Produit scalaire (corrigé des indispensables).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

1. a. Rappel : si on part d'une famille infinie, une combinaison linéaire des vecteurs de la famille ne peut dans tous les cas comporter qu'un nombre fini de coefficients non nuls.
Autrement dit montrer qu'une famille infinie est libre est équivalent à montrer que toute sous-famille finie est libre.
Soit alors $\mathscr{F}$ une famille orthonormale de vecteurs de E, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une sous-famille de $\mathscr{F}$.
Alors cette famille est libre, puisque si : $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0$, avec : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, alors :
$\forall 1 \le i \le n$, $0 = (x_i|\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n) = \lambda_1.(x_i|x_1) + \dots + \lambda_n(x_i|x_n) = \lambda_i.1 = \lambda_i$.
b. Si on reprend la démonstration précédente, elle s'adapte avec pour changement dans la dernière ligne :
$\forall 1 \le i \le n$, $0 = \lambda_i.(x_i|x_i)$.
On distingue alors deux cas :
• si la famille ne comporte pas le vecteur nul, alors on peut conclure à : $\forall 1 \le i \le n$, $\lambda_i = 0$, et la famille est libre,
• si la famille comporte le vecteur nul, alors elle est liée.
Conclusion : une famille orthogonale est libre si et seulement si elle ne comporte pas le vecteur nul.

2. Toutes les propriétés pour faire de cette application un produit scalaire, lorsque l'on passe de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ à E sauf le caractère défini de la forme proposée.
En effet, la fonction f, nulle sur [0,1[et valant 1 en 1, est continue par morceaux de [0,1] dans $\mathbb{R}$, donc appartient à E, est non nulle et pourtant : $\int_0^1 f(t)^2.dt = 0$.
Donc on n'obtient pas un produit scalaire sur E.

3. On peut commencer, en développant le produit matriciel par remarquer que :
$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}.b_{k,i}$.
a. Les matrices étant carrées et réelles, φ définit bien une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$.
Puis : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = tr({}^tA.B) = tr({}^t({}^tB.A)) = tr({}^tB.A) = \varphi(B,A)$, et φ est symétrique.
La linéarité de la trace et de la transposition montrent la linéarité de φ par rapport à B.
On a par ailleurs : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \ge 0$.
Enfin, au vu de la dernière expression, $\varphi(A)$ ne s'annule que si A est nulle.
Donc φ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
b. Le fait que $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ soient supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un résultat classique.
De plus : $\forall (A,S) \in \mathscr{A}_n \times \mathscr{S}_n$, $\varphi(A,S) = tr({}^tA.S) = -\,tr(A.S)$, et : $\varphi(S,A) = tr({}^tS.A) = tr(S.A) = tr(A.S)$.
Mais ces deux quantités étant aussi égales (par symétrie de φ), on en déduit que : $\varphi(A,S) = 0$.
$\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ sont donc bien orthogonaux.
c. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à A et I_n, pour : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors : $\varphi(I_n, A) = tr({}^tI_n.A) = tr(A) \le \sqrt{\varphi(I_n, I_n)}.\sqrt{\varphi(A,A)} = \sqrt{tr(I_n)}.\sqrt{tr({}^tA.A)} = \sqrt{n}.\sqrt{tr({}^tA.A)}$.
Enfin les cas d'égalité correspondent aux cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit si et seulement si A et I_n sont liées.
Et I_n étant non nulles, c'est encore équivalent au fait que A est une matrice scalaire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $A = \lambda.I_n$.

4. a. L'application proposée est définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.
En effet, si : $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, alors la fonction sous l'intégrale proposée est définie, continue sur $[0,+\infty)$ et : $t \mapsto t^2.f(t).g(t).e^{-t}$, tend vers 0 en $+\infty$ (théorème des croissances comparées).
Donc l'intégrale correspondante est convergente et est réelle puisque f et g sont à valeurs réelles.
La symétrie est par ailleurs immédiate, ainsi que la linéarité par rapport à g (toutes les intégrales qui apparaissent par développement convergent).
L'application est de plus positive, car si : $f \in \mathbb{R}[X]$, alors f^2 est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Elle est enfin définie car si, pour : $f \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\int_0^{+\infty} f(t)^2.e^{-t}.dt = 0$, la fonction : $t \mapsto f(t)^2.e^{-t}$, étant positive et continue sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit qu'elle est nulle sur $[0,+\infty)$, et donc f aussi.

