Produit scalaire (corrigé des plus).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

56. a. Pour : n = 1, le résultat est immédiat car : $\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 = \|\varepsilon_1.x_1\|^2 = \|x_1\|^2$.

Si : n = 2, alors : $\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 = \|\varepsilon_1.x_1+\varepsilon_2.x_2\|^2 = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+2.\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2) \le M^2$, et ceci pour tout couple : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,+1\}^2$.

On peut alors choisir ε_1 et ε_2 de telle sorte que le produit $\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2)$ soit positif et dans ce cas :

$\|x_1\|^2+\|x_2\|^2 \le \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+2.\varepsilon_1.\varepsilon_2.(x_1|x_2) = \left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 \le M^2$, d'où le résultat.

b. Supposons maintenant le résultat démontré pour un entier : n ≥ 2, et soit : $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, vérifiant la propriété précédente.

Alors : $\forall \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1}\} \in \{-1,+1\}^{n+1}$, $\left\|\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 \le M^2$, d'où :

- $\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 + 2.\varepsilon_{n+1}.(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k|x_{n+1}) \le M^2$.

La même inégalité appliquée à $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, -\varepsilon_{n+1})$ donne :

- $\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 - 2.\varepsilon_{n+1}.(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k|x_{n+1}) \le M^2$, et donc en additionnant :

$2.\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 + 2.\|x_{n+1}\|^2 \le 2.M^2$,soit : $\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\|^2 \le M^2 - \|x_{n+1}\|^2$.

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, on en déduit que : $\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \le M^2 - \|x_{n+1}\|^2$,et finalement :

$\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \le M^2$, ce qui termine la récurrence.

57. a. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de façon immédiate.

Soit maintenant : g ∈ G, et : f ∈ F.

Alors : $\int_{-1}^{+1} f(t).g(t).dt = 0$, puisque la fonction sous l'intégrale est nulle sur [-1,0] du fait de g et sur [0,1] du fait de f.

Donc : $G \subset F^\perp$.

Soit maintenant : $h \in F^\perp$, et pour tout : n ≥ 2, la fonction f_n définie par :

- $\forall$ t ∈ [0,1], $f_n(t) = 0$,
- $\forall$ t ∈ $[-1, -\frac{1}{n}]$, $f_n(t) = h(t)$,
- f_n est affine sur $[-\frac{1}{n}, 0]$, avec : $f_n(-\frac{1}{n}) = h(-\frac{1}{n})$, et : $f_n(0) = 0$.

La fonction f_n sont continues sur [-1,+1], et nulles sur [0,1], donc appartiennent à F.

Par conséquent : $\forall$ n ≥ 2, $\int_{-1}^{+1} f_n(t).h(t).dt = 0 = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(t).h(t).dt$, et :

$\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt = -\int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(t).h(t).dt$, d'où : $0 \le \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} h^2(t).dt \le \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |f_n(t).h(t)|.dt \le \frac{M}{n}.\left|h(-\frac{1}{n})\right| \le \frac{M^2}{n}$,

où M désigne un majorant de h sur le segment [-1,+1].

Si on fait tendre n vers +∞, on en déduit que : $0 = \int_{-1}^{0} h^2(t).dt$.

On termine en disant que h^2 est continue et positive sur le segment [-1,0] donc y est nulle.
Finalement : $h \in G$, donc : $F^{\perp} \subset G$, et finalement : $F^{\perp} = G$.

b. F et G ne sont pas supplémentaires dans E, car la fonction constante égale à 1, ne peut se décomposer comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, n'étant pas nulle en 0.
On a donc ici : $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

58. a. Si on note $\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$, φ est clairement une forme linéaire sur E, non nulle puisque le polynôme constant égal à 1 a pour image : $\varphi(1) = \int_{-1}^{+1} |t|.dt = 2.\int_{-1}^{+1} t.dt = 1$, donc son noyau, c'est-à-dire H est un hyperplan de E.
On peut aussi préciser la décomposition d'un polynôme P suivant : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(1)$.
En effet, si : $P = P_H + \lambda$, alors : $\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt = \int_{-1}^{+1} |t|.P_H(t).dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} |t|.dt = 0 + \lambda$, et donc :

- $\lambda = \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt$,
- $P_H = P - \lambda$.

