

# Espaces vectoriels normés (corrigé des indispensables).

## Normes générales.

1. On a :  $2\|x\| = \|2x\| = \|(x+y) + (x-y)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$ .

De même :  $2\|y\| = \|2y\| = \|(x+y) - (x-y)\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$ .

En additionnant, on obtient :  $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$ .

2. On peut transformer la première inégalité en :  $\|y-x\| \leq a\|x\|$ .

Donc :  $\|y-x\| \leq a\|x-y+y\| \leq a(\|x-y\| + \|y\|)$ , et donc :  $(1-a)\|y-x\| \leq a\|y\|$ .

En divisant par  $\|y\|$ , on obtient bien :  $\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}$ .

3. • Si  $N$  est une norme sur  $E$ , alors :  $\forall x \in E, (u(x) = 0) \Rightarrow (N(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ , et  $u$  est injective.

• Si  $u$  est injective, alors :

$\forall x \in E, N(x) \in \mathbb{R}^+$ ,

$\forall x \in E, (N(x) = 0) \Rightarrow (\|u(x)\| = 0) \Rightarrow (u(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ ,

$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, N(\lambda x) = \|u(\lambda x)\| = \|\lambda u(x)\| = |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| N(x)$ ,

$\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) = \|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x) + N(y)$ ,

et  $N$  est bien une norme sur  $E$ .

4. Si  $N$  est une norme, alors :  $N((1,0,\dots,0)) = a_1 > 0$ , car :  $(1,0,\dots,0) \neq 0$ .

De même :  $\forall 2 \leq i \leq n, a_i > 0$ .

Réciproquement, si tous les  $a_i$  sont strictement positifs, alors :

•  $\forall x \in \mathbf{K}^n, N(x) \in \mathbb{R}^+$ ,

•  $\forall x \in \mathbf{K}^n, (N(x) = 0) \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, (0 \leq a_i |x_i| \leq N(x) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n| = 0) \Rightarrow (x_i = 0)$ , et donc :  $x = 0$ ,

•  $\forall x \in \mathbf{K}^n, \forall \lambda \in \mathbf{K}, N(\lambda x) = a_1 |\lambda x_1| + \dots + a_n |\lambda x_n| = |\lambda| (a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|) = |\lambda| N(x)$ ,

•  $\forall (x,y) \in (\mathbf{K}^n)^2, N(x+y) = a_1 |x_1 + y_1| + \dots + a_n |x_n + y_n| \leq (a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|) + (a_1 |y_1| + \dots + a_n |y_n|)$ , et :  
 $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ .

Donc  $N$  est une norme sur  $\mathbf{K}^n$ , et la condition précédente est bien nécessaire et suffisante.

5. • Les fonctions considérées étant de classe  $C^1$  sur le segment  $[0,1]$ , l'application est bien définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

• Si de plus on a :  $f \in E$ , telle que :  $N(f) = 0$ , alors :  $|f(0)| = 0$ , et :  $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$ .

$|f'|$  étant alors continue et positive sur  $[0,1]$ , elle y est nulle et  $f$  est constante sur  $[0,1]$ .

Comme enfin elle s'annule en 0,  $f$  est la fonction nulle.

• Pour :  $f \in E$ , et :  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il est immédiat par linéarité de la dérivation et de l'intégration sur  $[0,1]$  que :

$N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ .

• Enfin :  $\forall (f,g) \in E^2$ ,

$N(f+g) = |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |f'(t) + g'(t)| dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N(f) + N(g)$ .

Donc  $N$  définit bien une norme sur  $E$ .

## Suites et comparaisons de normes.

6. Notons :  $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ .

a. Les fonctions  $f_n$  sont affines sur les deux sous-intervalles et coïncident en  $1/n$ .

Donc elles sont bien continues de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Puis :

- $N_1(f_n) = \int_0^1 (n - n^2 t) dt = \left[ nt - n^2 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2},$

- $N_2(f_n) = \sqrt{\int_0^1 (n - n^2 t)^2 dt} = \sqrt{\left[ n^2 t - n^3 t^2 + n^4 \cdot \frac{t^3}{3} \right]_0^1} = \frac{\sqrt{n}}{3},$

- $N_\infty(f_n) = n.$

b. On a immédiatement :  $\forall f \in E,$

- $N_1(f) \leq \int_0^1 N_\infty(f) dt \leq N_\infty(f) \cdot \int_0^1 dt = 1 \cdot N_\infty(f),$

- $N_2(f)^2 \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2 dt \leq N_\infty(f)^2 \cdot \int_0^1 dt = 1 \cdot N_\infty(f)^2,$  soit :  $N_2(f) \leq 1 \cdot N_\infty(f),$

- $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \cdot 1 dt \leq \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = 1 \cdot N_2(f),$

avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans E muni de son produit scalaire canonique.

