

Espaces vectoriels normés.

Exercices 2014-2015

Les indispensables.

Normes générales.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, et soient x et y des éléments de E .

Montrer que : $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.

2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x et y des vecteurs de E non nuls et : $a \in [0, 1[$.

Montrer que si : $\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq a$, alors : $\frac{\|y - x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1 - a}$.

3. Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels, $\|\cdot\|$ une norme sur F , et : $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour : $x \in E$, on note : $N(x) = \|u(x)\|$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si u est injective.

4. Soient a_1, \dots, a_n des réels et N définie de \mathbf{K}^n dans \mathbb{R} par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, N(x) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que N soit une norme sur \mathbf{K}^n .

5. Soit : $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Montrer que l'application N définie par : $\forall f \in E, N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$, est une norme sur E .

Suites et comparaisons de normes.

6. On définit (f_n) dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- $\forall x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = n - n^2 \cdot x$, et :

- $\forall x \in [\frac{1}{n}, 1]$, $f_n(x) = 0$.

a. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, puis calculer $N_1(f_n)$, $N_2(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$.

b. Trouver des constantes α , α' et α'' strictement positives telles que : $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$,

- $N_1(f) \leq \alpha \cdot N_\infty(f)$,
- $N_2(f) \leq \alpha' \cdot N_\infty(f)$,
- $N_1(f) \leq \alpha'' \cdot N_2(f)$.

c. Montrer avec la question a qu'il n'est pas possible de trouver β , β' , β'' strictement positives telles que :

$$\beta \cdot N_\infty(f) \leq N_1(f), \beta' \cdot N_\infty(f) \leq N_2(f), \text{ ou } \beta'' \cdot N_2(f) \leq N_1(f).$$

7. Soit : $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$, et pour : $f \in E$, on note : $N(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, et : $N'(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$.

a. Justifier que N et N' sont des normes sur E .

b. Montrer que : $N \leq N'$.

c. A l'aide de fonctions simples, montrer qu'une inégalité dans l'autre sens n'est pas possible.

8. Dans $\mathbf{K}[X]$, on note :

- $\forall P \in \mathbf{K}[X], P \neq 0, N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq \deg(P)} |a_k|, N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot 2^{-k}$, et :

- $N(0) = N_\infty(0) = 0$.

a. Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbf{K}[X]$.

b. Montrer qu'on peut trouver : $\alpha > 0$, telle que : $N \leq \alpha \cdot N_\infty$.

c. Trouver une suite simple qui converge vers 0 pour N et pas pour N_∞ et en déduire qu'on ne peut pas trouver : $\beta > 0$, tel que : $\beta \cdot N_\infty \leq N$.

9. On définit la suite (X_n) d'éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par : $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et : $\forall n \geq 0, X_{n+1} = A \cdot X_n$, où : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Montrer que (X_n) converge.

Suites et normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

10. Pour une matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note : $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

a. Que représente $\|A\|$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

b. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

c. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on a : $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

d. Montrer que si on note N_∞ la norme infinie dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors :

$$\forall (A,X) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), N_\infty(A \cdot X) \leq \|A\| \cdot N_\infty(X).$$

e. En déduire que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| \leq \|A\|$.

11. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que la suite (M^n) converge vers une matrice A.

a. Montrer que $(M^{2 \cdot n})$ converge aussi vers A.

b. En déduire que : $A = A^2$.

12. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. En utilisant une norme d'algèbre, montrer que si $((A \cdot B)^p)$ tend vers 0_n , alors $((B \cdot A)^p)$ tend aussi vers 0_n .

b. Montrer que si A et B commutent, si (A^p) tend vers P, et (B^p) vers A, alors P et Q commutent.

c. Si (A_p) est une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A et si la suite (A_p^{-1}) converge vers B, alors A est inversible et : $A^{-1} = B$.

d. Est-il possible de trouver une suite (A_p) de matrices inversibles qui converge vers une matrice A et telle que la suite (A_p^{-1}) diverge ?