b. Soit : $Q \in H^{\perp}$.
Alors : $\forall P \in E$, $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \int_{-1}^{+1} P_H(t).Q(t).dt + \left(\int_{-1}^{+1} \lambda.Q(t).dt \right) = 0 + \lambda.\int_{-1}^{+1} Q(t).dt$,
avec : $P = P_H + \lambda$, dans la décomposition précédente.
Donc on a bien : $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt \right).\left(\int_{-1}^{+1} Q(t).dt \right)$, avec l'expression de λ trouvée au-dessus.

c. On déduit de l'égalité précédente que :
$\forall P \in E$, $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt - \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt \right).\alpha = 0 = \int_{-1}^{+1} P(t).[Q(t) - \alpha.|t|].dt$, avec : $\alpha = \int_{-1}^{+1} Q(t).dt$.
La fonction : $t \mapsto Q(t) - \alpha.|t|$, est alors continue sur [-1,1], et orthogonale à tous les polynômes.
Le théorème de Weierstrass montre alors que cette fonction est nulle sur [-1,+1].
En effet :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t).(\varphi(t) - P_n(t)).dt + \int_{-1}^{+1} \varphi(t).P_n(t).dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t).(\varphi(t) - P_n(t)).dt$,
puisque l'autre terme est nul du fait de l'orthogonalité de φ et de $\mathbb{R}[X]$, et :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt \leq \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|.|\varphi(t) - P_n(t)|.dt \leq M.\sup_{[-1,+1]} |\varphi - P_n|$.
Et comme la quantité majorante tend vers 0 quand n tend vers +∞, on en déduit que : $\int_{-1}^{+1} \varphi^2(t).dt = 0$.
φ^2 étant alors continue et positive sur [-1,+1], elle y est nulle, et φ aussi.
Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = \alpha.|t|$, mais ceci n'est possible pour un polynôme que si : $\alpha = 0$, soit : $Q = 0$.
Donc : $H^{\perp} = \{0\}$.

59. a. Notons A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
Alors : $\forall j \in \mathbb{N}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_j)).e_i$,
puisque la base $\mathscr{B}$ étant orthonormale, on reconnaît ainsi les coordonnées de $u(e_j)$ dans cette base.
Donc : $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_i))$.

b. Deux possibilités alors se présentent :
- soit tous les éléments diagonaux de A sont nuls et : $\forall 1 \leq i \leq n$, $(e_i | u(e_i)) = 0$, ce qui répond à la question,
- soit ce n'est pas le cas et il existe alors un terme non nul sur la diagonale, mais aussi nécessairement au moins un autre de signe contraire puisque la somme de ces éléments vaut 0.

Autrement dit : $\exists 1 \leq i \neq j \leq n$, $(e_i | u(e_i)) > 0$, et : $(e_j | u(e_j)) < 0$.On considère alors la fonction proposée : définie de [0,1] dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall$ t $\in$ [0,1], φ(t) = $(u(t.e_i + (1-t).e_j)|t.e_i + (1-t).e_j)$.

En développant cette expression avec la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire, on constate qu'elle est polynomiale en t (de degré au plus 2), donc est continue sur [0,1].

De plus : $\varphi(0) = (u(e_j)|e_j) < 0$, et : $\varphi(1) = (u(e_i)|e_i) > 0$, donc φ s'annule sur [0,1] et la valeur de t ainsi trouvée fournit le vecteur x cherché, vérifiant : (u(x)|x) = 0, et non nul puisque (e_1, e_j) est libre.

c. Raisonnons alors comme proposé par récurrence sur n.

• Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension 1 tel que : tr(u) = 0, alors sa matrice dans n'importe quelle base de E est nulle de taille 1×1 donc à diagonale nulle.

• Supposons le résultat démontré pour tout espace euclidien de dimension : n ≥ 1, et soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension (n+1), tel que : tr(u) = 0.

On a trouvé avec la question précédente un vecteur dans E non nul, que l'on peut diviser par sa norme pour obtenir un vecteur ε_1 et tel que : $(u(\varepsilon_1)|\varepsilon_1) = 0$.

On complète alors ε_1 en une base orthonormale (ε_1, ε_2, …, ε_{n+1}) de E.

Dans cette base la première colonne de la matrice A de u commence par 0 puisque :

$$u(\varepsilon_1) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,1}.\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n+1} (\varepsilon_i|u(\varepsilon_1)).\varepsilon_i = \sum_{i=2}^{n+1} (\varepsilon_i|u(\varepsilon_1)).\varepsilon_i .$$

La matrice de u dans cette base a alors pour forme par blocs : $A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$, où A' est de taille n×n.

