Produit scalaire (corrigé des classiques).

Exercices généraux sur le produit scalaire.

32. Il est clair que φ est une bien une application de $\mathbb{R}[X]^2$ dans $\mathbb{R}$, car des polynômes sont de classe C^∞ et l'intégrale se calcule sur un segment.
D'autre part, φ est symétrique et linéaire par rapport à Q (la variable de droite) donc bilinéaire.
Ensuite : ∀ P ∈ $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,P) = \int_0^1 P'(t)^2.dt + P(0).P(1)$.
Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $C^0([0,1],\mathbb{R})$, montre que :
$|P(1)-P(0)| = \left|\int_0^1 P'(t).1.dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 P'(t)^2.dt}.\sqrt{\int_0^1 dt}$, donc :
$$\varphi(P,P) \geq (P(1)-P(0))^2 + P(0).P(1) = P(1)^2 + P(1).P(0) + P(0)^2 = (P(1)+\frac{1}{2}.P(0))^2 + \frac{3}{4}.P(0)^2.$$
Sous cette dernière forme, il est clair que : $\varphi(P,P) \geq 0$, et φ est positive.
Enfin, si de plus : $\varphi(P,P) = 0$, alors :
- $P(0) = P(1) = 0$, et :
- il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on a utilisée, donc : ∃ λ ∈ $\mathbb{R}$, $P' = \lambda.1$.

On en déduit alors que P est affine, mais s'annulant en 0 et 1, c'est le polynôme nul, et φ est définie.
Conclusion : φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

33. Notons : $\mathscr{B}$ = (e_1, …, e_n), une base de E, orthonormale pour φ.
Alors : ∀ 1 ≤ i ≠ j ≤ n, φ(e_i, e_j) = 0, donc : ψ(e_i, e_j) = 0, et la base est orthogonale pour ψ.
De plus : ∀ 1 ≤ i ≠ j ≤ n, φ(e_i – e_j, e_i + e_j) = φ(e_i, e_i) – φ(e_j, e_j) = 1 – 1 = 0.
Donc : 0 = ψ(e_i – e_j, e_i + e_j) = ψ(e_i, e_i) – ψ(e_j, e_j), puisque la base est orthogonale pour ψ et donc :
∀ 1 ≤ i ≠ j ≤ n, ψ(e_i, e_i) = ψ(e_j,e_j).
Notons alors cette dernière quantité α.
α est dans $\mathbb{R}^{+*}$, car c'est la norme au carré (attachée au produit scalaire ψ) d'un vecteur non nul (puisque normé) de E.
De plus : ∀ (x,y) ∈ E^2, avec : $x = \sum_{i=1}^n x_i.e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i.e_i$, on a :
$$\psi(x,y) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i.y_j.\psi(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n x_i.y_i.\psi(e_i,e_i) = \alpha.\sum_{i=1}^n x_i.y_i = \alpha.\varphi(x,y),$$
et donc : ψ = α.φ.

34. a. On va essayer d'utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz, et pour cela on utilise le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, pour les vecteurs ($\sqrt{x_1},\ldots,\sqrt{x_n}$) et ($\frac{1}{\sqrt{x_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}$).
Alors : $\left|\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right| = n \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}^2}} = 1.\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$, donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.
b. Il y a égalité (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) si et seulement si les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une famille liée ce qui, étant non nuls, est équivalent à :
∃ λ ∈ $\mathbb{R}$, ∀ 1 ≤ k ≤ n, $\sqrt{x_k} = \lambda.\frac{1}{\sqrt{x_k}}$, ou : $x_k = \lambda$.
Comme enfin, on a imposé : $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, cela entraîne : $\lambda = \frac{1}{n}$.
On vérifie immédiatement que le n-uplet ($\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}$) conduit bien à une égalité, et c'est donc la seule solution.

35. On va utiliser le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donné par : $\forall$ (A,B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(A|B) = tr({}^tA.B)$.
Si maintenant A et B sont symétriques, alors :
$(A|B) = tr({}^tA.B) = tr(A.B) = (B|A) = tr({}^tB.A) = tr(B.A)$.
Donc : $(tr(A.B + B.A)) = 2.(A|B)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors : $|tr(A.B + B.A)| = 2.|(A|B)| \leq 2.\sqrt{tr(A^2)}.\sqrt{tr(B^2)}$,
d'où le résultat cherché en passant au carré.

