Espaces vectoriels normés (corrigé des classiques).

Normes générales.

21. On peut transformer la première inégalité en : $\|y-x\| \le a.\|x\|$.

Donc : $\|y-x\| \le a.\|x-y+y\| \le a.(\|x-y\|+\|y\|)$, et donc : $(1-a).\|y-x\| \le a.\|y\|$.

En divisant par $\|y\|$, on obtient bien : $\dfrac{\|y-x\|}{\|y\|} \le \dfrac{a}{1-a}$.

22. • Puisque les fonctions considérées sont continues sur le segment [0,1], la quantité proposée existe bien et est bien un réel positif.

• Si pour : f ∈ E, on a : $N(f)=0$, alors : ∀ x ∈ [0,1], $0 \le |x.f(x)| \le N(f) = 0$, et donc :

∀ x ∈ [0,1], , soit encore : ∀ x ∈]0,1], $f(x)=0$.

Par continuité en 0, on en déduit que : $f(0)=0$, et finalement que : $f=0$.

• Pour : f ∈ E, λ ∈ ℝ, et puisque : $|\lambda| \ge 0$, on a : $N(\lambda.f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x.\lambda.f(x)| = |\lambda|.\sup\limits_{x\in[0,1]} |x.f(x)| = |\lambda|.N(f)$.

• Enfin : ∀ (f,g) ∈ E², ∀ x ∈ [0,1], $|x.(f(x)+g(x))| \le |x.f(x)| + |x.g(x)| \le N(f)+N(g)$,

et cette dernière quantité majorante étant constante (indépendante de x), on en déduit que : $N(f+g) \le N(f)+N(g)$.

Suites et comparaison de normes.

23. a. Il est immédiat que E est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites réelles, que la suite nulle appartient à E et que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles bornées (par M_u et M_v) avec α et β des réels, alors :
∀ n ∈ ℕ, $|\alpha.u_n + \beta.v_n| \le |\alpha|.M_u + |\beta|.M_v$, et : $\alpha.(u_n) + \beta.(v_n) \in E$.

b. Par définition de E, N_∞ est définie sur E, et est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, par construction.
De plus : ∀ (u_n) ∈ E, $(N_\infty(u) = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le |u_n| \le N_\infty(u) = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0) \Rightarrow (u = 0)$.
Puis : ∀ (u_n) ∈ E, ∀ λ ∈ ℝ, |λ| étant positif, on peut écrire : $N_\infty(\lambda.u) = \sup\limits_{n\in N} |\lambda.u_n| = |\lambda|.\sup\limits_{n\in N}|u_n| = |\lambda|.N_\infty(u)$.
Enfin : ∀ $((u_n), (v_n))$ ∈ E², ∀ n ∈ ℕ, $|u_n+v_n| \le |u_n| + |v_n| \le N_\infty(u)+N_\infty(v)$, et : $N_\infty(u+v) \le N_\infty(u)+N_\infty(v)$.

c. Pour : u ∈ E, $N_1(u)$ correspond à la somme d'une série convergente.
En effet, elle est à termes positifs et : ∀ n ∈ ℕ, $|u_n|.e^{-n} \le N_\infty(u).e^{-n}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
Par comparaison, la série converge donc et $N_1(u)$ existe ; de plus c'est un réel positif comme somme d'une série de réels positifs.
Puis : ∀ (u_n) ∈ E, $(N_1(u) = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le |u_n|.e^{-n} \le N_1(u) = 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0) \Rightarrow (u = 0)$.
De plus : ∀ u ∈ E, ∀ λ ∈ ℝ, $N_1(\lambda.u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\lambda.u_n|.e^{-n} = |\lambda|.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|u_n|.e^{-n} = |\lambda|.N_1(u)$, car la nouvelle série est encore géométrique et convergente.
Enfin : ∀ $((u_n),(v_n))$ ∈ E², ∀ n ∈ ℕ, $|u_n+v_n|.e^{-n} \le |u_n|.e^{-n} + |v_n|.e^{-n}$,
et par sommations de séries convergentes, on en déduit que : $N_1(u+v) \le N_1(u)+N_1(v)$.

d. On constate immédiatement, avec la remarque de la question c que :
∀ (u_n) ∈ E, $N_1(u) \le N_\infty(u).\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = N_\infty(u).\dfrac{e}{e-1}$, d'où : $N_1 \le \dfrac{e}{e-1}.N_\infty$.
Donc : $\alpha = \dfrac{e}{e-1}$, convient.