La matrice A' a une trace nulle puisque : tr(A) = 0, et correspond à un endomorphisme u' de l'espace : euclidien : E' = Vect(ε_2, …, ε_{n+1}), que l'on munit du produit scalaire induit par celui de E.

Donc il existe une base orthonormale (ε_2', …, ε_{n+1}') de E' dans laquelle la matrice de u' est à éléments diagonaux nuls.

Notons A'_0 cette dernière matrice et P la matrice de passage de (ε_2, …, ε_{n+1}) à (ε_2', …, ε_{n+1}').

Alors : $A_0 = P^{-1}.A'.P$, et un produit par blocs donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} .A. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A_0 \end{pmatrix},$$

soit bien une matrice à diagonale nulle, ce qui termine la récurrence.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

60. Pour un vecteur x de E, l'expression de $p_F(x)$ est : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x_i|x).x_i$, puisque la base ($x_1$, …, x_p) est orthonormale.

Si on ramène cette égalité à son écriture matricielle dans la base $\mathscr{B}$ et en appelant M la matrice de p_F dans cette même base $\mathscr{B}$, alors :

$$M.X = \sum_{i=1}^{p} ({}^tX_i.X).X_i = \sum_{i=1}^{p} X_i.({}^tX_i.X) = \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i).X = \left(\sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i)\right).X ,$$

en utilisant le fait que l'expression du produit scalaire dans $\mathscr{B}$ est canonique puisque la base est orthonormale et que la quantité (${}^tX_i.X$) est scalaire et commute avec toute matrice.

Donc : $\forall$ X $\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(M - \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i)\right).X = 0$.

On en déduit que : $M - \sum_{i=1}^{p} (X_i.{}^tX_i) = 0$, puis finalement : $M = \sum_{k=1}^{p} X_k.{}^tX_k$.

Projecteurs orthogonaux.

61. • Pour : n = 2, le résultat est vrai.

En effet, si : $(x_1|x_2) < 0$, alors les deux vecteurs sont non nuls et constituent chacun une famille libre.

• Supposons maintenant le résultat vrai pour une valeur de : n ≥ 2, donnée.

Soit (x_1, …, x_{n+1}) vérifiant la propriété proposée.

Puisque tous les vecteurs sont non nuls, on peut considérer p la projection orthogonale sur Vect(x_1) et :

$\forall$ 2 ≤ i ≤ n + 1, $x_i = y_i^\perp + p(x_1)$, avec : $p(x_1) = (\frac{x_1}{\|x_1\|}|x_i).\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\|x_1\|^2}.(x_1|x_i).x_1 = \lambda_i x_1$, et : $y_i^\perp \in \mathrm{Vect}(x_1)^\perp$.

On remarque alors que : $\forall$ 2 ≤ i ≤ n + 1, $\lambda_i = \frac{1}{\|x_1\|^2}.(x_1|x_i) < 0$.

Puis : $\forall$ 2 ≤ i ≠ j ≤ n + 1, $(x_i|x_j) = (y_i^\perp|y_j^\perp) + \lambda_i.\lambda_j.\|x_1\|^2$, $(y_i^\perp|y_j^\perp) = (x_i|x_j) - \lambda_i.\lambda_j.\|x_1\|^2 < 0$.

Donc par hypothèse de récurrence, toute sous-famille de (n – 1) vecteurs de la famille $(y_2^\perp, \dots, y_{n+1}^\perp)$ est libre, par exemple $(y_2^\perp, \dots, y_n^\perp)$.
Donc la famille $(x_1, y_2^\perp, \dots, y_n^\perp)$, comme réunion de deux familles libres issues de deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, est encore une famille libre.
Enfin, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est encore libre car :
$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\alpha_1.x_1 + \dots + \alpha_n.x_n = 0) \Rightarrow ([\alpha_1 + \alpha_2.\lambda_2 + \dots + \alpha_n.\lambda_n].x_1 + \alpha_2.y_2^\perp + \dots + \alpha_n.y_n^\perp = 0)$,
donc on en déduit que : $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, puis en revenant à la première égalité, x_1 étant non nul, on termine avec : $\alpha_1 = 0$.
Les vecteurs $x_1, \dots, x_{n+1}$ jouant des rôles symétriques, on en déduit que c'est valable pour une sous-famille quelconque, ce qui termine la récurrence.