En effet,  $\left(\frac{1}{n} \cdot f_n\right)$  tend vers 0 pour les normes  $N_1$  et  $N_2$  mais pas pour  $N_\infty$ .

De même,  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot f_n\right)$  tend vers 0 pour  $N_1$ , pas pour  $N_2$ .

c. Supposons que  $\beta$  existe, avec :  $\beta > 0.$

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta \cdot N_\infty(f_n) \leq N_1(f_n),$  soit :  $\beta \cdot n \leq \frac{1}{2},$  ce qui est impossible.

De même, si  $\beta'$  existe, alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta' \cdot N_\infty(f_n) \leq N_2(f_n),$  et :  $\beta' \cdot n \leq \frac{\sqrt{n}}{3},$  encore impossible.

Enfin, si  $\beta''$  existe :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta'' \cdot N_2(f_n) \leq N_1(f_n),$  et :  $\beta'' \cdot \frac{\sqrt{n}}{3} \leq \frac{1}{2},$  toujours impossible.

7. a. Puisque :  $E \subset C^0([0,1], \mathbb{R}),$  la norme N est simplement la norme  $N_\infty$  de  $C^0([0,1], \mathbb{R})$  induite sur E.

A ce titre, c'est bien une norme sur  $\mathbb{R}.$

$N'$  est également une norme sur E, car :

- $\forall f \in E, f'$  est continue sur  $[0,1],$  et  $\sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$  existe (et appartient à  $\mathbb{R}^+),$
- $\forall f \in E, (N'(f) = 0) \Rightarrow (N_\infty(f') = 0) \Rightarrow (f' = 0) \Rightarrow (f = \text{cste}) \Rightarrow (f = 0, \text{ car : } f(0) = 0).$
- $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda \cdot f) = N_\infty(\lambda \cdot f') = |\lambda| \cdot N_\infty(f') = |\lambda| \cdot N'(f),$
- $\forall (f, g) \in E^2, N'(f + g) = N_\infty(f' + g') \leq N_\infty(f') + N_\infty(g') = N'(f) + N'(g).$

b. Soit :  $f \in E.$

Alors :  $\forall t \in [0,1], \exists c \in [0,1], f(t) = f(t) - f(0) = (t - 0) \cdot f'(c),$  et donc :  $|f(t)| \leq |f'(c)| \leq N'(f).$

Cette majoration étant valable pour tout t, on en déduit que :  $N(f) \leq N'(f),$  d'où :  $N \leq N'.$

c. Considérons les fonctions  $f_n$  définies par :  $\forall t \in [0,1], f_n(t) = t^n.$

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, N(f_n) = 1,$  et :  $N'(f_n) = n,$  car :  $\forall t \in [0,1], f_n'(t) = n \cdot t^{n-1}.$

Donc si maintenant on pouvait trouver :  $\alpha > 0,$  telle que :  $\alpha \cdot N' \leq N,$  alors on aurait :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \cdot n \leq 1,$  ce qui est impossible, et donc un tel  $\alpha$  n'existe pas.

8. a. • Pour le polynôme nul,  $N(P)$  et  $N_\infty(P)$  existent et sont des réels positifs.

Si P est non nul, alors  $N_\infty(P)$  existe comme plus grande valeur d'un nombre fini de réels (positifs) et c'est un réel positif.

De même, puisque les coefficients d'un polynôme sont nuls à partir d'un certain rang, la série qui définit  $N(P)$  a ses termes nuls à partir d'un certain rang et donc converge.

Enfin, tous les termes de la série étant positifs, sa somme l'est aussi.

Pour les démonstrations suivantes, on ne distinguera plus le cas du polynôme nul.