e. Mais si on considère la suite (U_p) d'éléments de E définie par :
∀ p ∈ ℕ, $U_{p,n} = \delta_{n,p}$ = (0,…,0,1,0,…,0,…), où le 1 est à la place d'indice n, alors :
∀ p ∈ ℕ, $N_1(U_p) = 1.e^{-n}$, et la suite (U_p) tend vers 0 pour N_1,
∀ p ∈ ℕ, $N_\infty(U_p) = 1$, et (U_p) ne tend pas vers 0 pour N_∞.
Or si on peut trouver : β > 0, tel que : $\beta.N_\infty \le N_1$, alors : ∀ p ∈ ℕ, $\beta.N_\infty(U_p) \le N_1(U_p)$, et : $\beta.1 \le e^{-p}$.

Or cette dernière inégalité est impossible (par exemple en faisant tendre p vers $+\infty$) et un tel β n'existe donc pas.

24. a. Il est immédiat, puisqu'une fonction lipschitzienne est continue, que E est inclus dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
Puis la fonction nulle est 0-lipschitzienne.
Enfin, et f et g sont k_f- et k_g-lipschitziennes, et si λ et μ sont des réels, alors :
$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|(\lambda.f+\mu.g)(x)-(\lambda.f+\mu.g)(y)| \le |\lambda|.|f(x)-f(y)|+|\mu|.|g(x)-g(y)|$, d'où :
$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|(\lambda.f+\mu.g)(x)-(\lambda.f+\mu.g)(y)| \le (|\lambda|.k_f+|\mu|.k_g)|x-y|$,
et $(\lambda.f + \mu.g)$ est elle aussi lipschitzienne.

b. Pour f dans E, l'ensemble de réels formés par : $E_f = \{\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}$, $0 \le x < y \le 1\}$, est borné puisque f est lipschitzienne, et non vide car il contient par exemple $|f(1)-f(0)|$ (pour : x = 0, y = 1).
Donc E_f admet une borne supérieure et K(f) existe (et c'est un réel positif puisque E_f contient des réels positifs).

c. On vient de justifier, pour f dans E, l'existence de N(f) et le fait que ce soit un réel positif.
Si pour : $f \in E$, on a : N(f) = 0, alors : f(0) = 0, et : K(f) = 0.
Mais alors : $\forall\ 0 < y \le 1$, $0 \le \frac{|f(y)-f(0)|}{y-0} \le K(f) = 0$, d'où : f(y) = 0, et f est nulle.
Puis pour : $f \in E$, et : $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $|\lambda.f(0)| = |\lambda|.|f(0)|$, et :
- $K(\lambda.f) = |\lambda|.K(f)$, car $|\lambda|$ est positif et : $\forall\ 0 \le x < y \le 1$, $\frac{|\lambda.f(y)-\lambda.f(x)|}{y-x} = |\lambda|.\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}$.

Enfin : $\forall (f,g) \in E^2$, on a :
- $|(f+g)(0)| \le |f(0)|+|g(0)|$, et :
- $\forall\ 0 \le x < y \le 1$, $\frac{|(f+g)(y)-(f+g)(x)|}{y-x} \le \frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}+\frac{|g(y)-g(x)|}{y-x} \le K(f)+K(g)$, et donc :
 $K(f+g) \le K(f)+K(g)$, d'où finalement :
 $N(f+g) \le N(f)+N(g)$.

d. Soit : $u \in E$.
Alors : $\forall x \in\ ]0,1]$, $\left|\frac{u(x)-u(0)}{x-0}\right| \le K(u)$, et : $|u(x)-u(0)| \le x.K(u) \le K(u)$, d'où :
$|u(x)| \le |u(x)-u(0)+u(0)| \le |u(x)-u(0)|+|u(0)| \le |u(0)|+K(u) = N(u)$.
Cette inégalité étant encore vraie pour : x = 0, elle est finalement vrai pour le sup de u sur [0,1], soit :
$N_\infty(u) \le N(u)$.
Soit maintenant (u_n) une suite d'éléments de E qui converge vers u pour N.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_\infty(u_n-u) \le N(u_n-u)$, et le théorème des gendarmes montre que (u_n) converge aussi vers u pour la norme N_∞.