62. a. Si X et Y sont dans F' alors X^2 et Y^2 admettent une espérance, donc le produit X.Y aussi.
b. F' est non vide puisqu'il contient la fonction nulle (0^2 admet bien une espérance).
F' est inclus dans F.
Soit : $(X,Y) \in F'^2$, et : $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $(\lambda.X + \mu.Y)$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, et : $(\lambda.X + \mu.Y)^2 = \lambda^2.X^2 + 2.\lambda.\mu.X.Y + \mu^2.Y^2$.
Puisque X^2, Y^2 et X.Y admettent une espérance, cette dernière quantité aussi et F' est stable par combinaison linéaire.
Donc F' est un sous-espace vectoriel de F.
c. L'application ψ proposée est bien définie de F'^2 dans $\mathbb{R}$, d'après la question 1.
De plus, elle est clairement symétrique (le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$) et bilinéaire, par linéarité de l'espérance.
Par ailleurs : $\forall X \in F'$, $\psi(X,X) = E(X^2)$, et X^2 étant positive, son espérance est également positive.
Enfin, si pour : $X \in F'$, on a : $0 = \psi(X,X) = E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2.P(X = x)$, par la formule de transfert,
alors : $\forall x \in X(\Omega)$, $x^2.P(X = x) = 0$.
Donc :
- si : $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X = x) \neq 0$, alors la seule valeur dans $X(\Omega)$ est 0, et X est nulle,
- si : $\exists x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = 0$, alors X est non nulle (puisqu'elle prend la valeur x non nulle) alors qu'on a pourtant : $\psi(X,X) = 0$.

Mais l'équivalence proposée n'a pas de sens puisque le fait que ψ soit un produit scalaire ou pas ne peut pas dépendre de l'élément de F' sur lequel on l'évalue.
En revanche on peut proposer :
« ψ est un produit scalaire sur F' si et seulement si : $\forall \omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) \neq 0$ ».
En effet :
- si la condition est vérifiée, alors Ω étant dénombrable : $\forall X \in F'$, $\forall x \in X(\Omega)$, $(X = x)$ est inclus dans Ω donc est dénombrable et comme réunion au plus dénombrable de sous-ensemble de Ω, on peut calculer $P(X = x)$ comme la somme d'une série à termes strictement positifs donc non nulle, donc ψ est définie dans ce cas,
- si la condition n'est pas vérifiée, alors on peut trouver ω dans Ω tel que : $P(\{\omega\}) = 0$, et la fonction : $X = 1_{\{\omega\}}$, définie de Ω dans $\mathbb{R}$, est non nulle, son carré admet une espérance et :
$E(1_{\{\omega\}}{}^2) = E(1_{\{\omega\}}) = 1.P(\{\omega\}) + 0.P(\overline{\{\omega\}}) = 1.0 + 0 = 0$, et ψ n'est pas définie.

d. L'application 1_A (indicatrice de A) étant bornée, elle est d'espérance finie et :
$E(1_A) = 1.P(1_A = 1) + 0.P(1_A = 0) = P(A)$.
De plus, et puisque : $1_A{}^2 = 1_A$, 1_A est bien dans F'.
De même, $1_{\overline{A}}$ est dans F' et donc G, engendré par 1_A et $1_{\overline{A}}$ dans F, est un sous-espace vectoriel de F'.
Si maintenant on calcule : $\psi(1_A, 1_{\overline{A}}) = E(1_A.1_{\overline{A}})$, cette espérance est nulle car : $1_A.1_{\overline{A}} = 0$.

Donc la famille est orthogonale et A étant non vide, distinct de Ω, les fonctions 1_A et $1_{\bar{A}}$ sont non nulles.
Cette famille forme donc une famille libre et donc une base orthogonale de G.

La famille $(X_A, X_{\bar{A}}) = \left(\dfrac{1_A}{\sqrt{\psi(1_A,1_A)}}, \dfrac{1_{\bar{A}}}{\sqrt{\psi(1_{\bar{A}},1_{\bar{A}})}} \right)$ forme alors une base orthonormale de G.

Enfin : $\forall$ B $\subset \Omega$, $p_G(1_B) = \psi(X_A,1_B).X_A + \psi(X_{\bar{A}},1_B).X_{\bar{A}}$.