Topologie.

13. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ou fermés :

a. \mathbb{N}, \mathbb{Z} ou \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

b. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right[$ dans \mathbb{R} .

c. $[0,1] \times [0,1] \times [0,+\infty[$ dans \mathbb{R}^3 .

d. un hyperplan dans \mathbb{R}^n .

14. Pour A et B deux ouverts de \mathbb{R}^n , on note : $A + B = \{(a + b), a \in A, b \in B\}$.

Montrer que c'est un ouvert de \mathbb{R}^n .

15. a. Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, tout hyperplan est fermé.

b. En déduire que les ensembles suivants sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- l'espace vectoriel des matrices de trace nulle,
- les espaces vectoriels de matrices triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures,
- l'espace vectoriel des matrices diagonales,
- les espaces vectoriels de matrices symétriques ou de matrices antisymétriques.

16. Soit : $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme N_∞ .

On note : $F = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$, et : $\Omega = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$.

Montrer que F est fermé dans E et Ω est ouvert dans E .

17. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées (u_n) .

On note alors : $\forall u \in E, u = (u_n), \|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$.

a. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E .

b. En notant $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1, montrer que $\mathbf{1}$ est intérieure à : $F = \{(u_n) \in E, \forall n \geq 0, u_n \geq 0\}$.

Continuité, applications lipschitziennes.

18. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $a \in E$, non nul.

On note f l'application de E dans \mathbb{R} définie par :

$\forall x \in E, f(x) = \|x - a\|$, si $\|x\| \leq \|a\|$, et $f(x) = 0$, sinon.

a. Montrer que f est continue en a .

b. Montrer que f n'est pas continue en $-a$.

19. Soit f une application d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 .

a. Montrer que si : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne.

b. Montrer que f définie sur \mathbb{R}^+ par : $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{1+x}$, est k -lipschitzienne pour une certaine valeur k et trouver la plus petite valeur k possible.

20. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $a \in E$.

Montrer que l'application définie sur E par : $x \mapsto \|x\| \cdot a$, est lipschitzienne.

Les classiques.

Normes générales.

21. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x et y des vecteurs de E non nuls et $a \in [0, 1[$.

Montrer que si : $\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq a$, alors : $\frac{\|y - x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}$.

22. Soit : $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Montrer que l'application N définie par : $\forall f \in E, N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |x \cdot f(x)|$, est une norme sur E .

Suites et comparaison de normes.

23. On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées.

a. Vérifier que E muni des lois habituelles constitue bien un \mathbb{R} -ev.

b. Vérifier que N_∞ définie sur E par : $\forall u = (u_n) \in E, N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, est une norme sur E .

c. Pour $u \in E$, on note par ailleurs : $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \cdot e^{-n}$.

Montrer que N_1 définit une autre norme sur E .

d. Montrer qu'on peut trouver : $\alpha > 0$, tel que : $N_1 \leq \alpha \cdot N_\infty$.

e. A l'aide d'une suite d'éléments de E , montrer qu'on ne peut pas trouver : $\beta > 0$, tel que : $\beta \cdot N_\infty \leq N_1$.

24. Soit E l'ensemble des fonctions définies de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , lipschitziennes.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{y - x}$ existe pour tout f dans E , nombre qu'on notera $K(f)$.

c. Montrer que N définie pour f dans E par : $N(f) = |f(0)| + K(f)$, est une norme sur E .

d. Montrer que toute suite d'éléments de E qui converge pour N converge pour N_∞ .

e. Trouver une suite d'éléments de E qui montre que la réciproque est fautive.

25. Soit (P_n) une suite d'éléments de polynômes de degré inférieur ou égal à N et convergeant simplement vers une fonction f sur \mathbb{R} .

a. Justifier l'existence d'un polynôme : $P \in \mathbb{R}_N[X]$, tel que : $\forall 0 \leq k \leq N, P(k) = f(k)$.