e. Notons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $u_n(t) = \frac{1}{n}.t^n$.
Ces fonctions sont C^∞ sur [0,1], donc leurs dérivées sont bornées sur [0,1] et le théorème des accroissements finis montrent qu'elles sont lipschitziennes sur [0,1].
La suite (u_n) est donc une suite d'éléments de E.
Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_\infty(u_n) = \frac{1}{n}$, et la suite (u_n) tend vers 0 pour N_∞.
Puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $u_n'(t) = t^{n-1}$, et : $\sup_{t\in[0,1]} |u_n'(t)| = 1$.
Or : $\forall\ 0 < t < y = 1$, $\left|\frac{u_n(t)-u_n(1)}{t-1}\right| \le K(u_n)$, et en faisant tendre t vers 1, on en déduit que :

$\left|u_n'(1)\right| = 1 \leq K(u_n)$.

De plus : ∀ 0 ≤ x < y ≤ 1, ∃ $c_{x,y}$ ∈]x,y[⊂ [0,1], $\dfrac{\left|u_n(y) - u_n(x)\right|}{y - x} = \left|u_n'(c_{x,y})\right| \leq 1$, donc on a aussi :

$K(u_n) \leq 1$, et on en conclut que : $K(u_n) = 1$, et finalement que : ∀ n ∈ ℕ*, $N(u_n) = 0 + 1 = 1$.

La suite (u_n) ne converge pas alors vers 0 pour N.

25. a. La famille $(L_k)_{0\leq k\leq N}$ proposée est une famille de (N+1) polynômes dans $\mathbb{R}_N[X]$.

De plus, si on a : $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k . L_k = 0$, alors en évaluant cette égalité en : 0 ≤ i ≤ N, tous les termes s'annulent sauf celui correspondant à L_i qui vaut 1, d'où : $\alpha_i = 0$, et la famille est libre donc est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Donc si f est une fonction définie sur ℝ, on peut considérer le polynôme P de $\mathbb{R}_N[X]$ défini par :

$P = \sum_{k=0}^{N} f(k).L_k$, et avec la remarque au-dessus, on constate que :

∀ 0 ≤ i ≤ N, $P(i) = \sum_{k=0}^{N} f(k).L_k(i) = f(k)$, puisque tous les termes s'annulent sauf L_i(i) qui vaut 1.

b. Aucune difficulté pour démontrer que cela définit bien une norme sur E, en notant bien que :

∀ Q ∈ E, ($N(Q) = 0$) ⇒ (Q est nulle en (N+1) points et est de degré au plus N) ⇒ (Q = 0).

c. Puisque (P_n) comme suite de fonctions, converge simplement sur ℝ vers f, on en déduit que :

∀ 0 ≤ k ≤ N, la suite (P_n(k)) converge vers f(k), c'est-à-dire vers P(k).

Donc : ∀ n ∈ ℕ, $N(P_n - P) = \max\limits_{0\leq k\leq n}\left|P_n(k) - P(k)\right| \leq \sum_{k=0}^{N}\left|P_n(k) - P(k)\right|$, qui tend donc vers 0 (comme somme finie de suites qui tendent vers 0).

Donc (P_n) converge bien vers P pour N.

d. Là encore, pas de problème pour constater que $N_{\infty,[a,b]}$ est une norme sur E, en remarquant que :

∀ Q ∈ E, ($N_{\infty,[a,b]}(Q) = 0$) ⇒ (Q est nulle sur [a,b], soit en une infinité de valeurs) ⇒ (Q = 0).

e. Puisque dans E (qui est de dimension finie), la convergence ne dépend pas de la norme, on en déduit que (P_n) converge vers P également pour $N_{\infty,[a,b]}$, c'est-à-dire que (P_n) comme suite de fonctions, converge uniformément sur [a,b] vers P, ceci pour tout segment [a,b], donc converge simplement vers P sur ℝ.

L'unicité d'une limite simple sur ℝ montre donc que : f = P.

Remarque : on vient donc de démontrer que si une suite de polynômes (**dont le degré est majoré par une valeur N**) converge simplement sur ℝ vers une fonction f, alors cette fonction f est également un polynôme de degré majoré également par la constante précédente.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathcal{M}_n$(ℂ), $\mathcal{L}$(E).

26. a. La norme proposée est en fait la norme N_2 dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique et :

∀ (A,B) ∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, ∀ 1 ≤ i,j ≤ n, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2}$, et : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$.

On somme alors pour i variant de 1 à n, tout comme j et :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right).\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$$, soit :

$\|A.B\|^2 \leq \|A\|^2.\|B\|^2$, et donc : $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

27. a. Soit $\|\,.\,\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n$(ℂ).