Et comme : $\psi(1_A,1_B) = E(1_A.1_B) = E(1_{A\cap B}) = P(A\cap B)$, et : $\psi(1_A,1_A) = E({1_A}^2) = E(1_A) = P(A)$,

on en déduit que : $p_G(1_B) = P(A\cap B).\dfrac{1_A}{P(A)} + P(\bar{A}\cap B.)\dfrac{1_{\bar{A}}}{P(\bar{A})} = P_A(B).1_A + P_{\bar{A}}(B).1_{\bar{A}}$.

e. On ne dispose plus ici de base orthonormale pour G.
Pour déterminer $p_G(Y)$, on cherche donc : $Z = \alpha.X + \beta.1_\Omega$, tel que : $(Y - Z) \in G^\perp$.
On exprimer cette dernière condition par : $\psi(Y - (\alpha.X + \beta.1_\Omega), X) = \psi(Y - (\alpha.X + \beta.1_\Omega),1_\Omega) = 0$.
On aboutit alors au système :

- $E(Y.X - \alpha.X^2 - \beta.X) = 0$, soit : $\alpha.E(X^2) + \beta.E(X) = E(X.Y)$,
- $E(Y - \alpha.X - \beta) = 0$, soit : $\alpha.E(X) + \beta.1 = E(Y)$.

On trouve ainsi : $\alpha = \dfrac{E(X.Y) - E(X).E(Y)}{E(X^2) - E(X)^2} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$, et : $\beta = E(Y) - E(X).\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$.

D'où : $p_G(Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}.(X - E(X)) + E(Y)$.

f. Puisque X et 1_Ω admettent une espérance, par linéarité $p_G(Y)$ aussi.
Puis : $(Y - p_G(Y)) \in G^\perp$, donc est en particulier orthogonale à 1_Ω et :
$\psi(Y - p_G(Y),1_\Omega) = 0 = E((Y - p_G(Y)).1_\Omega) = E(Y - p_G(Y)) = E(Y) - E(p_G(Y))$, d'où finalement :
$E(Y) = E(p_G(Y))$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

63. Si on note : $\forall$ (A,B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tA.B)$, alors : $\|A\|^2 = tr({}^tA.A) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^2$, et la borne inférieure cherchée est alors obtenue comme distance minimale au carré de la matrice A à l'espace des matrices symétriques réelles.

Or : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, (matrices symétriques et antisymétriques réelles n$\times$n).
En effet : $\forall$ ((M,N) $\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(M|N) = \mathrm{tr}({}^tM.N) = - \mathrm{tr}(M.N) = (N|M) = \mathrm{tr}({}^tN.M) = \mathrm{tr}(N.M) = \mathrm{tr}(M.N)$, et donc : $(M|N) = 0$, puisque c'est un nombre égal à son opposé.
Puis on décompose la matrice A proposée suivant la somme directe précédente :
$A = \dfrac{1}{2}.(A+{}^tA) + \dfrac{1}{2}.(A-{}^tA)$, de façon classique, et la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est alors :
$p(A) = \dfrac{1}{2}.(A+{}^tA)$.

La quantité cherchée vaut alors : $\inf\limits_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2\right) = d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|A - p(A)\|^2 = \dfrac{1}{4}.\|A-{}^tA\|^2$.

Finalement : $\inf\limits_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2\right) = \dfrac{1}{4}.\sum_{1\le i<j\le n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2$.

64. Soit donc $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E, et notons : $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
Pour : $x \in E$, on peut décomposer x en : $x = x^\perp + x_F$, avec : $x^\perp \in F^\perp$, et : $x_F \in F$.
La distance de x à F est alors : $d(x,F) = \|x - p(x)\| = \|x - x_F\| = \|x^\perp\|$, où p(x) est la projection orthogonale de x sur F.
D'autre part : $Gram(x,x_1,...,x_p) = Gram(x^\perp + x_F, x_1,...,x_p) = Gram(x^\perp, x_1,...,x_p) + Gram(x_F, x_1,...,x_p)$.

Mais comme : $x_F \in F = Vect(x_1, \ldots, x_p)$, le deuxième terme de cette somme est nul (comme on l'a vu dans l'exercice 40).
D'autre part dans le premier déterminant de Gram, puisque $x^\perp$ est orthogonal à F, tous les termes de la première colonne à partir du deuxième sont nuls : $\forall\ 1 \leq i \leq p$, $(x^\perp|x_i) = 0$, et :

$$Gram(x^\perp, x_1,\ldots,x_p) = \begin{vmatrix} (x^\perp|x^\perp) & (x^\perp|x_1) & \cdots & (x^\perp|x_n) \\ 0 & (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_n|x_1) & \cdots & (x_n|x_n) \end{vmatrix} = (x^\perp|x^\perp).Gram(x_1,\ldots,x_p) \text{, d'où :}$$

$$d(x,F) = \|x^\perp\| = \sqrt{(x^\perp|x^\perp)} = \sqrt{\frac{Gram(x^\perp, x_1,\ldots,x_p)}{Gram(x_1,\ldots,x_p)}}.$$