- Pour :  $P \in \mathbf{K}[X],$  et :  $\lambda \in \mathbf{K}, \forall 0 \leq k \leq \text{deg}(P), |\lambda \cdot a_k| = |\lambda| \cdot |a_k| \leq |\lambda| \cdot N_\infty(P),$  donc :  $N_\infty(\lambda \cdot P) \leq |\lambda| \cdot N_\infty(P).$

En distinguant au besoin, le cas où  $\lambda$  est nul, on en déduit classiquement l'inégalité inverse, et donc

finalement l'égalité :  $N_\infty(\lambda.P) = |\lambda|.N_\infty(P)$ .

$$\text{Puis : } N(\lambda.P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda.a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |\lambda|.|a_k|.2^{-k} = |\lambda|. \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} = |\lambda|. \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = |\lambda|.N(P).$$

• Soit :  $P \in \mathbf{K}[X]$ , non nul  $a_N$ .

Alors  $P$  comporte au moins un coefficient non nul et :  $N_\infty(P) \geq |a_N| > 0$ , d'où le résultat par contraposée.

$$\text{De même : } N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} \geq |a_N|.2^{-N} > 0.$$

• Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes avec :  $N = \max(\deg(P), \deg(Q))$  et de coefficients  $a_k$  et  $b_k$ .

Alors :  $\forall 0 \leq k \leq N$ ,  $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ , puis :  $N_\infty(P + Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ .

$$\text{De même : } N(P + Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k + b_k|.2^{-k} \leq \sum_{k=0}^N (|a_k| + |b_k|).2^{-k} = \sum_{k=0}^N |a_k|.2^{-k} + \sum_{k=0}^N |b_k|.2^{-k} = N(P) + N(Q).$$

$$\text{b. Il est immédiat que : } \forall P \in \mathbf{K}[X], N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.2^{-k} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|.2^{-k} \leq N_\infty(P). \sum_{k=0}^{\deg(P)} 2^{-k} \leq N_\infty(P). \frac{1}{1-2^{-1}}.$$

On en déduit donc que :  $N \leq 2.N_\infty$ , et :  $\alpha = 2$ , répond à la question.

c. Considérons la suite :  $(P_n) = (X^n)$ .

Alors :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $N_\infty(P_n) = 1$ , et la suite  $(P_n)$  ne tend pas vers 0 pour  $N_\infty$ .

$$\text{De plus : } \forall n \in \mathbf{N}, N(P_n) = \sum_{k=0}^{\deg(P_n)} |a_k|.2^{-k} = 2^{-n}, \text{ et la suite } (P_n) \text{ converge vers 0 pour } N.$$

Or si on pouvait trouver :  $\beta > 0$ , tel que :  $\beta.N_\infty \leq N$ , alors la convergence de  $(P_n)$  vers 0 pour la norme  $N$  entraînerait (avec le théorème des gendarmes dans  $\mathbb{R}$ ), la convergence de  $(P_n)$  vers 0 pour  $N_\infty$ .

Donc un tel  $\beta$  n'existe pas.

9. On va ici déterminer explicitement la suite  $(X_n)$ .

Pour cela, la matrice  $A$  a pour polynôme caractéristique :  $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda).\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)$ .

$A$  est donc diagonalisable, et on peut la diagonaliser en cherchant ses espaces propres :

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ et : } E_{\frac{5}{6}}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

On peut alors écrire :  $A = P.D.P^{-1}$ , avec :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ , et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, X_n = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \frac{7}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Puisque les deux suites coordonnées liées à  $(X_n)$  dans la base canonique convergent,  $(X_n)$  est donc une

suite convergente, et :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

*Remarque* : dans une version vectorielle, si on note  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ,  $p_1$  et  $p_{\frac{5}{6}}$ , les projecteurs associés à la décomposition de  $\mathbb{R}^2$  à l'aide des sous-espaces propres de  $A$ , alors :

$$u = 1.p_1 + \frac{5}{6}.p_{\frac{5}{6}}, \text{ et : } \forall n \in \mathbf{N}, u^n = 1.p_1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n.p_{\frac{5}{6}}, \text{ puis : } u^n(2,1) = 1.p_1(2,1) + \left(\frac{5}{6}\right)^n.p_{\frac{5}{6}}(2,1).$$

On constate alors que  $(u^n(2,1))$  converge vers :  $p_1(2,1) = \frac{7}{5} \cdot (1,1)$ , car :  $(2,1) = \frac{7}{5} \cdot (1,1) + \frac{1}{5} \cdot (3,-2)$ .