Comme polynôme, f admet alors une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

b. Peu de choses changent par rapport à la démonstration précédente.
L'existence est à nouveau garantie par le théorème des croissances comparées avec :
$\forall$ (f,g) $\in$ E^2, $t^2.f(t).g(t).e^{-t} = [t^{n_f}.f(t)].[t^{n_g}.g(t)].[t^{2-n_f-n_g}.e^{-t}]$,
et les trois termes de ce dernier produit tendent vers 0 en $+\infty$.
Les points 2, 3 et 4 s'obtiennent de façon identique, et le point 5 évite la référence aux polynômes.

c. Il est immédiat que sin et cos sont dans E, avec : n = – 1.
Il suffit alors d'appliquer le procédé de Schmidt en posant :

- $f_1 = \sin$,
- $f_2 = \cos + \lambda.\sin$, et on détermine λ avec : $\int_0^{+\infty} \sin(t).[\cos(t) + \lambda.\sin(t)].e^{-t}.dt = 0$.

En linéarisant et en passant en exponentielles, on a :

- $\int_0^{+\infty} \sin(t).\cos(t).e^{-t}.dt = \frac{1}{2}.\int_0^{+\infty} \sin(2.t).e^{-t}.dt = \frac{1}{2}.\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+2.i).t}.dt\right) = \frac{1}{2}.\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(-1+2.i).t}}{-1+2.i}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{5}$,
- $\int_0^{+\infty} \sin^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2.t)}{2}.e^{-t}.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+2.i).t}.dt\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+2.i).t}}{-1+2.i}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{2}{5}$.

On choisit donc : $\lambda = -\frac{1}{2}$, et : $f_2 = \cos - \frac{1}{2}.\sin$.
Enfin, on calcule les normes de ces vecteurs :

- $\int_0^{+\infty} f_1^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} \sin^2(t).e^{-t}.dt = \frac{2}{5}$, donc on pose : $g_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}.\sin$,
- $\int_0^{+\infty} f_2^2(t).e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} [\cos^2(t) - \sin(t).\cos(t) + \frac{1}{4}.\sin^2(t)].e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}.\frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

soit donc : $g_2 = \sqrt{2}.[\cos - \frac{1}{2}.\sin]$.

5. Il suffit, pour : f $\in$ $C^0([a,b],\mathbb{R})$, strictement positive sur [a,b], d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$, et :

$$\int_a^b \sqrt{f(t)}.\frac{1}{\sqrt{f(t)}}.dt = (b-a) \le \sqrt{\int_a^b \sqrt{f(t)}^2.dt}.\sqrt{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(t)}^2}.dt} = \sqrt{\int_a^b f(t).dt}.\sqrt{\int_a^b \frac{1}{f(t)}.dt},$$

et de passer au carré, sachant que toutes les quantités dans l'inégalité sont positives.
Il y a égalité si et seulement si les deux fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont liées, et puisque les fonctions sont non nulles, cela s'écrit encore : $\exists$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f} = \lambda.\frac{1}{\sqrt{f}}$, soit : $f = \lambda$.
Conclusion : il y a égalité si et seulement si f est constante et strictement positive.

6. Cherchons tout d'abord x colinéaire à a, donc de la forme : x = μ.a.
Alors x est solution si et seulement si : $\mu.\|a\|^2 = \lambda$, donc il y a une unique solution qui est : $x_0 = \frac{\lambda}{\|a^2\|}.a$.
Maintenant x dans E est solution si et seulement si : (a|x) = λ = (a|x_0), ou encore : (a|x – x_0) = 0.
Conclusion : les solutions sont les vecteurs de la forme : x = x_0 + y, y $\in$ $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

7. Travaillons par double implication :
   - si x et y sont orthogonaux, alors : $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + \lambda.y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2.\|y\|^2 \ge \|x\|^2$, d'où le résultat.
   - si : $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\| \le \|x + \lambda.y\|$, alors : $0 \le 2.\lambda.(x|y) + \lambda^2.\|y\|^2$, en passant au carré et en développant.

Dans ce cas, on en déduit que :

- si : $\lambda > 0$, $0 \leq 2.(x|y) + \lambda.\|y\|^2$, et en faisant tendre λ vers 0, on déduit que : $0 \leq (x|y)$,
- si : $\lambda < 0$, $0 \geq 2.(x|y) + \lambda.\|y\|^2$, et en faisant tendre λ vers 0, on en déduit que : $0 \geq (x|y)$,

donc finalement : $0 = (x|y)$.

Remarque : on peut aussi reprendre le principe de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en écartant d'abord le cas où : $\|y\| = 0$, (et dans ce cas : y = 0, et : $0 = (x|y)$) et dans le cas restant, le trinôme restant positif, son discriminant est négatif où nul, ce qui redonne : $0 = (x|y)$.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

8. a. Soit : $1 \leq k \leq n$.

Alors : $\|e_k\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n} (e_k|e_i)^2 = \sum_{i \neq k} (e_k|e_i)^2 + 1$, donc tous les carrés étant positifs, ils sont nuls.

On vient de montrer que : $\forall\ 1 \leq i \neq k \leq n$, $(e_i|e_k) = 0$, et la famille est orthogonale.
Les vecteurs étant de plus unitaires, la famille est orthonormale.

b. Montrons que : $F^\perp = \{0\}$, et pour cela soit : $x \in F^\perp$.