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

65. a. La matrice A étant symétrique et réelle, elle est diagonalisable.
b. Puisque H est de rang 1, il existe au moins une colonne non nulle, et toutes les autres colonnes de H sont proportionnelles à cette colonne.
Si on note alors U celle colonne particulière, alors : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\exists\ v_j \in \mathbb{R}$, $H_j = v_j.U$, où H_j désigne la colonne j de la matrice H.
Si maintenant on note V la matrice colonne formée à partir des valeurs v_j précédentes, on constate que : $U.{}^tV = H$, en travaillant par exemple par blocs (ou coefficient par coefficient).
Enfin U et V ne peuvent être proportionnelles, car sinon on aurait successivement :
$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $V = \lambda.U$, puis : $H = \lambda.U.{}^tU$, et : $H = {}^tH$, soit H symétrique, ce qui est exclu.
c. Si X est orthogonal à U et à V (pour le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors :
${}^tU.X = {}^tV.X = 0$, et : $A.X = U.{}^tV.X + V.{}^tU.X = 0$.
Donc si X est vecteur propre de A, associé à la valeur propre α et si X est orthogonal à U et V, $\alpha = 0$.
Mais l'étude précédente montre de plus, que si : $n \geq 3$, alors tout vecteur non nul de $Vect(U,V)^\perp$ est vecteur propre de A associé à 0.
Comme enfin : $Im(A) \subset Vect(U,V)$, puisque : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A.X = (V|X).U + (U|X).V$, il est clair que le plan : $P = Vect(U,V)$, est stable par H.
Or dans la base (U,V) de P, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est :

$$A' = \begin{pmatrix} (U|V) & \|V\|^2 \\ \|U\|^2 & (U|V) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A' permet de trouver ses deux valeurs propres (réelles) qui sont :
$\lambda_\pm = (U|V) \pm \|U\|.\|V\|$,
et ces valeurs sont non nulles car les vecteurs U et V sont non colinéaires.
Les espaces propres associés sont : Vect($\dfrac{U}{\|U\|} \mp \dfrac{V}{\|V\|}$), espaces qui sont bien orthogonaux.
Finalement :
- si : n = 2, on a trouvé les deux sous-espaces propres de A et leurs valeurs propres associées,
- si : $n \geq 3$, il y a trois valeurs propres (les deux précédentes et 0) et trois sous-espaces propres (les deux droites précédentes et $Vect(U,V)^\perp$).

66. C'est en fait un exercice élémentaire.
Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles positives de A, alors :
$\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, et : $tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.
D'autre part la fonction logarithme est concave et donc :
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.\ln(\lambda_k) \leq \ln(\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$, et en prenant l'exponentielle (qui est croissante) : $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n}$,
d'où le résultat.

67. a. Pour : X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ∀ 1 ≤ k ≤ p, ${}^tX.S_k^2.X \geq 0$, donc :

$${}^tX.S.X = \sum_{k=1}^{p} {}^tX.S_k^2.X = \sum_{k=1}^{p} {}^tX.{}^tS_k.S_k.X = \sum_{k=1}^{p} \|S_k.X\|^2 \geq 0, \text{ et : } S \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

b. Il est immédiat que si : ∀ 1 ≤ k ≤ p, $S_k = 0$, alors : S = 0.

Réciproquement si : S = 0, alors : ∀ X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\sum_{k=1}^{p} \|S_k.X\|^2 \geq 0$, et : ∀ 1 ≤ k ≤ p, $S_k.X = 0$, d'où : $S_k = 0$.

68. a. On sait que : ∀ S ∈ $S_n(\mathbb{R})$, ∃ P ∈ O(n), ∃ D ∈ $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$, S = P.D.^{t}P.
D étant diagonale, alors pour p impair, tout élément diagonal de D admet une racine p$^{\text{ième}}$ réelle unique.
Notons Δ la matrice constituée de ces racines p$^{\text{ièmes}}$ (dans le même ordre).
Alors : $\Delta^p = D$, et : $(P.\Delta.{}^tP)^p = P.\Delta^p.{}^tP = P.D.{}^tP = S$.
Autrement dit, en notant : $R = P.\Delta.{}^tP$, on a : $R^p = S$.
Et on constate immédiatement que : ${}^tR = P.{}^t\Delta.{}^tP = P.\Delta.{}^tP = R$, et R est symétrique réelle.