### Suites et normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

10. a. Chaque somme est, pour une matrice A la somme des modules des coefficients de la ligne.

$\|A\|$  représente donc la plus grande de ces sommes.

b. Il est clair que pour une matrice A,  $\|A\|$  existe et est un réel positif, comme plus grand élément d'une famille finie de réels positifs.

Puis :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , si :  $\|A\| = 0$ , alors :  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|A\| = 0$ , et :  $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ , d'où on déduit que tous les coefficients de la matrice A sont nuls, puis enfin que A est nulle.

Pour :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , et :  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on a :  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq |\lambda| \cdot \|A\|$ , d'où :  $\|\lambda A\| \leq |\lambda| \cdot \|A\|$ , et en distinguant au besoin le cas où  $\lambda$  est nul, on en déduit l'inégalité inverse puis l'égalité :  $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ .

Enfin :  $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$ , et :  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

c. Soit donc :  $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ .

Alors :  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot \|B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , d'où on déduit que :  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

d. Pour :  $(A,X) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ , et en notant :  $Y = A \cdot X$ , on a :

$$\forall 1 \leq i \leq n, |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq N_\infty(X) \cdot \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq N_\infty(X) \cdot \|A\|,$$

d'où on déduit :  $N_\infty(A \cdot X) = N_\infty(Y) \leq \|A\| \cdot N_\infty(X)$ .

e. Soit alors  $\lambda$  une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

On a :  $A \cdot X = \lambda \cdot X$ , donc :  $N_\infty(A \cdot X) = |\lambda| \cdot N_\infty(X) \leq \|A\| \cdot N_\infty(X)$ ,

et en divisant par  $N_\infty(X)$ , non nulle puisque X est non nul, on en déduit finalement que :  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

11. a. La suite  $(M^{2^n})$  est une suite extraite de  $(M^n)$  donc elle converge vers la même limite, c'est-à-dire A.

b. Puisqu'on peut écrire :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $M^{2^n} = M^n \cdot M^n$ , on en déduit aussi que  $(M^{2^n})$  converge vers  $A^2$ .

L'unicité d'une limite de suite montre donc que :  $A = A^2$ .

12. a. Soit  $\| \cdot \|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

On peut écrire :  $\forall p \in \mathbf{N}$ ,  $\|(B \cdot A)^{p+1}\| = \|B \cdot (A \cdot B)^p \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|(A \cdot B)^p\| \cdot \|A\|$ , et le majorant tendant vers 0, on en déduit que  $((B \cdot A)^p)$  tend aussi vers 0.

b. On peut le montrer entièrement avec :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \|P \cdot Q - (A^p \cdot B^p)\| = \|P \cdot Q - A^p \cdot Q + A^p \cdot Q - A^p \cdot B^p\| \leq \|P - A^p\| \cdot \|Q\| + \|A^p\| \cdot \|Q - B^p\|.$$

Comme  $(A^p)$  converge, c'est une suite bornée et le théorème des gendarmes montre que  $(A^p \cdot B^p)$  tend vers P.Q alors que  $(B^p \cdot A^p)$  tend vers Q.P.

Mais comme c'est deux fois la même suite, par unicité de la limite, on en déduit que : P.Q = Q.P.

c. On constate que, de même que dans la question précédente, la suite constante  $(A_p \cdot A_p^{-1})$  (égale à  $I_n$ ) converge vers A.B.

Donc par unicité de la limite, on en déduit que : A.B =  $I_n$ , et : B =  $A^{-1}$ .

d. Considérons la suite  $(\frac{1}{p} \cdot I_n)_{p \geq 1}$ .

Alors cette suite est bien une suite de matrices inversibles, et qui converge vers 0.

Or d'après la question c, si la suite des inverses convergeait (vers B) alors la matrice nulle serait inversible et son inverse serait B.

Donc la suite des inverses diverge.

### Topologie.

13. a.  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont fermés dans  $\mathbb{R}$ , car ce sont les complémentaires de réunions infinies d'ouverts, à savoir :

- $(-\infty, 0[ \cup \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} ]n, n+1[ \right)$ , pour  $\mathbb{N}$ , et :
- $\left( \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} ]n, n+1[ \right)$  pour  $\mathbb{Z}$ .