On pourra utiliser les polynômes : $\forall 0 \leq k \leq N, L_k = \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^N \frac{(X-i)}{(k-i)}$.

b. Montrer que l'application N définie sur : $E = \mathbb{R}_N[X]$, par : $\forall Q \in E, N(Q) = \max_{0 \leq k \leq n} |Q(k)|$, définit une norme sur E.

c. Montrer que la suite (P_n) converge vers P pour cette norme N.

d. Soit $[a,b]$ un segment de \mathbb{R} .

On note : $\forall Q \in E, N_{\infty,[a,b]}(Q) = \sup_{t \in [a,b]} |Q(t)|$.

Justifier que $N_{\infty,[a,b]}$ est encore une norme sur E.

e. En déduire que : $f = P$, et donc qu'une telle suite ne peut converger que vers un polynôme.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{L}(E)$.

26. Pour : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$.

a. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que cette norme a la propriété de norme matricielle à savoir :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|A.B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

27. Soient : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable, P inversible et D diagonale telles que : $D = P^{-1}.A.P$.

a. Montrer que la suite (A^p) converge si et seulement si (D^p) converge.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\text{Sp}(A)$ pour que (A^p) converge.

28. Soit (E,N) et (F,N') deux espaces vectoriels normés de dimension finie et soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

a. Soit \mathcal{B} une base de E.

Avec N_∞ la norme infinie attachée à la base \mathcal{B} , montrer que : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N'(u(x)) \leq K.N_\infty(x)$.

b. En déduire que $\{N'(u(x)), x \in E, N(x) \leq 1\}$ est borné et qu'il admet une borne supérieure, notée $\|u\|$.

c. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

On l'appelle norme subordonnée aux normes N et N'.

Topologie.

29. Montrer que $O(n)$ est fermé et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

30. Soit : $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 et : $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

Montrer que $\mathbf{1}$ est adhérent à F.

31. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On définit :

- $E_- = \{f \in E, \forall x \leq 0, f(x) = 0\}$,
- $E_+ = \{f \in E, \forall x \geq 0, f(x) = 0\}$,
- $C = \{c.\mathbf{1}, c \in \mathbb{R}\}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

a. Montrer que : E_-, E_+ , et C sont des sous-espaces vectoriels fermés de E.

b. Montrer que : $E = E_- \oplus E_+ \oplus C$.

32. Dans : $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, on note : $A = \{f \in E, f(0) = 0, \int_0^1 f(t).dt \geq 1\}$.

a. Montrer que A est une partie fermée de (E,N_∞) , et que : $\forall f \in A, N_\infty(f) > 1$.

b. Calculer : $\inf_{f \in A} N_\infty(f)$.

Continuité, applications lipschitziennes.

33. Soit : $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$.

On munit \mathbb{R}^2 de la norme $\| \cdot \|_1$, et on note f l'application définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f((x_1, x_2)) = (a.x_2, b.x_1).$$

Montrer que f est lipschitzienne.

34. On note : $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, et on le munit de la norme $\| \cdot \|_1$.

On définit par ailleurs ϕ sur E par : $\forall f \in E, \phi(f) = \int_0^1 f(t).dt$.

Montrer que ϕ est linéaire et continue de $(E, \| \cdot \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Les plus.

Normes.

35. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et soient x et y des vecteurs de E non nuls.

$$\text{Montrer que : } \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2 \cdot \|x - y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}.$$

Suites et comparaison de normes.

36. Soit : $n \geq 2$.

Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), N(A) = N(P^{-1}.A.P)$?

37. On note : $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$.

Pour : $f \in E$, on note : $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, $n(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)|$, et : $N(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$.

a. Montrer que n et N sont deux normes sur E .

b. En remarquant que f est une primitive de f' , montrer que : $N_\infty(f) \leq N_\infty(f')$.

c. On note : $\forall f \in E, \forall t \in [0,1], g(t) = e^t \cdot f(t)$.