36. a. Pour : $n \in \mathbb{N}$, l'application : $P \mapsto P(0)$, est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
De plus, l'application : $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t).Q(t).dt$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc : $\exists$! $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que la forme linéaire précédente coïncide avec le produit scalaire par Q_n, soit :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt$.
b. Supposons que : $\deg(Q_n) \neq n$, et donc : $\deg(Q_n) < n$.
Alors considérons le polynôme : $P = X.Q_n$.
On aurait : $0 = P(0) = \int_0^1 t.Q_n(t).Q_n(t).dt = \int_0^1 t.Q_n(t)^2.dt$.
Or la fonction : $t \mapsto t.Q_n(t)^2$, est continue sur [0,1] et positive, donc elle est nulle sur [0,1] puisque d'intégrale nulle.
Donc Q_n admet une infinité de racines (toutes les valeurs de]0,1]) donc Q_n est nul.
On aurait donc : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt = 0$, ce qui n'est pas le cas pour : P = 1.
Donc : $\deg(Q_n) = n$.
c. Si un tel polynôme existait, il aurait un degré N donné et serait donc solution du problème précédent dans $\mathbb{R}_N[X]$, alors qu'on a montré que c'était impossible.
Il n'y a donc pas de solution dans $\mathbb{R}[X]$.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

37. Famille obtusangle.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soient $x_1, \ldots, x_{n+2}$ des vecteurs de E.
On veut montrer qu'il n'est pas possible d'avoir : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n+2$, $(x_i|x_j) < 0$.
a. Pour : n = 1, on peut confondre E avec $\mathbb{R}$ et le produit scalaire est alors le produit dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, si on a trois nombres réels x_1, x_2 et x_3, alors les trois produits $x_1.x_2$, $x_1.x_3$ et $x_2.x_3$ ne peuvent être tous trois strictement négatifs car sinon le produit de ces trois quantités serait également strictement négatif, alors que :
$(x_1.x_2).(x_1.x_3).(x_2.x_3) = x_1^2.x_2^2.x_3^2 \geq 0$.
b. On suppose maintenant le résultat établi pour tout espace de dimension (n – 1), pour n donné tel que : $n - 1 \geq 1$.
Soit alors une famille de n+2 vecteurs $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ de E, espace vectoriel de dimension n, telle que :
$\forall\ i \neq j \leq n+2$, $(x_i|x_j) < 0$.
Alors ces vecteurs sont non nuls (produits scalaires non nuls) et x_{n+2} étant non nul, on note :
$F = \mathrm{Vect}(x_{n+2})^\perp$, qui est un espace de dimension (n – 1).
Soit alors p la projection orthogonale de E sur F, et : $\forall\ 1 \leq i \leq n+1$, $p(x_i) = x_i'$, avec : $x_i = x_i' + x_i^\perp$.
Alors : $\forall\ 1 \leq i \leq n+1$, $x_i^\perp = \lambda_i.x_{n+2}$, car : $x_i^\perp \in F^\perp = \mathrm{Vect}(x_{n+2})$.
Or : $(x_i|x_{n+2}) = (x_i'|x_{n+2}) + (\lambda_i.x_{n+2}|x_{n+2}) = \lambda_i.\|x_{n+2}\|^2$, car : $x_i' \in F = \mathrm{Vect}(x_{n+2})^\perp$.
Et comme ce produit scalaire est négatif par hypothèse, on en déduit que : $\lambda_i < 0$.
De plus : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n+1$, $(x_i|x_j) = (x_i' + x_i^\perp|x_j' + x_j^\perp) = (x_i'|x_j') + (x_i^\perp|x_j^\perp)$,
puisque les autres vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
Donc : $(x_i'|x_j') = (x_i|x_j) - \lambda_i.\lambda_j.\ \|x_{n+2}\|^2 < 0$, et la famille $(x'_1, \ldots, x_{n+1}')$ est obtusangle dans un espace F de dimension (n – 1), ce qui est impossible.
Donc il n'est pas possible de trouver dans E une famille obtusangle à (n+2) vecteurs, ce qui termine la récurrence.
c. Le maximum de vecteurs est donc (n+1) dans un espace de dimension n.
Remarque : on n'a pas effectivement obtenu ici un maximum, mais un majorant du nombre de vecteurs formant une famille obtusangle.

38. a. Supposons donc que la famille (x_1, …, x_n) est liée, et donc que l'un des vecteurs (x_k) est combinaison linéaire des autres vecteurs, par exemple : $x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j . x_j$.