Ils ne sont pas ouverts car 0 n'est pas un point intérieur.

En effet toute boule ouverte centrée en 0 (donc ici tout intervalle ouvert de type  $] -r, +r[$ ) contient des valeurs qui ne sont pas entières et donc qui sortent de  $\mathbb{N}$  et de  $\mathbb{Z}$ , par exemple  $\min\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

$\mathbb{Q}$  n'est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}$  puisque :

- 0 par exemple n'est pas intérieur à  $\mathbb{Q}$  car tout intervalle ouvert  $] -r, +r[$  centré en 0 contient des irrationnels :  $\exists n \in \mathbb{N}, 10^{-n} < r$ , et  $\frac{10^{-n}}{\sqrt{2}}$  est dans  $] -r, +r[$  mais pas dans  $\mathbb{Q}$ .

- de même, pour un point du complémentaire  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  (par exemple  $\sqrt{2}$ ), tout intervalle centré en ce point ne sera pas inclus dans  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  car il contiendra des rationnels.

On peut aussi dire qu'il existe une suite convergente d'éléments de  $\mathbb{Q}$ , dont la limite n'est pas dans  $\mathbb{Q}$  (par exemple la suite des approximations décimales de  $\sqrt{2}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 10^{-n} \cdot E(10^n \cdot \sqrt{2})$ , qui tend vers  $\sqrt{2}$ ) et donc  $\mathbb{Q}$  n'est pas fermé.

b. L'ensemble proposé est une réunion infinie d'ouverts donc c'est un ouvert dans  $\mathbb{R}$  : même principe de démonstration qu'au-dessus.

D'autre part, ça n'est pas un fermé car la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ ,

c'est-à-dire la suite des milieux des intervalles, converge mais vers une limite qui est 0 et qui est hors de

l'ensemble :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right[$ .

c. L'ensemble (notons le F) est fermé dans  $\mathbb{R}^3$ .

En effet, si une suite :  $(u_n) = ((a_n, b_n, c_n))$ , de points de F converge vers :  $u = (a, b, c)$ , alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, 1], b_n \in [0, 1], c_n \in [0, +\infty)$ ,
- les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent respectivement vers a, b et c.
- en passant à la limite dans les inégalités du premier point, on a :  $a \in [0, 1], b \in [0, 1], c \in [0, +\infty)$ , et la limite u est bien dans F.

Il n'est pas ouvert car tout boule centrée en  $(0, 0, 0)$  (qui est dans F) de rayon r n'est pas incluse dans F

car le point  $\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)$  est dans la boule mais pas dans F.

d. Si on note H cet ensemble, alors il a par exemple une équation :  $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (ou « = b », si on considère un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$ ), et l'un des  $a_i$  est non nul (on supposera dans la suite que c'est  $a_n$ ).

Alors H est fermé car si  $(u_p)$  est une suite d'éléments de H, avec :  $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = (x_{p,1}, \dots, x_{p,n})$ , qui converge vers :  $u = (x_1, \dots, x_n)$ , alors :

- $\forall 1 \leq i \leq n, (x_{p,i})$  converge vers  $x_i$ ,
- $\forall p \in \mathbb{N}, a_1 \cdot x_{p,1} + \dots + a_n \cdot x_{p,n} = 0$ , puisque ce sont des points de H,
- en passant à la limite dans l'égalité précédente on en déduit que :  $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$ , et :  $u \in H$ .

H par ailleurs n'est pas ouvert car pour :  $u = (x_1, \dots, x_n) \in H$ , et quelque soit :  $r > 0$ , la boule ouverte (par exemple pour la norme infinie) centrée en u et de rayon r n'est pas incluse dans H.

En effet le point :  $u' = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \frac{r}{2})$ ,

- est dans la boule car :  $N_\infty(u - u') = \max(0, \dots, 0, \frac{r}{2}) = \frac{r}{2} < r$ ,
- n'est pas dans H car :  $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot (x_n + \frac{r}{2}) = (a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n) + a_n \cdot \frac{r}{2} = 0 + a_n \cdot \frac{r}{2} \neq 0$ .

14. On va utiliser une norme N quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit donc :  $(a, b) \in (A+B)$ , et donc :  $a \in A, b \in B$ .

Puisque A est ouvert, on sait que :  $\exists r > 0, B(a, r) \subset A$ .