Alors : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = 0$, puisque x étant orthogonal à F, il est orthogonal à tous les e_i.

Donc on en déduit bien : x = 0, puis : $F^\perp = \{0\}$.
Finalement : $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$, et $(e_1, \ldots, e_n)$, comme base de F est une base de E.

9. • Si : $x \in (F + G)^\perp$, alors : $\forall\ y \in F$, $(x|y) = (x|y + 0) = 0$, puisque : $y + 0 \in F + G$.
Donc : $x \in F^\perp$, et de manière symétrique : $x \in G^\perp$, autrement dit : $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Si : $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors : $\forall\ (y,z) \in F \times G$, $(x|y + z) = (x|y) + (x|z) = 0$.
Donc : $x \in (F + G)^\perp$, autrement dit : $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.
Finalement, on a bien égalité (et c'est valable dans tout espace préhilbertien en fait).
• Puis, en utilisant ce qui précède et la fait que pour tout sous-espace vectoriel V de E, on a : $V^{\perp\perp} = V$, on en déduit que : $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} = F \cap G$.
Donc en passant aux orthogonaux : $(F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp} = F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

10. Si f et g sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, alors la fonction |f.g| étant continue sur le segment [-1,+1], elle y est bornée par un réel M.

Puis l'application : $t \mapsto \frac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, est définie et continue sur]-1,+1[, et : $\forall\ t \in$]-1,+1[, $\frac{|f(t).g(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$,
ce qui garantit l'intégrabilité de la fonction sous l'intégrale sur]-1,+1[et la convergence de cette intégrale.
Donc l'application (qu'on notera φ) est définie de $\mathbb{R}_n[X]^2$ dans $\mathbb{R}$.
Elle est clairement symétrique, et linéaire par rapport à g, toutes les intégrales intervenant étant convergentes.

Elle est positive car pour : $f \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction : $t \mapsto \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$, est positive sur]-1,+1[.

Enfin, elle est définie car si pour f donnée, on a : $\varphi(f,f) = 0$, la fonction au-dessus en plus d'être positive sur]-1,+1[, y est continue et elle est donc nulle sur]-1,+1[.
Enfin, f admettant alors une infinité de racines est donc le polynôme nul.
On pose ensuite classiquement :

- $P_0 = 1$,
- $P_1 = X + \lambda.P_0$, et on trouve λ avec : $\varphi(P_0, P_1) = 0 = \int_{-1}^{+1} \frac{t+\lambda}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt$.

Or la première intégrale est nulle car la fonction est impaire sur]-1,+1[et la deuxième vaut π (à l'aide de arcsin), donc on en déduit que : $\lambda = 0$, et : $P_1 = X$.

- $P_2 = X^2 + \lambda.P_1 + \mu.P_0$, et à nouveau, on étudie :

$\varphi(P_0, P_2) = 0 = \int_{-1}^{+1} \frac{t^2 + \lambda.t + \mu}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \mu.\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt$.

On utilise le changement de variable (bijectif et C^1) : t = sin(θ), et : $\int_{-1}^{+1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta).d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Donc la condition devient : $\frac{\pi}{2} + 0.\lambda + \pi.\mu = 0$, soit : $\mu = -\frac{1}{2}$.

L'autre condition est : $\varphi(P_1, P_2) = 0 = \int_{-1}^{+1} \frac{t^3 + \lambda.t^2 + \mu.t}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-1}^{+1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \lambda.\int_{-1}^{+1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt + \mu.\int_{-1}^{+1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.dt$,

et avec l'imparité des fonctions : $0 + \frac{\pi}{2}.\lambda + 0.\mu = 0$, soit : $\lambda = 0$.

Une base orthogonale est ainsi donnée par : (1, X, $X^2 - \frac{1}{2}$).

On termine en calculant la norme de ces vecteurs avec :

- $\varphi(P_0, P_0) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \pi$, soit : $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.P_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$,
- $\varphi(P_1, P_1) = \int_{-1}^{+1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \frac{\pi}{2}$, soit : $Q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.P_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.X$,
- $\varphi(P_2, P_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{t^4 - t^2 + \frac{1}{4}}{\sqrt{1-t^2}}.dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^4(\theta).d\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3.\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, soit : $Q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.(2.X^2 - 1)$.

11. On pose :
   - e_1 = u = (1,1,1),
   - e_2 = v + λ.e_1, et on détermine λ avec : (e_1|e_2) = 0 = 1 + 3.λ, soit : $\lambda = -\frac{1}{3}$, puis : $e_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$,
   - e_3 = w + λ.e_1 + μ.e_2, et les conditions d'orthogonalité donnent :

     (e_1|e_3) = 0 = 1 + 3.λ, soit : $\lambda = -\frac{1}{3}$,

     (e_2|e_3) = 0 = $-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}.\mu$, soit : $\mu = \frac{1}{2}$, et donc : e_3 = (1,0,-1).