- Si (A^p) converge vers M, alors :

∀ p ∈ ℕ, $\left\|D^p - P^{-1}.M.P\right\| = \left\|P^{-1}.A^p.P - P^{-1}.M.P\right\| \leq \left\|P^{-1}\right\|.\left\|A^p - M\right\|.\left\|P\right\|$,

et le théorème des gendarmes permet d'en déduire que (D^p) converge vers (P^{-1}.M.P).

Remarque : puisque toutes les suites composantes en dehors de la diagonale de (D^p) sont nulles, on en déduit que la limite a la même propriété autrement dit que $P^{-1}.M.P$ est elle-même diagonale.

• de même, si (D^p converge vers Δ), alors :

$\forall$ p $\in$ ℕ, $\|A^p - P.\Delta.P^{-1}\| = \|P.D^p.P^{-1} - P.\Delta.P^{-1}\| \le \|P\|.\|D^p - \Delta\|.\|P^{-1}\|$,

et à nouveau le théorème des gendarmes permet d'en déduire que (A^p) converge vers $P.\Delta.P^{-1}$.

b. Puisque de plus, la suite (D^p) s'écrit : $\forall$ p $\in$ ℕ, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$, la suite ($D^p$) (et donc la suite ($A^p$)) converge si et seulement si : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, ($|\lambda_i| < 1$, ou : $\lambda_i = 1$).

Il suffit en effet d'examiner les n suites géométriques qui apparaissent sur la diagonale.

28. a. Pour : x $\in$ E, on note : $x = \sum_{k=1}^{n} x_i.e_i$.

Alors : $N'(u(x)) = N'(u(\sum_{k=1}^{n} x_i.e_i)) = N'(\sum_{k=1}^{n} x_i.u(e_i)) \le \sum_{k=1}^{n} |x_i|.N'(u(e_i)) \le N_\infty(x).\left(\sum_{k=1}^{n} N'(u(e_i))\right)$.

Si on note alors : $K = \left(\sum_{k=1}^{n} N'(u(e_i))\right)$, il vérifie bien : $\forall$ x $\in$ E, N'(u(x)) ≤ $K.N_\infty(x)$.

b. L'ensemble proposé {N'(u(x)), x $\in$ E, N(x) ≤ 1} est alors un ensemble de réels, non vide car il contient 0 (puisque : N(0) ≤ 1, et : 0 = N'(u(0)) = N'(0)), et majoré comme le montre la question précédente.

Il admet ainsi une borne supérieure, notée $\|u\|$.

c. • On vient de justifier que : $\forall$ u $\in$ $\mathscr{L}$(E,F), $\|u\|$ existe et par construction est la borne supérieure d'un ensemble de réels positifs, donc est positif.

• Si pour : u $\in$ $\mathscr{L}$(E,F), on a : $\|u\| = 0$, alors :

$\forall$ x $\in$ E, tel que : N(x) ≤ 1, $0 \le N'(u(x)) \le \|u\| = 0$, donc : N'(u(x)) = 0, et : u(x) = 0.

$\forall$ x $\in$ E, tel que : N(x) > 1, on pose : $y = \frac{1}{N(x)}.x$, et : N(y) = 1, donc : $N'(u(y)) = 0 = \frac{1}{N(x)}.N'(u(x))$,

et on a encore : N'(u(x)) = 0, soit : u(x) = 0.

u est donc bien dans ce cas l'application nulle de E dans F.

• $\forall$ u $\in$ $\mathscr{L}$(E,F), $\forall$ λ $\in$ **K**, puisque : $|\lambda| \ge 0$, et $\|u\|$ se définissant comme un sup, on a bien : $\|\lambda.u\| = |\lambda|.\|u\|$.

• Enfin : $\forall$ (u,v) $\in$ $\mathscr{L}(E,F)^2$, $\forall$ x $\in$ E, tel que : N(x) ≤ 1, on a :

$N'((u+v)(x)) = N(u(x)+v(x)) \le N'(u(x))) + N'(v(x)) \le \|u\| + \|v\|$, d'où on déduit : $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

$\|\ .\ \|$ définit bien une norme sur $\mathscr{L}$(E,F).

Topologie.