Montrons alors que :  $B(a+b, r) \subset (A+B)$ .

Pour cela, soit :  $x \in B(a+b, r)$ , et posons :  $\alpha = x - b$ .

Alors :  $N(x - (a+b)) < r$ , et donc :  $N(\alpha - a) < r$ , soit :  $\alpha \in B(a, r)$ , et donc :  $\alpha \in A$ .

Autrement dit :  $x = \alpha + b$ , avec :  $\alpha \in A$ , et :  $b \in B$ , ce qui s'écrit entraîne :  $x \in (A+B)$ .

On vient de montrer que :  $B(a+b, r) \subset (A+B)$ , et  $(A+B)$  est bien un ensemble ouvert.

*Remarque* : on peut constater en reprenant la démonstration précédente, qu'il suffit que l'un des deux ensembles A ou B soit ouvert pour que  $(A+B)$  soit encore un ouvert.

15. a. Etant donnée une base :  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , de l'espace, un hyperplan admet une équation du type :

$$a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0, \text{ dans cette base } \mathcal{B}.$$

Si  $(u_p)$  est une suite d'éléments de H, avec :  $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \sum_{i=1}^n x_{p,i} \cdot e_i$ , qui converge vers :  $u = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ ,

alors :

- $\forall 1 \leq i \leq n, (x_{p,i})$  converge vers  $x_i$ ,
- $\forall p \in \mathbb{N}, a_1 \cdot x_{p,1} + \dots + a_n \cdot x_{p,n} = 0$ , puisque ce sont des éléments de H,
- en passant à la limite dans l'égalité précédente on en déduit que :  $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$ , et :  $u \in H$ .

Donc H est fermé.

b. • L'ensemble des matrices de trace nulle dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , noyau de la forme linéaire non nulle 'trace'.

A ce titre, c'est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est l'intersection de  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  hyperplans de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

qui sont les noyaux des formes linéaires non nulles :  $\forall 1 \leq j < i \leq n, A \mapsto a_{i,j}$ .

En effet, une matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , est caractérisée par :  $\forall 1 \leq j < i \leq n, a_{i,j} = 0$ .

Donc c'est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  (de même que les matrices triangulaires inférieures).

- l'ensemble des matrices diagonales est aussi une intersection de fermés, cette fois de  $(n^2 - n)$  fermés, noyaux des formes linéaires :  $\forall 1 \leq i \neq j \leq n, A \mapsto a_{i,j}$ .

Donc c'est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- enfin, l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est lui l'intersection de  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  hyperplans,

noyaux des formes linéaires non nulles :  $\forall 1 \leq i < j \leq n, A \mapsto a_{i,j} - a_{j,i}$ , et donc c'est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  (de même pour les matrices antisymétriques).

*Remarque* : pour cette question b, on aurait aussi pu montrer que toute suite convergente d'éléments de ces ensembles avait sa limite à chaque fois dans l'ensemble considéré.

16. • Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de F convergente pour la norme  $N_\infty$  vers la fonction u de E.

Alors :  $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \geq 0$ , et puisque la suite  $(u_n)$  converge aussi simplement vers u sur  $[0,1]$ , on en déduit en passant à la limite que :  $\forall x \in [0,1], u(x) \geq 0$ , autrement dit :  $u \in F$ , et F est fermé.

- Soit maintenant :  $u \in \Omega$ .

Alors u est continue sur  $[0,1]$  et elle atteint son minimum en un point :  $c \in [0,1]$ , où :  $u(c) > 0$ .

Alors la boule ouverte de centre u et de rayon :  $r = u(c)$ , est incluse dans  $\Omega$ .

En effet, si :  $v \in B(u, r)$ , alors :  $N_\infty(v - u) < r$ , donc :  $\forall x \in [0,1], |v(x) - u(x)| < r$ .

Donc :  $\forall x \in [0,1], v(x) > u(x) - r = u(x) - u(c) \geq 0$ , car u atteint son minimum en c et on a bien :  $v(x) > 0$ .

Autrement dit :  $v \in B(u,r)$ , et :  $B(u,r) \in \Omega$ , donc  $\Omega$  est un ouvert de  $E$ .

17. a. • Soit :  $u \in E$ .