   On norme ensuite les vecteurs et on obtient la famille :

   (ε_1, ε_2, ε_3) = (($\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$), ($\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$), ($\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$)).

   Remarque : les produits scalaires (u|ε_1), (v|ε_2) et (w|ε_3) sont tous strictement positifs.

12. a. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt sans normer les vecteurs, on obtient d'abord :
   - P_0 = 1,
   - $P_1 = X - \frac{1}{2}$,
   - $P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

   On calcule alors les normes de ces vecteurs : $\|P_0\|^2 = 1$, $\|P_1\|^2 = \frac{1}{12}$, $\|P_2\|^2 = \frac{1}{180}$, et on en déduit la base orthonormale : (Q_0, Q_1, Q_2) = (1, $\sqrt{3}.(2.X - 1)$, $\sqrt{5}.(6.X^2 - 6.X + 1)$).

   b. On commence par interpréter la quantité cherchée.

   Pour cela : ∀ (a,b) ∈ $\mathbb{R}^2$, $\int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx = \|X^2 - (a.X + b)\|^2$, avec la norme associée, et :

   $\inf_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx = \inf_{P \in R_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = d(X^2, R_1[X])^2$.

On sait alors que cette distance est atteinte pour un unique polynôme, projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, et comme on dispose d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$, on sait de plus que :

$p(X^2) = (Q_0|X^2).Q_0 + (Q_1|X^2).Q_1$.

Il suffit de calculer alors : $(Q_0|X^2) = \int_0^1 1.t^2.dt = \frac{1}{3}$, et : $(Q_1|X^2) = \sqrt{3}.\int_0^1 (2.t^3 - t^2).dt = \frac{\sqrt{3}}{6}$, et :

$p(X^2) = \frac{1}{3}.1 + \frac{\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}.(2.X - 1) = X - \frac{1}{6}$.

Enfin, la distance cherchée vaut : $d(X^2,\mathbb{R}_1[X]) = \left\|X^2 - (X - \frac{1}{6})\right\| = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2.dt} = \frac{1}{6.\sqrt{5}}$, et

finalement : $\inf\limits_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx =$ $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2 = \frac{1}{180}$.

Projecteurs orthogonaux.

13\. a. On détermine d'abord une base orthogonale du plan en posant un premier vecteur :
- $u_1 = (1,1,0)$, et en cherchant : $u_2 = (x,y,z)$, tel que :
- $x - y + z = 0$, et : $(u_1|u_2) = 0 = x + y$, soit par exemple : $u_2 = (1, -1, -2)$.

On norme alors ces vecteurs pour aboutir à la base cherchée : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}))$.

b. On peut alors déterminer cette projection p, soit par sa matrice dans la base canonique, soit par l'expression de l'image d'un vecteur u quelconque de $\mathbb{R}^3$, et par exemple :

$\forall$ u = (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$, p(u) = $(\varepsilon_1|u).\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|u).\varepsilon_2 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}.(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) + \frac{x-y-2.z}{\sqrt{6}}.(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}})$, soit :

p(u) = $(\frac{2.x+y-z}{3},\frac{x+2.y+z}{3},\frac{-x+y+2.z}{3})$.

On peut aussi en déduire la matrice de p dans la base canonique qui vaut : $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14\. a. On peut calculer cette matrice dans une base adaptée puis utiliser un changement de base.
On peut aussi déterminer une base orthonormale de F (qui est un plan, comme intersection de deux hyperplans non parallèles) en remarquant que :
F = Vect((1,0,-1,0), (0,1,0,-1)), et cette base étant orthogonale, il suffit de normer les vecteurs, soit :
- $\varepsilon_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$,
- $\varepsilon_2 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}})$.

On calcule alors les images des vecteurs de la base canonique à l'aide de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, par exemple :

p((1,0,0,0)) = $(\varepsilon_1|(1,0,0,0)).\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|(1,0,0,0)).\varepsilon_2 = (\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0)$, de même pour les autres et finalement :

$mat_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Cette distance s'obtient à l'aide de la projection orthogonale du vecteur sur F qui vaut :
p((1,2,3,4)) = (-1, -1, 1, 1), et : d((1,2,3,4),F) $= \|(1,2,3,4) - (-1,-1,1,1)\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{26}$.

15\. On calcule immédiatement : $A^2 = A$, donc p est un projecteur.
Puisque : tr(A) = 2, on en déduit que : rg(p) = 2, et que c'est une projection sur un plan P.
On détermine ce plan comme l'image de p, et : P = Vect(5.i – 2.j + k, -2.i + 2.j + 2.k).

Enfin la direction de projection est donnée par le noyau de p qu'on détermine avec le système : A.X = 0, qui donne : ker(p) = Vect(i + 2.j – k).
Enfin, on vérifie que Im(p) et ker(p) sont orthogonaux en calculant :
- (5.i – 2.j + k|i + 2.j – k) = 5 – 4 – 1 = 0,
- (-2.i + 2.j + 2.k|i + 2.j – k) = -2 + 4 – 2 = 0.

p est bien la projection orthogonale de E sur P.