Alors : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $(x_i|x_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j .(x_i|x_j)$, soit : $g_{i,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j . g_{j,k}$, ou plus globalement : $C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_j . C_j$,

où C_j désigne la colonne j de la matrice G.

Puisqu'alors l'une des colonnes de G est combinaison linéaire des autres, G n'est pas inversible et : det(G) = 0.

b. Si on note : $\forall$ 1 ≤ j ≤ n, $x_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} . x_i$, alors les $p_{i,j}$ sont les coefficients de P.

De plus : $\forall$ 1 ≤ i,j ≤ n, $(x_i|x_j) = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} . p_{j,k}$, et donc : G = ${}^tP.P$.

P étant inversible (comme matrice de passage), on en déduit que : det(G) = $\det(P)^2 > 0$.

c. On en déduit que la famille est libre si et seulement si : det(G) ≠ 0, et dans ce cas : det(G) > 0.

d. Si la famille comporte moins de vecteurs que la dimension, alors det(G) est nul si la famille est liée car la même démonstration que la précédente reste valable.

Et si la famille est libre, on la complète avec une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)^{\perp}$, par exemple ($u_{p+1}$, …, u_n), et on peut donner la matrice de Gram de (x_1, …, x_p, u_{p+1}, …, u_n), qui vaut :

$$G' = \begin{pmatrix} G & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que : det(G') = det(G) ≠ 0, puisque la famille des n vecteurs est une base de E, et même : det(G') > 0.

39. • Supposons X vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre λ et soit : Y $\in$ H.

Alors : ${}^tX.(A.Y) = {}^tX.A.Y = {}^t({}^tA.X).Y = \lambda.{}^tX.Y = 0$, car : Y $\in$ H, et H est bien stable par A.

• Supposons H stable par A.

Alors : $\forall$ Y $\in$ H, A.Y $\in$ H, et : ${}^tX.(A.Y) = 0 = {}^t({}^tA.X).Y$.

Le vecteur ${}^tA.X$ est donc orthogonal à l'hyperplan H et appartient donc à son orthogonal.

Mais X est non et dans $H^{\perp}$, donc il en constitue une base, et : $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tA.X = \lambda.X$ (relation de colinéarité).

Mais cette relation peut aussi se lire en disant que X est vecteur propre de ${}^tA$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

40. • Montrons d'abord qu'une telle décomposition, si elle existe, est unique, et pour cela, supposons que : A = Q.R = Q'.R', où Q et Q' sont orthogonales et R et R' triangulaires supérieures à éléments diagonaux strictement positifs.

Alors Q et R' sont inversibles (puisque : det(R') ≠ 0, produit de ses éléments diagonaux).

Donc : $Q'^{-1}.Q = R'.R^{-1}$.

Cette matrice est donc orthogonale (produit de deux matrices orthogonales), mais aussi triangulaire supérieure (R^{-1} est triangulaire supérieure et le produit de deux matrices triangulaires supérieures l'est aussi), à éléments diagonaux strictement positifs (ceux de R^{-1} sont les inverses de ceux de R donc sont positifs, et ceux du produit sont les produits des éléments diagonaux.

Or on a montré dans l'exercice 28 que de telles matrices sont diagonales avec des éléments diagonaux égaux à ±1.

Donc avec le fait que les éléments diagonaux sont positifs, on en déduit qu'elle vaut I_n, et donc :

- $Q'^{-1}.Q = I_n$, donc : Q = Q',
- $R'.R^{-1} = I_n$, donc : R = R'.

• Considérons maintenant A comme la matrice représentative d'une famille : $\mathcal{F}$ = (x_1, …, x_n), de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (donnés par les colonnes de A).

Alors cette famille est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^n$, puisque A est inversible.

Notons : $\mathcal{B}$ = (ε_1, …, ε_n), la base orthonormale fournie par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la famille $\mathcal{F}$, avec la condition : $\forall$ 1 ≤ k ≤ n, $(\varepsilon_k|x_k) > 0$, où (.|.) désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notons enfin P la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{B}$, et Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$.

La matrice Q est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.
Par construction de la famille $\mathscr{B}$, la matrice P est triangulaire supérieure car :
$\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\varepsilon_k \in \text{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$.
Son inverse : $R = P^{-1}$, est donc aussi triangulaire supérieure et : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $x_k \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$.
Enfin, l'élément diagonal $r_{k,k}$ correspond à la coordonnée de x_k selon ε_k, et la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ étant orthonormale, on a : $r_k = (\varepsilon_k|x_k) > 0$.
Enfin : $A = \text{mat}(\mathscr{B}_c \to \mathscr{S}) = \text{mat}(\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}).\text{mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{S}) = Q.P^{-1} = Q.R$,
soit bien ce que l'on voulait (Q orthogonale, R triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs).

