

Equations différentielles.

Exercices 2011-2012

Exercices de base.

Dans tous les exercices, même si la question n'est pas posée, on pourra se demander s'il est possible, a priori, de se faire une idée sur la structure de l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, en étudiant les éventuels raccordements possibles :

- $x.y' - y - (x^2 + 1) = 0$.
- $x.(1 + x^2).y' - (x^2 - 1).y + 2.x = 0$.
- $x^3.\ln|x|.y' - x^2.y - (2.\ln|x| + 1) = 0$.
- $\sin(x).y' - \cos(x).y - \sin(x) = 0$. (sur $\mathbb{R}$)
- $x^n.y' - \alpha.y = 0$, où : $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^{+*}$.
- $x^2.y' + y - 1 = 0$.
- $2x.(1 - x).y' + (1 - 2x).y - 1 = 0$
- $x.y' - 2.y - x^4 = 0$.
- $\sin(x).y' - y + 1 = 0$. (sur $\mathbb{R}$)

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant : $x.y' - y + \ln(x) = 0$, avec : $y(1) = 0$.

Problèmes liés à une équation différentielle du premier ordre.

3. Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation : $x.y' - 3.y - 2.x^2 = 0$.
On pourra aussi commencer par trouver un ensemble dans lequel ces points d'inflexion sont inclus.

4. Pour : $k \in \mathbb{R}$, trouver toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x t.f(t).dt = k.x.\int_0^x f(t).dt.$$

Systèmes différentiels à coefficients constants.

5. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a.
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 - x_3 - t \\ x_2' = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2t \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 - t \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin(t) \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + m.x_2 + a.t \\ x_2' = -mx_1 + x_2 + b.t \end{cases}, (m, a, b) \in \mathbb{R}^3$$

f.
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - x_3 + 1 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 + e^t \\ x_3' = 2x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre les équations du second ordre à coefficients constants suivantes :

a. $y'' - 2.y' + m.y = \cos(x)$, où : $m \in \mathbb{R}$.

b. $y'' - 3.y' + 2.y = x.e^{|x|}$ sur $\mathbb{R}$.

c. $y'' - 4.y' + 3.y = \frac{2x+1}{x^2}.e^x$.

d. $y'' + y = \max(x, 0)$.

Problèmes liés à des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

7. Trouver toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = x.e^x$.

Utilisation de changements de variable.

8. Résoudre les équations différentielles suivantes, à l'aide des changements de variable indiqués.

a. $y'' + y' - e^{2t}.y = \operatorname{ch}(t) + 3.\operatorname{sh}(t)$, avec le changement de variable : $u = e^{-t}$.

b. $(t^2 + 1)^2.y'' + 2t.(t^2 + 1).y' + y = (t^2 + 1)^2$, avec le changement de variable : $u = \operatorname{Arctan}(t)$.

Dans les deux cas, on s'efforcera de préciser théoriquement les différentes opérations effectuées.

Utilisation de séries entières.

9. Résoudre les problèmes suivants à l'aide de séries entières :

a. $2x.y'' + y' - y = 0$.

On sommerait les solutions trouvées.

- b. $y'' + x.y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 c. $4.(1 - t^2).y'' - 4.t.y' + y = 0$.

Exercices plus.

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

10. Résoudre sur un intervalle où sinus ne s'annule pas l'équation : $\sin^3(x).y' - 2.\cos(x).y = 0$.
 Donner les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$, et préciser en particulier la dimension de l'espace vectoriel formé par ces solutions.
11. Résoudre l'équation : $y' - y - \ln(x) = 0$.
 Existe-t-il des solutions bornées ?
 On pourra commencer, pour la deuxième question, par étudier l'intégrabilité d'une fonction sur $[1, +\infty)$.

Utilisation de séries entières.

12. Résoudre les problèmes suivants à l'aide de séries entières :
- a. $x^2.(1 - x).y'' - x.(1 + x).y' + y = 0$,
 On utilisera la méthode de Lagrange pour trouver toutes les solutions.
- b. $x.(1 - x).y'' + (\lambda - 3.x).y' - y = 0$, ($\lambda \in \mathbb{R}$)
 Sommer alors les solutions trouvées dans le cas où : $\lambda = 1$.
- c. Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle :
 $y'' + 2.x.y' + 2.y = 0$,
 puis exprimer parmi ces séries entières celles dont la somme est une fonction paire.

Problème lié à une équation différentielle du premier, du second ordre ou d'ordre supérieur.