Matrices symétriques réelles.

16. La matrice A est symétrique réelle, donc on <u>peut</u> la diagonaliser par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale.
Son polynôme caractéristique vaut : $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)^2.(-3-\lambda)$.
L'espace propre (dans $\mathbb{R}^3$ pour l'endomorphisme u canoniquement associé à A) correspondant à la valeur propre 3 est le plan d'équation : x + y + z = 0, et celui correspondant à la valeur propre -3 est la droite dirigée par le vecteur (1,1,1).
Ils sont bien orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
On choisit alors une base orthogonale de chacun des sous-espaces propres :
- (1,1,1) pour la droite,
- un premier vecteur (1,-1,0) dans le plan et un autre vérifiant : x + y + z = 0, et : x – y = 0, soit par exemple le vecteur (1,1,-2).

En réunissant ces deux bases, on obtient une base orthogonale de l'espace $\mathbb{R}^3$, qu'il suffit de normer pour obtenir une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.
On pose alors : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, matrice orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$ (la base canonique et la base $\mathscr{B}$), et : ${}^tP.A.P = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

17. a. Comme A est réelle, la matrice ${}^tA.A$ est une matrice réelle et : ${}^t({}^tA.A) = {}^tA.{}^t({}^tA) = {}^tA.A$, elle est symétrique.
Donc ses valeurs propres sont réelles.
De plus, soit : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, et : $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, telle que : $[{}^tA.A].X = \lambda.X$.
Alors : ${}^tX.({}^tA.A).X = \lambda.{}^tX.X$, ce qui s'écrit encore : $\|A.X\|^2 = \lambda.\|X\|^2$, pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On en déduit, X étant non nul, que : $\lambda = \dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.
b. Commençons par remarquer que : $\det({}^tA.A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = \det({}^tA).\det(A) = (\det(A))^2$.
Il y a donc équivalence entre :
- A n'est pas inversible,
- det(A) = 0,
- l'une des valeurs propres de ${}^tA.A$ est nulle.

Comme on sait déjà que ces valeurs propres sont toutes positives, on en déduit l'équivalence voulue.

18. a. B étant clairement réelle et symétrique, ses valeurs propres sont réelles.
On notera par ailleurs α la plus grande valeur propre de B et β la plus petite.
b. On constate que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X \in \mathbb{R}$, et donc : ${}^t({}^tX.A.X) = {}^tX.{}^tA.{}^t({}^tX) = {}^tX.{}^tA.X$.
Donc : ${}^tX.B.X = \frac{1}{2}.({}^tX.A.X + {}^tX.{}^tA.X) = {}^tX.A.X$.
c. Etant symétrique réelle, on peut diagonaliser B par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale P.

Donc : $\exists$ D $\in$ $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$, ${}^tP.B.P = D$.
Alors : $\forall$ X $\in$ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X = {}^tX.B.X = {}^tX.P.D.{}^tP.X$.
Si on note : $Y = {}^tP.X$, on a : ${}^tX.P.D.{}^tP.X = {}^tY.D.Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2$, et donc : $\alpha.\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2 \leq \beta.\sum_{i=1}^{n} y_i^2$,
où on a noté $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B, soit encore les éléments diagonaux de D.
Enfin : $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = {}^tY.Y = {}^tX.P.{}^tP.X = {}^tX.X$, puisque P est orthogonale.
Finalement, on a bien : $\alpha.{}^tX.X \leq {}^tX.A.X \leq \beta.{}^tX.X$.

d. Soit enfin λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé (donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul).
Alors : ${}^tX.A.X = {}^tX.\lambda.X = \lambda.{}^tX.X$.
Et comme : ${}^tX.X = \|X\|^2 \neq 0$, l'inégalité précédente se réécrit en : $\alpha.\|X\|^2 \leq \lambda.\|X\|^2 \leq \beta.\|X\|^2$.
En divisant par $\|X\|^2$, on conclut que : $\lambda \in [\alpha,\beta]$.

19. a. Soit : X $\in$ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a évidemment : $(A.X = 0) \Rightarrow ({}^tA.A.X = 0)$.
Réciproquement, si : ${}^tA.A.X = 0$, alors en multipliant par ${}^tX$, on obtient :
$0 = {}^tX.{}^tA.A.X = {}^t(A.X).(A.X) = \|A.X\|^2$, où $\| \, . \, \|$ désigne la norme canonique dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Donc : A.X = 0, et l'implication réciproque est démontrée.

b. On démontre alors que : $\ker(A) = \ker({}^tA.A)$.
En effet, l'équivalence précédente montre clairement que :
$\forall$ X $\in$ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X \in \ker(A)) \Leftrightarrow (X \in \ker({}^tA.A))$, d'où l'égalité.
On en déduit que : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA.A)$, par le théorème du rang.

