n-1} + t_{n-1,n}.y_n \\ y_n' &= t_{n,n}.y_n \end{cases}$$

et se ramène à la résolution successive de n équations scalaires d'ordre 1 avec second membre, en commençant par la dernière puis en remontant, les solutions de (SH) s'obtenant ensuite en calculant : $X = P.Y$, pour les solutions Y trouvées auparavant.

Exemple : résolution d'un système différentiel 3x3 homogène à matrice constante

Résoudre le système différentiel : $X' = A.X$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Puisque le système est linéaire, à coefficients constants et homogène, il admet des solutions sur $\mathbb{R}$. La matrice A est diagonalisable (car symétrique réelle), et on peut la diagonaliser avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et : } D = P^{-1}.A.P.$$

En posant : $X = P.Y$, on a l'équivalence : (X dérivable sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (Y dérivable sur $\mathbb{R}$).

Puis : X est solution de (S) si et seulement si : $Y' = P^{-1}.A.P.Y = D.Y$, avec : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Le système devient alors immédiat et les solutions sont : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1.e^t \\ C_2.e^t \\ C_3.e^{-t} \end{pmatrix}$, avec : $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Enfin : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P.Y(t) = P \cdot \begin{pmatrix} C_1.e^t \\ C_2.e^t \\ C_3.e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1.e^t \\ C_2.e^t + C_3.e^{-t} \\ -C_2.e^t + C_3.e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Remarque : résolution pratique d'un système différentiel à partie homogène constante

Soit : (S) $X' = A.X + B(t)$, un système différentiel linéaire d'ordre 1 (où A est une matrice constante appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et B une fonction matricielle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).

Les solutions de (S) sont : $X = Y_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i.X_i$, où (X_i) est une base de solutions de $S_i(\text{SH})$, Y_0 une solution particulière de (S) et les λ_i sont quelconques dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La matrice Y_0 peut être obtenue de la façon suivante :

- lorsque A est diagonalisable, on résout le système intermédiaire : $Y' = D.Y + P^{-1}.B(t)$,
- lorsque A est trigonalisable, on résout le système intermédiaire : $Y' = T.Y + P^{-1}.B(t)$.

Exemple : résolution d'un système différentiel 3x3 à matrice constante et second membre

Résoudre le système : $X' = A.X + B(t)$, avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et : $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce système a des solutions sur $\mathbb{R}$ puisque A est constante et B est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Au lieu de résoudre le système en Y : $Y' = D.Y$, on résout : $Y' = D.Y + P^{-1}.B(t)$, soit :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + t \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = -y_3 \end{cases}, \text{ ce qui donne : } \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1.e^t - t - 1 \\ C_2.e^t \\ C_3.e^{-t} \end{pmatrix}, \text{ puis :}$$

$$X(t) = P.Y(t) = P \cdot \begin{pmatrix} C_1.e^t - t - 1 \\ C_2.e^t \\ C_3.e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1.e^t - t - 1 \\ C_2.e^t + C_3.e^{-t} \\ -C_2.e^t + C_3.e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.3 : de Cauchy-Lipschitz, systèmes différentiels linéaires version « conditions initiales »

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un entier : $n \geq 2$.

Soit : (S) $X' = A(t).X + B(t)$, un système différentiel linéaire d'ordre 1 (où A est une fonction matricielle de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et B une fonction matricielle de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).

Si A et B sont continues sur I, alors : $\forall t_0 \in I, \forall (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, il existe une unique

solution : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, du système (S) sur I telle que de plus : $\forall 1 \leq i \leq n, x_i(t_0) = x_{0i}$.

Théorèmes 2.4 et 2.5 : structure et dimension de l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire homogène

Soit : (SH) $X' = A(t).X$, un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 (où A est une fonction matricielle continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

L'ensemble **$S_I(\text{SH})$** des solutions de (SH) sur I peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et c'est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ ou de $C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

De plus : $\dim(S_I(\text{SH})) = n$.