Projecteurs orthogonaux.

41. On peut écrire : $x = \lambda.y + n$, avec : $n \in \text{Vect}(y)^{\perp}$, soit : $(y|n) = 0$.
Donc : $(x|y) = \lambda.\|y\|^2$, et la projection orthogonale de x sur Vect(y) vaut : $\dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}.y$.
De même, la projection orthogonale de y sur Vect(x) vaut : $\dfrac{(y|x)}{\|x\|^2}.x$.
Donc ces deux vecteurs sont égaux si et seulement si : $\dfrac{(y|x)}{\|x\|^2}.x = \dfrac{(x|y)}{\|x\|^2}.x = \dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}.y$.
Distinguons alors deux cas :
- x et y sont orthogonaux et les deux projections sont alors bien égales,
- x et y ne sont par orthogonaux et ils sont alors colinéaires puisque : $\|y\|^2.x = \|x\|^2.y$.

Si maintenant, on recalcule la norme de ces vecteurs, on obtiens : $\|y\|^2.\|x\| = \|x\|^2.\|y\|$, et comme x et y sont non nuls, on en déduit que : $\|x\| = \|y\|$, puis : $x = y$.
Dans ce dernier cas, les deux projections sont encore égales.
Finalement les deux projections proposées sont égales si et seulement si x et y sont égaux ou orthogonaux.

42. Si H existe, alors : on doit avoir : $x = p_H(x) + x^{\perp}$, où : $x^{\perp} \in H^{\perp}$.
Donc : $x - y \in H^{\perp}$, et comme : $x - y \neq 0$, le vecteur : $n = x - y$, dirige la droite $D^{\perp}$.
Autrement dit H ne peut valoir que : $H = \text{Vect}(x - y)^{\perp}$.
Réciproquement : $(n|y) = (x - y|y) = (x|y) - \|y\|^2 = 0$, et : $y \in \text{Vect}(n)^{\perp} = H$.
Et comme : $x = (x - y) + y$, avec : $(x - y) \in H^{\perp}$, et : $y \in H$, on a bien : $y = p_H(x)$.

43. a. La matrice U est clairement orthogonale (ses vecteurs colonnes forment la base canonique de $\mathbb{R}^n$, dans un ordre permuté de l'ordre canonique).
Donc : ${}^tU = U^{-1}$.
De plus puisqu'on peut interpréter U comme la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, défini par : $u(e_1) = e_n$, et : $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $u(e_i) = e_{i-1}$, il est clair que pour : $1 \leq k \leq n - 1$, la diagonale de U^k, est formée de 0.
Alors : $\forall\ 0 \leq p < q \leq n - 1$, $(U^p|U^q) = tr({}^tU^p.U^q) = tr(U^{-p}.U^q) = tr(U^{q-p})$.
Mais pour un tel couple (p,q) d'entiers, on a : $1 \leq q - p \leq n - 1$, et : $tr(U^{q-p}) = 0$.
La famille est bien orthogonale et tous ses vecteurs étant non nuls, elle est libre.
Mais comme elle est génératrice de F, elle en constitue donc une base orthogonale.
b. On peut en déduire une base orthonormale de F en normant ces vecteurs, et :
$\forall\ 0 \leq k \leq n - 1$, $\|U^k\|^2 = tr({}^tU^k.U^k) = tr(I_n) = n$, car U (et donc les U^k) est orthogonale.
On peut ainsi en déduire la projection orthogonale de A sur F qui vaut :
$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{U^k}{\sqrt{n}}\Big|A\right).\frac{U^k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} (U^k|A).U^k .$$
Il reste à calculer : $\forall\ 0 \leq k \leq n - 1$, $(U^k|A) = (A|U^k) = tr(A|U^k) = 1$, car toutes les lignes de la matrice $A.U^k$ sont nulles sauf la première et comme la matrice U^k a sa première colonne constituée de 0 et d'un seul 1, le premier élément diagonal de la matrice $A.U^k$ est le seul non nul et vaut 1.

Enfin, la description de u montre, avec une récurrence, que la matrice U^k a la même forme que U en décalant la diagonale de 1 vers le coin supérieur droit, et finalement : $p_F(A) = A' = \frac{1}{n}.\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

44. a. Calculons le produit : $S = D^{-1}.A.D$, pour une matrice diagonale D.