Remarque : il est courant de remplacer petit à petit les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ par leur matrice canoniquement associée.

20. A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et ses valeurs propres sont réelles.
De plus, on dispose d'un polynôme annulateur pour A, à savoir $(X^k - 1)$, et les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme, donc sont des racines de l'unité.
Or les seuls réels qui sont des racines de l'unité sont 1 et -1.
Donc A est semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont ±1.
Par conséquent, D vérifie : $D^2 = I_n$, et A aussi.

Endomorphismes orthogonaux.

21. a. Pour : $x \in F^\perp$, on a : $\forall$ $y \in F$, $(x|y) = 0$, et donc : $(u(x)|u(y)) = 0$.
Autrement dit : $\forall$ $z \in u(F)$, $\exists$ $y \in F$, $z = u(y)$, et : $(u(x)|z) = 0$, donc : $u(x) \in u(F)^\perp$.
On vient de montrer que : $u(F^\perp) \subset (u(F))^\perp$.
De plus, u étant un endomorphisme orthogonal, conserve la dimension des sous-espaces vectoriels (il transforme toute famille libre en une famille libre), donc :
- $\dim(u(F^\perp)) = \dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$, et
- $\dim(u(F)^\perp) = \dim(E) - \dim(u(F)) = \dim(E) - \dim(F)$.

L'inclusion précédente et l'égalité des dimensions permet de conclure à l'égalité : $u(F^\perp) = (u(F))^\perp$.

b. Montrons l'implication $[\Rightarrow]$, et pour cela, supposons F stable par u.
Puisque u est un endomorphisme orthogonal, il conserve la dimension, et donc : $u(F) \subset F$, permet d'en déduire que : $u(F) = F$.
Alors : $\forall$ $x \in F^\perp$, $\forall$ $z \in F$, $\exists$ $y \in F$, $z = u(y)$, et : $(u(x)|z) = (u(x)|u(y)) = (x|y) = 0$.
Donc : $u(x) \in F^\perp$, et $F^\perp$ est bien stable par u.
Enfin, pour l'implication réciproque :
si $F^\perp$ est stable par u, alors avec l'implication directe, on en déduit que : $(F^\perp)^\perp = F$, est stable par u.

22. On commence par remarquer que sous l'hypothèse faite sur f, on a :
$\forall$ $(x,y) \in E^2$, $(f(x+y)|x+y) = 0 = (f(x)|x) + (f(y)|y) + (f(x)|y) + (x|f(y)) = (f(x)|y) + (x|f(y))$.
Donc : $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.
Soit maintenant : $x \in \ker(f)$, et : $z \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors : $\exists$ $y \in E$, $z = f(y)$, et : $(x|z) = (x|f(y)) = -(f(x)|y) = (0|y) = 0$.

Donc : $\ker(f) \subset (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, et le théorème du rang donne l'égalité des dimensions.
Donc : $\ker(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

23. On sait déjà, par le théorème du rang que la somme des dimensions de ces deux espaces vaut dim(E).
Montrons maintenant qu'ils sont orthogonaux, et pour cela, soit : $y \in \ker(f - id_E)$, $z \in \mathrm{Im}(f - id_E)$.
Alors : $\exists\, x \in E$, $z = (f - id_E)(x) = f(x) - x$, et : $f(y) = y$.
Donc : $(y|z) = (y|f(x) - x) = (y|f(x)) - (y|x) = (f(y)|f(x)) - (y|x) = 0$,
car f est un endomorphisme orthogonal et il conserve le produit scalaire.
Donc les espaces sont orthogonaux.
Conclusion : $\ker(f - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ sont bien supplémentaires orthogonaux dans E.

24. Soit E un espace vectoriel euclidien et a un vecteur unitaire de E.
Pour : $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit f_α sur E par : $\forall\, x \in E$, $f_\alpha(x) = x + \alpha.(a|x).a$.
a. Vérifier que : $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in \mathscr{L}(E)$, et calculer $f_\alpha o f_\beta$, pour : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
b. Montrer que : (f_α bijective) $\Leftrightarrow$ ($\alpha \neq -1$).
c. Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de f_α sans calculer sa matrice représentative ou son polynôme caractéristique, et en déduire une description géométrique de f_α.