Remarque :

- Pour un système différentiel homogène : (SH) $X' = A(t).X$, où A est une fonction continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les solutions d'un tel système sont : $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i.X_i$, où $(X_1, \dots, X_n)$ forme une base de $S_I(\text{SH})$.
- Pour un système différentiel avec second membre : (S) $X' = A(t).X + B(t)$, où A et B sont des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, les solutions d'un tel système sont : $X = Y_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i.X_i$, où $(X_1, \dots, X_n)$ forme une base de $S_I(\text{SH})$ et Y_0 est une solution particulière du système.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2.**Définition 3.1 : équations différentielles linéaires d'ordre 2, équation homogène associée, solution d'une telle équation**

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2, une équation du type :

$$(E) \alpha(t).y'' + \beta(t).y' + \gamma(t).y = \delta(t),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et y est une fonction inconnue définie d'un intervalle : $J \subset I$, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 3.2 : de Cauchy-Lipschitz, équations différentielles d'ordre 2, version « conditions initiales »

Soit : (E) $y'' + a(t).y' + b(t).y = c(t)$, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 « résolue en y'' » (où a, b, c sont des fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour tout couple : $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, et toute valeur : $t_0 \in I$, il existe une unique solution φ de (E) sur I , telle que de plus :

$$\varphi(t_0) = y_0, \varphi'(t_0) = y'_0.$$

Théorème 3.3 : structure de l'ensemble des solutions d'une équation homogène d'ordre 2

Soit : (EH) $y'' + a(t).y' + b(t).y = 0$, une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 (où a, b sont des fonctions définies et continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

L'ensemble des solutions de (EH) noté $S_1(\text{EH})$ sur tout intervalle inclus dans I forme un $\mathbb{R}$ - ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Théorème 3.5 : résolution pratique d'une équation homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Soit : (EH) $a.y'' + b.y' + c.y = 0$, une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 (où a, b, c sont des éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$).

On appelle équation caractéristique associée à cette équation différentielle l'équation : $a.r^2 + b.r + c = 0$. On distingue alors les cas suivants :

- si l'équation caractéristique admet **deux racines distinctes** r_1 et r_2 (réelles dans $\mathbb{R}$ ou complexes dans $\mathbb{C}$), (EH) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $\varphi(t) = \alpha.e^{r_1.t} + \beta.e^{r_2.t}$, où α et β sont des constantes réelles ou complexes quelconques,
- si l'équation caractéristique admet **une racine double** r (réelle ou complexe suivant le cas), (EH) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $\varphi(t) = (\alpha.t + \beta).e^{r.t}$, où α et β sont des constantes réelles ou complexes quelconques.
- si l'équation caractéristique admet **dans le cas réel deux racines complexes conjuguées** $(p \pm i.\omega)$, (EH) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $\varphi(t) = [\alpha.\cos(\omega.t) + \beta.\sin(\omega.t)].e^{p.t}$, où α et β sont des constantes réelles quelconques.

Exemple :

Résoudre : $y'' + 2.y' + 3.y = 0$.

L'équation est linéaire, homogène du second ordre à coefficients constants et admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2.r + 3 = 0$, dont les racines sont : $-1 \pm i.\sqrt{2}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-t}.(\alpha.\cos(t.\sqrt{2}) + \beta.\sin(t.\sqrt{2})), \text{ avec : } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Théorème 3.7 : cas particulier d'une équation du second ordre linéaire à coefficients constants et second membre produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Soit : (E) $a.y'' + b.y' + c.y = P(t).e^{\lambda.t}$, une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 2 (où a, b, c, λ sont des éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$, et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Il existe une solution de (E) de la forme $t^k.Q(t).e^{\lambda.t}$, où Q est un polynôme de même degré que P et k est un entier égal à la multiplicité de λ comme racine (éventuelle) de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.

Exemple d'application de cette méthode :

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 3.y' + 2.y = e^{-t} + 6.e^t$.

L'équation est du second ordre, linéaire, à coefficients constants pour la partie homogène et le second membre est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Donc l'équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = a.e^{-t} + b.e^{-2.t}$.

En utilisant le principe de superposition :

- avec $6.e^t$ comme second membre, on cherche une solution sous la forme : $\lambda.e^t$, puisque 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique associée, et on trouve : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^t$,
- avec e^{-t} comme second membre, on cherche une solution sous la forme : $\lambda.t.e^{-t}$, puisque -1 est racine simple de l'équation caractéristique associée, et on trouve : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = t.e^{-t}$.

Finalement, les solutions de l'équation complète sont :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^t + t.e^{-t} + a.e^{-t} + b.e^{-2.t}, \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$