En notant : A' = A.D, on obtient successivement :

$\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_{i,j}' = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.d_{k,j} = a_{i,j}.d_{j,j}$, puis : $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_{i,k}}.a_{k,j}' = a_{i,j}.\frac{d_{j,j}}{d_{i,i}}$.

D répondra au problème posé si et seulement si : $\forall\ 1 \leq j \leq n-1$, $s_{j+1,j} = s_{j,j+1}$, c'est-à-dire :

$a_{j+1,j}.\frac{d_{j,j}}{d_{j+1,j++1}} = c_j.\frac{d_{j,j}}{d_{j+1,j++1}} = a_{j,j++1}.\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}} = b_j.\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}}$, soit : $\frac{c_j}{b_j} = \left(\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}}\right)^2$.

Si maintenant, on impose à $d_{1,1}$ de valoir 1, D répondra au problème si et seulement si :

$\forall\ 1 \leq j \leq n-1$, $\frac{d_{j+1,j+1}}{d_{j,j}} = \varepsilon_j.\sqrt{\frac{c_j}{b_j}}$, avec : $\varepsilon_j = \pm 1$.

Une solution est alors définie par : $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $d_{l,l} = \prod_{j=1}^{i-1} \sqrt{\frac{c_j}{b_j}}$.

Autrement dit, on vient de proposer une matrice D répondant au problème posé.

b. La matrice S étant diagonalisable puisque symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe donc P orthogonale et Δ diagonale, telle que : $\Delta = {}^tP.S.P = P^{-1}.S.P$.

Donc : $\Delta = P^{-1}.D^{-1}.A.D.P = (D.P)^{-1}.A.(D.P)$, et A est diagonalisable.

45. a. On sait déjà, puisque ${}^tA.A$ est symétrique réelle, que toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$ sont réelles.

Soit ensuite μ_i une des valeurs propres et X un vecteur propre associé.

Alors : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tA.A.X = \mu_i.X$, et donc : ${}^tX.{}^tA.A.X = \mu_i.{}^tX.X$, ce qui s'écrit encore :

$\|A.X\|^2 = \mu_i.\|X\|^2$, ou : $\mu_i = \frac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2}$, où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et où on a utilisé le fait que X est non nul.

Donc μ_i est bien positive.

b. Il suffit de dire que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ est la somme des valeurs propres de ${}^tA.A$ donc égale à sa trace.

Or si on note : $S = {}^tA.A.$, alors : $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}.a_{k,j}$, et : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

46. La matrice $({}^tA.A - A.{}^tA)$ est symétrique et réelle, donc diagonalisable.

De plus, par hypothèse, toutes ses valeurs propres sont positives.

Enfin $tr({}^tA.A - A.{}^tA)$ est la somme des valeurs propres de cette matrice et :

- elle est positive car les valeurs propres sont positives,
- elle est nulle car : $tr({}^tA.A) = tr(A.{}^tA)$.

Donc toutes les valeurs propres de $({}^tA.A - A.{}^tA)$ sont nulles et étant diagonalisable, cette matrice est semblable à la matrice nulle, donc est nulle.

Finalement : ${}^tA.A = A.{}^tA$, et A et ${}^tA$ commutent.

47. a. Pour : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(A.X).(B.X)$ représente le produit scalaire (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canonique) de A.X et B.X.

On a donc :

- $(A.X|B.X) = {}^t(A.X).B.X = {}^tX.{}^tA.B.X = -\,{}^tX.A.B.X$, et :
- $(A.X|B.X) = (B.X|A.X) = {}^t(B.X).A.X = {}^tX.{}^tB.A.X = {}^tX.B.A.X = {}^tX.A.B.X$, puisque A et B commutent.

Ces deux quantités étant à la fois égales et opposées, elles sont nulles.

b. $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$\|(A+B).X\|^2 = ((A+B).X|(A+B).X) = {}^tX.{}^tA.A.X + {}^tX.{}^tA.B.X + {}^tX.{}^tB.A.X + {}^tX.{}^tB.B.X = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$,

vu les égalités qu'on a constatées dans la question a,

$\|(A-B).X\|^2 = {}^tX.{}^tA.A.X - {}^tX.{}^tA.B.X - {}^tX.{}^tB.A.X + {}^tX.{}^tB.B.X = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$,

d'où finalement l'égalité voulue.

c. Supposons donc B inversible, et soit : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que : $(A + B).X = 0$.