25. On va utiliser une double implication.
Si f est une symétrie orthogonale, alors : $f^2 = id_E$, et donc f est diagonalisable (par exemple avec le polynôme $(X^2 - 1)$ annulateur pour f, scindé à racines simples).
Si f est à la fois orthogonal et diagonalisable, alors soit : $\lambda \in Sp(f)$, et x un vecteur propre associé.
On a : $f(x) = \lambda.x$, donc : $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$, et x étant non nul, on en déduit : $|\lambda| = 1$.
Les seules valeurs propres possibles de f sont donc 1 et -1, et la matrice D de f dans une base de vecteurs propres est diagonale.
Puisque ses éléments diagonaux valent 1 ou -1, on a : $D^2 = I_n$, et f vérifie aussi : $f^2 = id_E$.
f est donc une symétrie.
Soient maintenant : $x \in \ker(f - id_E)$, et : $y \in \ker(f + id_E)$.
Alors : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$, car f est orthogonal, et : $(f(x)|f(y)) = (x|-y) = -(x|y)$, soit donc : $(x|y) = 0$.
Les deux espaces qui définissent la symétrie sont donc orthogonaux et la symétrie est orthogonale.

Matrices orthogonales.

26. Si A est triangulaire supérieure et orthogonale, notons C_k ses colonnes.
Alors pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), on a :
- $\|C_1\|^2 = 1 = a_{1,1}^2$, donc : $a_{1,1} = \pm 1$, et :
- $\forall\, 2 \leq i \leq n$, $(C_1|C_i) = 0 = a_{1,1}.a_{1,i}$, donc : $a_{1,i} = 0$.

Puis :
- $\|C_2\|^2 = 1 = a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2$, et comme : $a_{1,2} = 0$, on en déduit que : $a_{2,2} = \pm 1$, et :
- $\forall\, 3 \leq i \leq n$, $(C_2|C_i) = 0 = a_{2,2}.a_{2,i}$, donc : $a_{2,i} = 0$.

Par récurrence, on montre alors que :
$\forall\, 1 \leq j \leq n$, $\forall\, 1 \leq i \leq j - 1$, $a_{i,j} = 0$, et : $a_{j,j} = \pm 1$.
Autrement dit la matrice A est diagonale, avec comme éléments diagonaux des 1 ou -1.
Réciproquement, de telles matrices sont bien triangulaires supérieures et orthogonales.
Il y en a donc 2^n.

27. Si A est une telle matrice, alors sa première ligne comporte au moins un terme non nul, puisque :
$\|L_1\|^2 = 1$, pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
Supposons que : $a_{1,j} \neq 0$.
Alors : $\forall\, 2 \leq i \leq n$, $0 = (L_1|L_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}.a_{i,k} \geq a_{1,j}.a_{i,j} \geq 0$, puisque tous les autres produits sont positifs.
Or : $a_{1,j} \neq 0$, donc : $\forall\, 2 \leq i \leq n$, $a_{i,j} = 0$.
Autrement dit, il y a un seul terme non nul dans la colonne j, nombre qu'on va noter : $j = \sigma(1)$.
Et comme la colonne j doit être de norme 1, on a aussi : $\|C_j\|^2 = a_{1,\sigma(1)}^2 = 1$, donc : $a_{1,\sigma(1)} = 1$ (car positif).

De même, L_2 comporte au moins un terme non nul qui ne peut être $a_{2,\sigma(1)}$, donc :

$\exists$ j' = $\sigma(2) \neq \sigma(1)$, tel que : $a_{2,\sigma(2)} \neq 0$, et : $\forall\ 1 \leq i \neq 2 \leq n$, $0 = (L_2|L_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}.a_{i,k} \geq a_{2,\sigma(2)}.a_{i,\sigma(2)} \geq 0$.

Or à nouveau : $a_{2,\sigma(2)} \neq 0$, donc : $\forall\ 1 \leq i \neq 2 \leq n$, $a_{i,\sigma(2)} = 0$.

Enfin, avec la colonne $\sigma(2)$ (qui ne comporte donc qu'un seul terme non nul), on déduit : $a_{2,\sigma(2)} = 1$.

On continue par récurrence pour construire ainsi une permutation σ de $\mathbb{N}_n$, telle que :

$\forall\ 1 \leq k \leq n$, $a_{k,\sigma(k)} = 1$, et : $\forall\ k' \neq k$, $a_{k',\sigma(k)} = 0$.

Autrement dit, A est une matrice définie avec une permutation σ par : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$, où δ est le symbole de Kronecker.

Réciproquement, toute matrice du type précédent est bien orthogonale (elle correspond à une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette même base canonique, dont on a permuté les vecteurs suivant σ) et ses coefficients sont positifs.

Il y en a donc n!

28. a. Soit ainsi X le vecteur proposé.

Alors : $A.X = Y$, avec : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$, et :

$${}^tX.A.X = \alpha, \text{ avec : } \alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(1.\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}, \text{ autrement dit : } {}^tX.A.X = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}.$$

b. Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs X et A.X dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique.

Alors : $|(X|A.X)| = |{}^tX.A.X| \leq \|X\|.\|A.X\|$.

Or A étant une matrice orthogonale, (et au besoin en revenant à l'endomorphisme u, canoniquement associé qui est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique), on a :

$$\|X\| = \sqrt{1+\ldots+1} = \sqrt{n}, \text{ et : } \|A.X\| = \|X\| = \sqrt{n}, \text{ d'où on déduit : } \left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq \sqrt{n}.\sqrt{n} = n.$$

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

29. Pour les trois matrices proposées on peut calculer les produits ${}^tA.A$, ${}^tB.B$ ou ${}^tC.C$ ou vérifier que les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On constate ainsi que les trois matrices sont orthogonales.