29. L'ensemble O(n) est formé des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tA.A = I_n$.

Si on note : A = ($a_{i,j}$), alors O(n) est caractérisé par les $\frac{n.(n+1)}{2}$ équations suivantes :

• $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = 1$, et :

• $\forall$ 1 ≤ i < j ≤ n, $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}.a_{k,j} = 0$.

Les n premières conditions entraînent que : $\forall$ 1 ≤ k,i ≤ n, $|a_{k,i}| \le 1$, donc O(n) est borné pour la norme infinie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

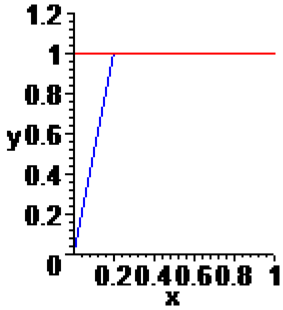
De plus, si (A_p) est une suite de matrices orthogonales, convergente vers A, et en notant :

$\forall$ p $\in$ ℕ, $A_p = (a_{i,j}^{(p)})$, alors :

$\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i}^{(p)})^2 = 1$, et : $\forall$ 1 ≤ i < j ≤ n, $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^{(p)}.a_{k,j}^{(p)} = 0$.

Or toutes les suites coordonnées de la suite (A_p) convergent vers les composantes correspondantes de A qui vérifient donc, en passant à la limite, les mêmes égalités qu'au-dessus.
A est donc aussi une matrice orthogonale et O(n) est fermé.

30. Il suffit de montrer qu'on peut trouver une suite d'éléments de F qui converge vers la fonction **1**.
Soient pour cela les fonctions u_n affines par morceaux définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,



- $\forall x \in [\frac{1}{n+1}, 1]$, $u_n(x) = 1$,
- $u_n(0) = 0$, et :
- u_n affine et continue de 0 à $\frac{1}{n+1}$.

Les fonctions u_n sont toutes dans F puisque continues et s'annulant en 0.
Sur le schéma ci-contre, u_n est en bleu et **1** en rouge.

De plus : $\|u_n - 1\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n+1}} |u_n(t) - 1|.dt = \frac{1}{2.(n+1)}$,

car cela correspond à la surface du triangle qui reste, soit la moitié de celle du rectangle correspondant.
Donc (u_n) converge vers **1** pour la norme $\|\,.\,\|_1$ et **1** est adhérent à F.

31. a. Classiquement, ces trois espaces sont inclus dans E, non vides puisque contenant la fonction nulle et stables par combinaisons linéaires.
Pour montrer que E_+ par exemple est fermé dans $(E, \|\,.\,\|_\infty)$, soit (u_n) une suite d'éléments de E_+ convergente dans $(E, \|\,.\,\|_\infty)$.
Alors il existe u dans E telle que : $\|u_n - u\|_\infty = \sup_{t \in R} |u_n(t) - u(t)|$, tende vers 0.
La suite (u_n) converge alors uniformément, donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers u.
De plus, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $u_n(x) = 0$, et en passant à la limite : $u(x) = 0$.
Autrement dit la fonction u est dans E_+ et E_+ est un fermé de $(E, \|\,.\,\|_\infty)$.
La démonstration est identique pour les deux autres espaces.

b. Pour montrer cette décomposition en somme directe, on travaille par analyse-synthèse :
Soit f une fonction dans E.
Si f se décompose suivant ces trois espaces en : $f = f^- + f^+ + f_0$, alors :
$\forall x \geq 0$, $f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^+(x) + f_0(x)$,
$\forall x \leq 0$, $f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^-(x) + f_0(x)$,
et en particulier : $f(0) = f_0(0)$, ce qui donne f_0, puis :
$\forall x \geq 0$, $f(x) = f^+(x) + f_0(0)$, d'où : $f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et de même :
$\forall x \leq 0$, $f^-(x) = f(x) - f_0(0)$.
Réciproquement, les trois fonctions suivantes contiennent :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(0) = f(0)$,
$\forall x \geq 0$, $f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall x < 0$, $f^+(x) = 0$,
$\forall x \leq 0$, $f^-(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall x > 0$, $f^-(x) = 0$.
En effet :
- f_0 est évidemment constante,
- f^+ est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ ainsi qu'en 0, car : $f^+(0) = f(0) - f_0(0) = 0)$,
  Elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, et en 0, puisque :
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 0 = 0 = f^+(0)$, et : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = f(0) - f_0(0) = 0$, car f est continue.
  Donc f^+ est bien dans E_+.
- De même, f^- est bien dans E_-.
- Enfin on a évidemment : $f = f^- + f^+ + f_0$, en le vérifiant immédiatement pour tout réel x.