Alors la norme de ce vecteur est nulle et : $0 = \|A.X\|^2 + \|B.X\|^2$, donc comme somme de carrés, on en déduit que : $B.X = 0$, puis : $X = 0$, puisque B est inversible.

Donc : $\ker(B) = \{0\}$, (en confondant B et l'endomorphisme u canoniquement associé), et B est inversible (puisque u est injectif dans $\mathbb{R}^n$, donc bijectif).

On peut aussi utiliser l'argument que B est alors régulière, donc inversible.

De façon identique, on montre que $(A - B)$ est inversible.

Enfin : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = (A - B).Y$, et :

$\|(A+B).(A-B)^{-1}.X\| = \|(A+B).Y\| = \|(A-B).Y\| = \|X\|$ (on a utilisé l'égalité de la question b).

La matrice $(A + B).(A - B)^{-1}$ conserve donc la norme dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et est donc orthogonale.

On peut aussi dire que l'endomorphisme v canoniquement associé à cette matrice conserve la norme dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, donc sa matrice représentative dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est orthogonale.

48. a. Notons tout d'abord que ${}^tA.A$ est symétrique réelle donc toutes ses valeurs propres sont réelles.

Puis pour X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a :

${}^tX.{}^tA.A.X = {}^t(A.X).A.X = \|A.X\|^2$, et : ${}^tX.{}^tA.A.X = {}^tX.{}^t(A.A.X) = {}^tX.(\lambda.X) = \lambda.{}^tX.X = \lambda.\|X\|^2$.

Donc X étant non nul, on en déduit que : $\lambda = \dfrac{\|A.X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

Donc toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$ sont positives.

b. Si A est inversible, alors pour X un vecteur non nul, A.X n'est jamais nul.

Donc toute valeur propre de A est strictement positive.

c. On va s'attacher à la positivité et la définition de cette forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si : $A = B$, alors $\mathrm{tr}({}^tA.A)$ est la somme des valeurs propres de ${}^tA.A$ qui est évidemment réelle, mais aussi positive puisque toutes les valeurs propres de cette matrice sont positive : c'est une forme positive.

• De plus, si cette trace est nulle, alors comme somme de nombres positifs, tous ces nombres (et donc toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$) sont nul(le)s.

Mais ${}^tA.A$ étant de plus diagonalisable car symétrique réelle, ${}^tA.A$ est semblable à la matrice nulle (la matrice diagonale rassemblant ses valeurs propres).

Donc : ${}^tA.A = 0$.

Enfin : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $({}^tA.A.X = 0) \Rightarrow (\|A.X\| = 0)$ (avec la question a) $\Rightarrow (A.X = 0)$,

et A est bien la matrice nulle (l'endomorphisme canoniquement associé à A est nul) : la forme est définie.

Finalement, l'application : $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA.B)$, définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

49. a. On a immédiatement : $\forall (A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, $(A + B)$ est symétrique réelle et :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.(A + B).X = {}^tX.A.X + {}^tX.B.X \geq 0$, et : $(A + B) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b. Si de plus on suppose que : $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tX.(A + B).X = {}^tX.A.X + {}^tX.B.X > 0$,

comme somme d'un élément positif et d'un élément strictement positif.

Donc : $(A + B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Tout d'abord : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA.A$ est symétrique réelle puisque : ${}^t({}^tA.A) = {}^tA.{}^t({}^tA) = {}^tA.A$.

Puis : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.{}^tA.A.X = \|A.X\|^2 \geq 0$, où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc : $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

d. Si de plus A est inversible, alors :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A.X = 0) \Rightarrow (A^{-1}.A.X = X = 0)$, et donc :

$\forall$ X $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X $\neq$ 0, ${}^tX.{}^tA.A.X = \|A.X\|^2 > 0$, car : A.X $\neq$ 0.

Donc : ${}^tA.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Tout d'abord, la matrice ${}^tA.S.A$ est bien symétrique puisque : ${}^t({}^tA.S.A) = {}^tA.{}^tS.{}^t({}^tA) = {}^tA.S.A$.

Puis : $\forall$ X $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que : X $\neq$ 0, alors : Y = A.X $\neq$ 0, car A est inversible, et donc :

${}^tX.{}^tA.S.A.X = {}^tY.S.Y > 0$,

et : ${}^tA.S.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales.

50. a. Pour : x $\in$ E, on a : $\|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\|$, donc : $\|f(x)\| = \|x\|$.

b. Pour : (x,y) $\in E^2$, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.\|x\|^2 + 2.\|y\|^2$.