b. Si S est dans $S_n^+(\mathbb{R})$, alors les éléments diagonaux de la matrice D précédente sont des réels positifs.
En effet : ∀ λ ∈ Sp(S), ∃ X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X ≠ 0, S.X = λ.X.
Mais on a de plus : ${}^tX.S.X \geq 0$, donc : ${}^tX.S.X = {}^tX.\lambda.X = \lambda.\|X\|^2$, et X étant non nul, on en déduit : λ ≥ 0.
Donc on peut constituer la matrice Δ avec les racines p$^{\text{ièmes}}$ positives des éléments diagonaux de S et poser à nouveau : $R = P.\Delta.{}^tP$.
Alors :
- ${}^tR = R$, comme précédemment et R est symétrique,
- $R^p = P.\Delta^p.{}^tP = S$,
- ∀ X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.R.X = {}^t(P.X).\Delta.(P.X) = {}^tY.\Delta.Y = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[p]{\lambda_i}.y_i^2 \geq 0$, où les λ_i sont les valeurs propres

de S et où on a pose : Y = P.X, et donc : R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$.
Finalement on a trouvé : R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, telle que : $R^p = S$.

c. Dans le cas particulier où : p = 2, on obtient que : ∀ S ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, ∃ R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, $R^2 = S$.
Si : S ∈ $S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors R inversible et : R ∈ $S_n^{++}(\mathbb{R})$, car les valeurs propres de S et donc celles de R sont strictement positives.
En effet, le calcul fait dans la question b montre que :

∀ λ ∈ Sp(S), avec X un vecteur propre associé, alors : $\lambda = \dfrac{{}^tX.S.X}{\|X\|^2} > 0$.

D'où : ∀ X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X ≠ 0, ${}^tX.R.X = {}^tY.\Delta.Y = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}.y_i^2 > 0$, avec les même notations que dans la question b, et l'inégalité est garantie par le fait que les λ_i sont tous non nuls et qu'il y a au moins un des y_i qui est non nul puisque : (X ≠ 0) ⇒ (Y = P.X ≠ 0).
Finalement dans ce cas, on a bien : R ∈ $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

69. Si R répond au problème, étant symétrique réelle, elle est diagonalisable.
Notons alors r et s les endomorphismes canoniquement associés à R et S, et plus généralement dans la suite on appellera par des majuscules les matrices (carrées ou colonnes) canoniquement associées aux endomorphismes et vecteurs, désignés par des minuscules
Si on note $\mu_1, \ldots, \mu_k$ les valeurs propres de r et $E_1(r), \ldots, E_k(r)$ ses sous-espaces propres associés, alors :

∀ 1 ≤ i ≤ k, ∀ x ∈ $E_i(r)$, x ≠ 0, $R.X = \mu_i.X$, et : ${}^tX.R.X = \mu_i.{}^tX.X = \mu_i.\|X\|^2 \geq 0$,

car R est de plus positive.
Donc : ∀ 1 ≤ i ≤ k, $\mu_i \geq 0$, et les valeurs μ_i^2 sont distinctes deux à deux.
De plus, on a aussi : ∀ 1 ≤ i ≤ k, ∀ x ∈ $E_i(r)$, $S.X = R^2.X = \mu_i^2.X$.
On en déduit que :
- ∀ 1 ≤ i ≤ k, μ_i^2 est valeur propre de s,
- ∀ 1 ≤ i ≤ k, $E_i(r) \subset E_{\mu_i^2}(s)$.

Or $\mathbb{R}^n$ est la somme directe des $E_i(r)$, et les sous-espaces $E_{\mu_i^2}(s)$ sont également en somme directe, et cette somme est incluse dans $\mathbb{R}^n$.

En examinant les dimensions de ces différents sous-espaces, on constate que : $\forall\ 1 \leq i \leq k$, $E_i(r) = E_{\mu_i^2}(s)$.

De plus, s ne peut admettre d'autre sous-espace propre et donc aucune autre valeur propre.
Autrement dit, les valeurs μ_i^2 sont <u>les</u> valeurs propres de s et $E_i(r)$ les sous-espaces propres associés.
En conclusion, si on reprend $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, les valeurs propres de s et $E_i(s)$ les sous-espaces propres associés, alors r ne peut valoir que :

$\forall\ 1 \leq i \leq k$, $\forall\ x \in E_i(s)$, $r(x) = \sqrt{\lambda_i}.x$

r étant défini sur cette famille de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ dont la somme directe donne $\mathbb{R}^n$, il est défini sur $\mathbb{R}^n$ et ce, de façon unique.
L'endomorphisme r étant unique, la matrice canoniquement associée est également unique.