• det(A) = 1, et A représente donc une rotation u de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique.

L'axe Δ de cette rotation correspond aux vecteurs invariants par u qui sont donnés par : A.X = X.

On trouve ainsi : Δ = Vect((1,4,1)).

L'angle θ de u est donné par : $2.\cos(\theta) + 1 = \mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A)$, soit : $\cos(\theta) = -1$, donc : $\theta = \pi$.

Donc u est un demi-tour (ou retournement) et il n'y a pas lieu de préciser ici le sens.

u est aussi une symétrie orthogonale par rapport à Δ (et u est diagonalisable car A est symétrique réelle).

• det(B) = -1, et B représente la composée d'une rotation u par rapport à un axe Δ et de la symétrie orthogonale par rapport à : $P = \Delta^\perp$.

L'axe Δ correspond aux vecteurs changés en leur opposé qui sont donnés par : B.X = -X.

On trouve ainsi : Δ = Vect((-3,1,1)).

L'angle θ de la rotation est donné par : $2.\cos(\theta) - 1 = \mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(B)$, soit : $\cos(\theta) = \frac{5}{6}$, ou : $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.

Enfin, le sens de la rotation est déterminé par exemple à l'aide d'un vecteur de : $P = \Delta^\perp$ (qui ne subit que la rotation), par exemple avec : e = (0,1,-1).

L'image de e vaut : $u(e) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$, et : $e \wedge u(e) = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, qui est évidemment sur Δ.

Si donc on oriente Δ avec ce dernier vecteur (ou le vecteur (-3,1,1) qui est de même sens), alors P est canoniquement orienté et la rotation dans P se fait dans le sens positif.

• det(C) = 1, et C représente une rotation u de $\mathbb{R}^3$.

L'axe Δ de cette rotation correspond aux vecteurs invariants par u, donnés par : C.X = X.

On trouve ainsi : Δ = Vect((1,0,1)).

L'angle θ est donné par : 2.cos(θ) + 1 = tr(u) = tr(C), soit : cos(θ) = 0, et : $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, le sens de la rotation se détermine avec un vecteur orthogonal à Δ, par exemple : e = (0,1,0).

L'image de e vaut : u(e) = $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, et : e∧u(e) = $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, qui est évidemment sur Δ.

Si donc on oriente Δ avec ce dernier vecteur (ou le vecteur (1,0,1) qui est de même sens), alors P est canoniquement orienté et la rotation dans P se fait dans le sens positif.

30. Plusieurs méthodes sont possibles :
- utiliser la projection orthogonale (à l'aide d'une base orthonormale de P) et en déduire la symétrie orthogonale cherchée),
- trouver la matrice de la symétrie dans une base adaptée et en déduire à l'aide de formules de changement de base la matrice cherchée.

Par exemple, une base orthogonale de P est par exemple fournie avec :
- (1,0,2) ∈ P,
- on cherche : (x,y,z) ∈ P, orthogonal au précédent, donc vérifiant : 2.x + 3.y – z = 0, et : x + 2.z = 0.

On peut ainsi proposer : (-6,5,3).

On norme ces vecteurs, et on peut proposer : $\varepsilon_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\varepsilon_2 = (\frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}})$.

On cherche alors une base orthonormale de $P^\perp$, par exemple : $\varepsilon_3 = (\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}})$.

Dans la base (ε_1, ε_2, ε_3), la matrice de la symétrie vaut : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose alors : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$, et la matrice cherchée est : $A = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, en utilisant :

$A = P.A'.P^{-1} = P.A'.{}^tP$.

On peut noter qu'on obtient bien une matrice orthogonale (c'est la matrice d'une isométrie), et elle est symétrique réelle, donc diagonalisable.

31. On va plutôt montrer que l'application r définie par l'énoncé est bien la rotation annoncée.

Pour cela, on constate que r est bien linéaire (c'est immédiat par bilinéarité du produit scalaire et du produit vectoriel).

Cherchons alors la matrice de r dans une base bien choisie et choisissons par exemple u, v un vecteur de norme 1 et orthogonal à u, et : w = u∧v.

Alors :
- r(u) = (1 – cos(θ)).1.u + cos(θ).u + 0 = u,
- r(v) = (1 – cos(θ)).0 + cos(θ).v + sin(θ).u∧v = cos(θ).v + sin(θ).w,
- r(w) = (1 – cos(θ)).0 + cos(θ).w + sin(θ).u∧w = cos(θ).w – sin(θ).v,

et la matrice de r dans la base (u,v,w) est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

r est donc bien la rotation d'angle θ, d'axe dirigé et orienté par u.