Pour : x $\in$ E, en appliquant l'égalité précédente aux vecteurs f(x) et f(-x), on obtient :

$$\|f(x)+f(-x)\|^2 + \|f(x)-f(-x)\|^2 = 2.\|f(x)\|^2 + 2.\|f(-x)\|^2 = 2.\|x\|^2 + 2.\|-x\|^2 = 4.\|x\|^2.$$

Puis : $\|f(x)-f(-x)\| = \|x-(-x)\| = 2.\|x\|$, et avec le carré, on en déduit que : $\|f(x)+f(-x)\|^2 = 0$.

Donc : $\forall$ x $\in$ E, f(-x) + f(x) = 0, et : f(-x) = – f(x).

c. On calcule alors : $\forall$ (x,y) $\in E^2$,

- $\|f(x)-f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2.(f(x)|f(y))$,
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2.(x|y)$,

et comme ces quantités sont égales, la question a permet de conclure que : (f(x)|f(y)) = (x|y).

d. Puisque f conserve la norme et le produit scalaire, la famille ($f(e_1)$, …, $f(e_n)$) est une base orthonormale de E, et donc dans cette base orthonormale de E, on peut écrire :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(e_k)|f(x)).f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x).f(e_k).$$

e. Il reste à montrer que f est linéaire, mais c'est maintenant immédiat :

$\forall$ (x,y) $\in E^2$, $\forall$ (λ,μ) $\in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda.x+\mu.y) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|\lambda.x+\mu.y).f(e_k) = \lambda.\sum_{k=1}^{n} (e_k|x).f(e_k) + \mu.\sum_{k=1}^{n} (e_k y).f(e_k) = \lambda.f(x) + \mu.f(y).$$

Et puisque f conserve la norme (ou le produit scalaire), f est bien un automorphisme orthogonal de E.

51. Soit A une matrice appartenant à ($\mathbf{O}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$).

Toutes les colonnes de A doivent être de norme 1 pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc il y a un et un seul terme non nul par colonne, puisque de plus, cette valeur doit être entière, et ce terme vaut $\pm$1.

De plus, deux colonnes distinctes doivent être orthogonales, donc les deux termes non nuls ne peuvent se trouver sur la même ligne.

Plus précisément, si on note, pour: 1 $\leq$ j $\leq$ n, σ(j) le numéro de ligne telle que : $a_{\sigma(j),j} \neq 0$, alors :

$\forall$ 1 $\leq$ j $\neq$ j' $\leq$ n, $\sigma(j) \neq \sigma(j')$,

autrement dit l'application σ, de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est injective, donc bijective et c'est une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Réciproquement, considérons maintenant une matrice A construite à l'aide d'une permutation de $\mathbb{N}_n$, de telle sorte que tous ses termes soient nuls sauf : $\forall$ 1 $\leq$ j $\leq$ n, $a_{\sigma(j),j} = \pm1$.

Alors les colonnes de A forment bien une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et A répond au problème.

Conclusion : il y a $2^n.n!$ solutions au problème étudié et : card($\mathbf{O}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) = $2^n.n!$.

52. Nous allons ici confondre matrices et endomorphismes, ces derniers étant rapportés à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{R}^n$ sera identifié ainsi à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Une base de $\mathbb{R}^n$ est formée par C et une famille (C_1, …, C_{n-1}) de (n – 1) vecteurs orthogonaux à C.

On a alors :

- $S.C = (I_n - \frac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC).C = C - \frac{2}{{}^tC.C}.C.({}^tC.C) = C - 2.C = -C$, car : ${}^tC.C \in \mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n – 1, $S.C_i = (I_n - \frac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC).C_i = C_i - \frac{2}{{}^tC.C}.C.({}^tC.C_i) = C_i - 0 = C_i$.

Autrement dit S laisse tous les vecteurs de la base orthogonaux à C invariants et transforme C en – C : c'est donc bien la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$ par rapport à : H = Vect(C_1, …, C_{n-1}) = Vect(C)$^\perp$, ce qu'on appelle encore la réflexion par rapport à H.

Exercice général.