Matrices orthogonales.

70. a. On remarque pour commencer que : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $(I_n + A + \ldots + A^p).(I_n - A) = I_n - A^{p+1}$.

Comme : $1 \in Sp(A)$, la matrice $(I_n - A)$ est inversible, et :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $U_p = \dfrac{1}{p+1}.(I_n - A^{p+1}).(I_n - A)^{-1}$.

Considérons alors la norme canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associée au produit scalaire canonique.

Alors : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\left\|A^{p+1}\right\|^2 = tr({}^tA^{p+1}.A^{p+1}) = tr(I_n) = n$, et :

$\left\|\dfrac{1}{p+1}.(I_n - A^{p+1})\right\| \leq \dfrac{1}{p+1}.(\|I_n\| + \|A^{p+1}\|) = \dfrac{2.\sqrt{n}}{p+1}$, donc la suite $\left(\dfrac{1}{p+1}.(I_n - A^{p+1})\right)$ tend vers 0.

Avec une norme d'algèbre par exemple, on en déduit que (U_p) tend vers 0 car :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $N(U_p) \leq N\left(\dfrac{1}{p+1}.(I_n - A^{p+1})\right).N((I_n - A)^{-1})$.

Remarque : on peut, avec du recul, dire directement que $(I_n - A)^{-1}$ étant constante, on en déduit directement que (U_p) tend vers 0.

b. Etant bornée (question a), la suite (A^p) peut converger.
Supposons qu'elle converge vers une limite M.
Alors : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(A^p.X)$ tend vers M.X, et la suite $(A^{p+1}.X)$ converge également vers M.X.
Mais s'écrivant $(A^p.A.X)$, elle converge aussi vers M.A.X.
Donc : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M.(A.X - X) = 0$.
Apparaissent alors deux possibilités :

- $M \neq 0$, et : $\exists\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M.X \neq 0$, et dans ce cas : $A.X = X$, ce qui conduirait à un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, ce qui est exclu,
- $M = 0$, mais la suite (A^p) ne peut tendre vers 0, puisque : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\|A^p\| = \sqrt{n}$, qui ne tend pas vers 0.

Conclusion : la suite (A^p) diverge.

71. a. Si on calcule la norme euclidienne canonique des trois colonnes de A, on trouve :

$\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\|C_k\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2.(a.b + b.c + c.a) = S^2 - 2.\sigma$.

D'autre part, les produits scalaires des colonnes deux à deux donnent :

$\forall\ 1 \leq i \neq j \leq 3$, $(C_i | C_j) = a.b + b.c + c.a = \sigma$.

Il est alors clair que : $(A \in O(3)) \Leftrightarrow (S^2 - 2.\sigma = 1$, et : $\sigma = 0) \Leftrightarrow (\sigma = 0$, et : $S \in \{-1,+1\})$.

b. Il suffit de regarder l'influence qu'a la condition supplémentaire : $\det(A) = 1$.
Or : $\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3.a.b.c = (a+b+c)^3 - 3.(a+b+c).(a.b+b.c+c.a) = S^3 - 3.S.\sigma$,
et au besoin en raisonnant par double implication, on obtient aisément :
$(A \in SO(3)) \Leftrightarrow (\sigma = 0$, et : $S = 1)$.

c. Les trois coefficients sont racines de P si et seulement si : $P = (X-a).(X-b).(X-c)$, soit si et seulement si, en égalant les coefficients dans les deux expressions de P :

- $S = 1$, (termes en X^2),
- $\sigma = 0$ (termes en X),
- $a.b.c = -k$ (termes constants).

Considérons alors la fonction polynomiale f déduite de P.

On a : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, f'(x) = $3.x^2 - 2.x$, et f' s'annule en 0 et $\frac{2}{3}$.

Comme de plus : f(0) = k, f($\frac{2}{3}$) = k – $\frac{4}{27}$, l'étude des variations de f sur $\mathbb{R}$ montre que cette fonction a trois racines réelles si et seulement si : f(0) ≥ 0, et : f($\frac{2}{3}$) ≤ 0, soit : k $\in$ [0, $\frac{4}{27}$].

Conclusion : (A $\in$ SO(3)) ⇔ (a,b,c racines de P avec : k $\in$ [0, $\frac{4}{27}$]) soit encore :

(A $\in$ SO(3)) ⇔ (∃ k $\in$ [0, $\frac{4}{27}$], tel que a, b et c sont les racines de : $P = X^3 - X^2 + k$).