13. a. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et qui tend vers 0 en $+\infty$.
 Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = f$, à l'aide d'une fonction exprimée sous forme de primitive et montrer que toute solution de cette équation tend vers 0 en $+\infty$.
- b. Montrer que si une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $(f' + f)$ tend vers L en $+\infty$, alors f tend aussi vers L en $+\infty$.
14. Soit α un réel strictement positif (ou un complexe de partie réelle strictement positive).
 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), telle que $(f' + \alpha.f)$ tend vers 0 en $+\infty$.
 Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
15. On considère le problème suivant : trouver les fonctions de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que :
 $\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$.
- a. Montrer qu'une telle solution est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 b. En déduire une équation du second ordre linéaire dont f est solution.
 c. Résoudre cette équation à l'aide du changement de variable : $t = \ln(x)$.
 d. Résoudre alors le problème initial.
16. Soit f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, monotone, C^1 sur $\mathbb{R}^+$, admettant une limite finie en $+\infty$. Soit : (E) $y'' + y = f(x)$.
- a. Donner la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^+$.
 b. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$ est bornée.
 c. Montrer que (E) admet une unique solution y_1 ayant une limite finie en $+\infty$.
 Ecrire y_1 avec une intégrale.
17. Soit l'équation différentielle : (E) $y^{(4)} - 2.y^{(3)} + 2.y'' - 2.y' + y = 0$.
- a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si : $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$, est solution d'un système différentiel :
- (S) $X' = A.X$, où A est une matrice que l'on précisera (on pourra s'inspirer de l'équivalence équation-système vue en cours).
- b. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
 c. Montrer que : $\mathbb{C}^4 = \ker(A - i.I_4) \oplus \ker(A + i.I_4) \oplus \ker((A - I_4)^2)$.
 d. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}.A.P$ soit une matrice B définie par blocs de

la façon suivante : $B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Résoudre l'équation (E).

Classe d'équations différentielles particulières.

18. Equations d'Euler :

Equations du type : (E) $x^2.y'' + a.x.y' + b.y = f(x)$, où : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, avec : $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

Montrer que le changement de variable : $t = \ln|x|$ permet de ramener (E) à une équation plus simple en t .

Résoudre alors :

a. $x^2.y'' - 2.y = x$ (peut-on envisager un autre méthode pour cette équation ?)

b. $x^2.y'' + x.y' + y = x.\ln|x|$.

Exemples de problèmes théoriques.

19. Soit y une solution maximale de : $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$.

Montrer que l'intervalle de définition de y n'est pas majoré et que y tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

20. Déterminer la (ou les) solution(s) maximale(s) du problème de Cauchy où y est une fonction inconnue à

valeurs réelles : $y' = \frac{3.x^4 + y^4}{4.x^3.y}$, $x > 0$, avec : $y(1) = 2$.

21. Etude de l'équation : (E) $y' - \frac{1}{x}.y + \frac{e^x}{x}.y^2 = 0$.

On cherche à résoudre ce problème sur : $I \subset \mathbb{R}^{+*}$

a. Dans l'hypothèse où la fonction y ne s'annule pas sur un intervalle : $J \subset \mathbb{R}^{+*}$, résoudre cette équation à

l'aide de la fonction inconnue auxiliaire : $z = \frac{1}{y}$.

b. Donner la fonction f , définie de : $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui ramène l'équation (E) à : $y' = f(x, y)$, et vérifier que f est de classe C^1 sur U .

c. Montrer alors que : $\forall (x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy : (C_{x_0, y_0}) ($y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$) admet une unique solution maximale sur un intervalle ouvert.

Trouver cette solution si l'on suppose : $y_0 = 0$.

On suppose désormais que : $y_0 \neq 0$.

d. Montrer que parmi les solutions trouvées en a, il en existe une seule qui passe par (x_0, y_0) .

On précisera la valeur de la constante λ qui intervient dans l'expression de cette solution.

e. On note φ l'application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, et γ sa courbe représentative.

Etudier φ et tracer γ .

On va discuter de la solution maximale suivant la position du point (x_0, y_0) .

f. • On suppose que : $0 < y_0 < \varphi(x_0)$.

Montrer alors que : $\lambda \geq -1$, que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et tracer l'allure de la courbe représentative d'une telle solution.

• On suppose que : $y_0 = \varphi(x_0)$.

Que vaut λ et que dire de la solution maximale dans ce cas ?

• On suppose que : $y_0 > \varphi(x_0)$.

Préciser la valeur de λ , puis montrer que la solution maximale est définie sur un intervalle $[\alpha_0, +\infty)$, où l'on précisera α_0 , et tracer l'allure de sa courbe représentative.

• On suppose que : $y_0 < 0$.

Donner l'intervalle de définition de la solution maximale et la représenter.

g. Rassembler ces courbes sur un même schéma et constater qu'elles forment bien une partition de U .