Alors  $u$  est bornée et :  $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$ , existe, et comme borne supérieure d'un ensemble de réels positifs, c'est encore un réel positif.

• Si pour :  $u \in E$ , on a :  $\|u\|_\infty = 0$ , alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty = 0$ , et :  $u_n = 0$ , soit :  $u = 0$ .

• Soit :  $u \in E$ , et :  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La valeur  $|\lambda|$  étant alors positive, on a bien :  $\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |\lambda u_n| = \sup_{n \geq 0} |\lambda| |u_n| = |\lambda| \cdot \sup_{n \geq 0} |u_n| = |\lambda| \cdot \|u\|_\infty$ .

• Enfin :  $\forall (u,v) \in E^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ ,

et ceci étant vrai pour tout  $n$ , on en déduit que :  $\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ .

b. Il nous faut donc trouver une boule ouverte centrée en 1 et incluse dans  $F$ .

Pour cela, posons :  $r = 1$ .

Alors :  $\forall u \in B(1,r)$ ,  $\|u - 1\|_\infty < 1$ , et :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - 1| < 1$ , autrement dit :  $u_n > 1 - 1 = 0$ .

La suite  $u$  est alors bien dans  $F$ , et la boule proposée est incluse dans  $F$ .

Donc la suite **1** est bien intérieure à  $F$ .

### Continuité, applications lipschitziennes.

18. a. On a tout d'abord :  $f(a) = 0$ , puisque :  $\|a\| \leq \|a\|$ , et donc :

•  $\forall x \in E$ , tel que :  $\|x\| \leq \|a\|$ , on a :  $|f(x) - f(a)| = \|x - a - 0\| = \|x - a\|$ ,

•  $\forall x \in E$ , tel que :  $\|x\| > \|a\|$ , on a :  $|f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 \leq \|x - a\|$ .

Autrement dit :  $\forall x \in E$ ,  $|f(x) - f(a)| \leq \|x - a\|$ .

Il est alors clair que  $f$  est continue en  $a$  car :

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$ , avec :  $\alpha = \varepsilon$ , tel que :  $\forall x \in E$ ,  $(\|x - a\| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$ .

b. Considérons la suite définie par :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $x_p = -(1 + 2^{-p}) \cdot a$ .

La suite  $(x_p)$  tend vers  $-a$  car :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_p - (-a)\| = 2^{-p} \cdot \|a\|$ , qui tend bien vers 0.

Mais la suite  $(f(x_p))$  ne tend pas vers  $f(-a)$  car :

•  $f(-a) = \|-a - a\| = 2 \cdot \|a\| \neq 0$ , car :  $\| -a \| = \|a\| \leq \|a\|$ , et :

•  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_p) = 0$ , car :  $\|x_p\| = (1 + 2^{-p}) \cdot \|a\| > \|a\|$ , car  $a$  est non nul.

La suite  $(x_p)$  converge donc vers 0 qui n'est pas  $f(-a)$  et  $f$  n'est pas continue en  $-a$ .

19. a. C'est simplement l'inégalité des accroissements finis dans  $\mathbb{R}$ .

En effet :  $\forall (x,y) \in I^2$ ,  $\|f(x) - f(y)\| \leq k \cdot |x - y|$ , puisque  $k$  majore  $|f'|$  sur  $I$ .

b. Puisque :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ , on a :  $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$ .

Donc  $f$  est 1-lipschitzienne.

Si de plus  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^+$ , alors :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $|f(x) - f(0)| \leq k \cdot |x - 0|$ , donc :

$\forall x > 0$ ,  $\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} \leq k$ , et en faisant tendre  $x$  vers 0, on obtient :  $1 = |f'(0)| \leq k$ .

Donc 1 est la meilleure valeur de  $k$  que l'on puisse proposer.  $k$  et trouver la plus petite valeur  $k$  possible.

20. En notant  $f$  l'application proposée, on a immédiatement à l'aide de la deuxième inégalité triangulaire :

$\forall (x,y) \in E^2$ ,  $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ .

Donc :  $\forall (x,y) \in E^2$ ,  $\|f(x) - f(y)\| = \|(\|x\| - \|y\|) \cdot a\| = \| \|x\| - \|y\| \| \cdot \|a\| \leq \|a\| \cdot \|x - y\|$ .

$f$  est donc  $\|a\|$ -lipschitzienne et donc continue sur  $E$ .