Montrer successivement que : $N_\infty(g') \leq n(f)$, $N_\infty(f') \leq N_\infty(g) + N_\infty(g')$, puis : $N(f) \leq 4.e.n(f)$.

d. En déduire que toute suite d'éléments de E qui converge pour n converge pour N , et réciproquement.

e. Est-ce encore le cas pour N et N_∞ ?

38. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans \mathbb{R} et E^+ le sous-ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'en un nombre fini de valeurs.

Pour : $\varphi \in E^+$, on définit N_φ par : $\forall f \in E, N_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t) \cdot |f(t)| \cdot dt$.

a. Montrer que N_φ est une norme sur E .

b. Montrer que : $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in E^{+2}$, strictement positives, une suite d'éléments de E converge pour N_{φ_1} si et seulement si elle converge pour N_{φ_2} .

c. On pose : $\forall x \in [0,1], \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$.

A l'aide d'une suite bien choisie, montrer que le résultat de la question b n'est plus vrai.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathcal{L}(E), \mathcal{M}_n(K)$.

39. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable telle que A admet λ comme valeur propre d'ordre n .

On note N une matrice triangulaire supérieure stricte et P une matrice inversible telles que :

$$P^{-1}.A.P = \lambda \cdot I_n + N.$$

a. Justifier l'existence de N , puis montrer que : $(|\lambda| < 1) \Rightarrow ((A^p)$ converge).

b. La réciproque est-elle vraie ?

40. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, et \mathcal{B} une base de E .

On notera N_∞ la norme infinie attachée à la base \mathcal{B} .

Pour : $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit : $\|u\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \left(\frac{N(u(x))}{N(x)} \right)$, où N est une norme sur E , autrement dit la norme de

l'exercice 28 où l'on a choisi : $E = F$, et la même norme N dans E et dans F .

a. Montrer que : $\|u\| = \sup_{x \in E, N(x)=1} (N(u(x))) = \sup_{x \in E, N(x) \leq 1} (N(u(x)))$.

b. Montrer que la norme ainsi définie a la propriété de norme matricielle (ou de norme d'algèbre), à savoir :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Topologie.

41. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

On note : $B_1 = \{x \in E, N_1(x) \leq 1\}$, et : $B_2 = \{x \in E, N_2(x) \leq 1\}$.

a. Montrer que : $(B_1 = B_2) \Leftrightarrow (N_1 = N_2)$.

b. Même question avec les boules ouvertes.

42. On note N l'application définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, N((x, y)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + t \cdot y|}{1 + t + t^2}$.

a. Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

b. Représenter graphiquement la boule : $B'_N(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, N((x, y)) \leq 1\}$.

c. Quelle est l'aire (usuelle) de cette boule ?

43. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme N_∞ habituelle.

On note : $A = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) \neq 0\}$.

a. Montrer que A est un ouvert de E pour N_∞ .

b. Montrer que l'ensemble des points adhérents à A pour N_∞ est constitué des fonctions continues sur $[0, 1]$, positives sur $[0, 1]$ ou négatives sur $[0, 1]$.

44. On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On note : $A = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], 2 + f(x) \leq e^{f(x)}\}$.

Montrer que A est une partie fermée et non bornée de E .

45. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E .

a. Montrer que : $F = \overline{F}$.

b. Montrer que si : $\dim(F) \neq \dim(E)$, alors : $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

46. Soit E un espace vectoriel normé et soit C un convexe de E .

Montrer que \overline{C} et $\overset{\circ}{C}$ sont des convexes de E .

Continuité, applications lipschitziennes.

47. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f l'application définie sur E par : $\forall x \in E, f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}$.

a. Montrer que f est continue de E dans E pour la norme $\|\cdot\|$.

b. Montrer que : $f(E) = B'\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

48. On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|.$$

On définit l'opérateur de différence Δ sur E par : $\forall x \in E, \Delta(x) = y$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$.

Montrer que Δ est linéaire et continue pour $\|\cdot\|_\infty$.