Finalement, on a bien : E = $E_- \oplus E_+ \oplus$ C.

32. a. Soit (u_n) une suite d'éléments de A, convergeant vers : u ∈ E.
Alors (u_n) converge uniformément sur [0,1] vers u, donc converge en particulier simplement vers u.
Or : ∀ n ∈ ℕ, $u_n(0)$ = 0, donc en passant à la limite, on en déduit que : u(0) = 0.
De plus, la convergence uniforme de la suite sur [0,1] permet d'intervertir intégrale et limite, d'où :

∀ n ∈ ℕ, $1 \leq \int_0^1 u_n(t).dt$, et : $1 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t).dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} u_n(t).dt = \int_0^1 u(t).dt$,

autrement dit u appartient à A et A est fermée.
Soit maintenant : f ∈ A, et supposons que : $N_\infty(f) \leq 1$.

Puisque : f(0) = 0, et par continuité de f, il existe : α > 0, tel que : ∀ x ∈ [0,α], $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Alors : $\int_0^1 f(t).dt = \int_0^\alpha f(t).dt + \int_\alpha^1 f(t).dt \leq \alpha.\frac{1}{2} + (1-\alpha).N_\infty(f) = \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha).1 = 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$.

Donc f ne peut appartenir à A.
Conclusion : si f est dans A, alors : $N_\infty(f) > 1$.

b. L'ensemble : V = {$N_\infty(f)$, f ∈ A}, est un ensemble de réels non vide.
En effet, la fonction : t ↦ 2.t, est dans A puisqu'elle s'annule en 0, elle est continue sur [0,1] et son intégrale y vaut 1.
Donc étant de plus minoré par 1 (comme démontré dans la question précédente), V admet une borne inférieure et : $\inf(V) = \inf_{f\in A} N_\infty(f) \geq 1$.

Montrons que cette borne inférieure vaut 1.
Pour cela, et pour : n ≥ 2, on définit u_n sur [0,1] par :

- ∀ x ∈ [0,$\frac{1}{n}$], u_n est affine, telle que : $u_n(0) = 0$, et : $u_n(\frac{1}{n}) = a_n = \frac{2.n}{2.n-1}$,
- ∀ x ∈ [$\frac{1}{n}$,1], u_n est constante à la valeur a_n.

Alors u_n est continue sur [0,1], s'annule en 0, et : $\int_0^1 u_n(t).dt = \frac{1}{2.n}.a_n + (1-\frac{1}{n}).a_n = (1-\frac{1}{2.n}).a_n = 1$.

Donc toutes les fonctions u_n sont dans A et : ∀ n ≥ 2, $\inf(V) \leq N_\infty(u_n) = a_n = \frac{2.n}{2.n-1}$.

Donc si on fait tendre n vers +∞, l'inégalité reste vraie et : $\inf(V) \leq 1$, soit finalement : $\inf(V) = 1$.

Remarque : la valeur a_n a été ajustée pour que l'intégrale vaille 1.

Continuité, applications lipschitziennes.

33. Pour : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) ∈ ($\mathbb{R}^2)^2$, on a :

$\|f((x_1,x_2)) - f((y_1,y_2))\|_1 = \|(a.x_2, b.x_1) - (a.y_2, b.y_1)\|_1 = \|(a.(x_2-y_2), b.(x_1-y_1))\|_1$, et :

$\|f((x_1,x_2)) - f((y_1,y_2))\|_1 = a.|x_2-y_2| + b.|x_1-y_1| \leq (a+b).(|x_2-y_2| + |x_1-y_1|)$, d'où :

$\|f((x_1,x_2)) - f((y_1,y_2))\|_1 \leq (a+b).\|(x_1,x_2) - (y_1,y_2)\|_1$.

L'application proposée est donc (a+b)-lipschitzienne pour la norme $\|\,.\,\|_1$.

34. La linéarité de φ est immédiate.

Pour la continuité, on écrit : ∀ (f,g) ∈ E^2, $|\phi(f) - \phi(g)| = \left|\int_0^1 (f(t) - g(t)).dt\right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|.dt = \|f-g\|_1$.

Puisque φ est 1-lipschitzienne de (E, $\|\,.\,\|_1$) dans (ℝ, $|\,.\,|$), elle est continue entre ces espaces.