53. Polynômes de Legendre.

a. Pour n dans $\mathbb{N}$, Q_n est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré 2.n donc est de degré n.
On va maintenant utiliser le théorème de Rolle et noter : $R_n = (X^2 - 1)^n$.
• R_n a deux racines d'ordre n, 1 et -1, donc R_n' s'annule sur]-1,+1[en une valeur : $a_{1,1} \in$]-1,+1[.
• R_n' s'annule donc en 1 et -1 (racines d'ordre n – 1 de R_n') et en $a_{1,1}$: le théorème de Rolle à nouveau montre que R_n'' s'annule en deux valeurs : $a_{2,1} < a_{2,2}$, de]-1,+1[.
• si on suppose que pour : $1 \leq k \leq n - 1$, $R_n^{(k)}$ s'annule en k valeurs : $a_{k,1} < \dots < a_{k,k}$, de]-1,+1[, alors ce polynôme s'annule encore en 1 et -1 (ce sont des racines d'ordre : $n - k \geq 1$), et le théorème de Rolle montre que : $R_n(k)' = R_n^{(k+1)}$, s'annule sur les k+1 intervalles $]-1,a_{k,1}[$, $]a_{k,1}, a_{k,2}[$, …, $]a_{k,k},1[$, donc en (k+1) valeurs : $a_{k+1,1} < \dots < a_{k+1,k+1}$, de l'intervalle]-1,+1[.
• finalement $R_n^{(n)}$ s'annule en n valeurs de]-1,+1[, donc : $Q_n = \frac{1}{2^n n!}.R_n^{(n)}$, aussi, et puisque ce dernier polynôme est de degré n, les n racines ainsi trouvées sont <u>les</u> racines de Q_n, et elles sont simples.
Pour : $n \geq 1$, et : $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a alors :

$$(A|Q_n) = \int_{-1}^{1} A(t).Q_n(t).dt = \frac{1}{2^n.n!}.\left(\left[A(t).R_n^{(n-1)}(t)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} A'(t).R_n^{(n-1)}(t).dt\right) = \frac{-1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} A'(t).R_n^{(n-1)}(t).dt,$$

car 1 et -1 étant racines de $R_n^{(n-1)}$, le crochet est nul.
A l'aide d'intégrations par parties successives, une récurrence immédiate donne :

$$(A|Q_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} A^{(n-1)}(t).R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\alpha.\int_{-1}^{+1} R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\alpha.[R_n(t)]_{-1}^{+1} = 0,$$

car $A^{(n-1)}$ est une constante et R_n admet 1 et -1 comme racines (car on suppose ici : $n \geq 1$).
Donc : $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b. Si on reprend le calcul précédent en remplaçant A par Q_n, on obtient :

$$(Q_n|Q_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^n.n!)^2}.\int_{-1}^{+1} R_n^{(n-1)}(t).R_n'(t).dt = \frac{(-1)^{n-1}}{(2^n.n!)^2}.\left(\left[R_n^{(n-1)}(t).R_n(t)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} R_n(t).R_n^{(n)}(t).dt\right).$$

Le crochet est encore nul, et $R_n^{(n)}$ est constant égal à (2.n)!, donc :

$$(Q_n|Q_n) = \frac{(-1)^n}{(2^n.n!)^2}.(2.n)!.\int_{-1}^{+1} R_n(t).dt = 2.\frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\int_0^1 (1-t^2)^n.dt = 2.\frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2.n+1}(\theta).d\theta,$$

(où on a utilisé la parité du polynôme et le changement de variable : $t = \sin(\theta)$), et on reconnaît une intégrale de Wallis.

Donc : $(Q_n|Q_n) = 2.\frac{(2.n)!}{(2^n.n!)^2}.\frac{2^{2.n}.n!^2}{(2.n+1)!} = \frac{2}{2.n+1}$.

Ensuite, on peut remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = (X^2 - 1).R_n$, et avec la formule de Leibniz :

$$R_{n+1}^{(n+1)} = (X^2 - 1).R_n^{(n+1)} + 2.(n+1).X.R_n^{(n)} + \binom{n+1}{2}.2.R_n^{(n-1)}.$$

Mais le premier et le dernier terme s'annulent en ±1 (pour le dernier, parce que 1 et -1 sont racines d'ordre 1 de R_n), et donc en notant : $\varepsilon = \pm 1$, on a : $R_{n+1}^{(n+1)}(\varepsilon) = 2.(n+1).\varepsilon.R_n^{(n)}(\varepsilon)$, d'où on déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1}(\varepsilon) = \varepsilon.Q_n(\varepsilon)$.

Comme de plus : $Q_0(1) = Q_0(-1) = 1$, on obtient finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n(1) = 1$, et : $Q_n(-1) = (-1)^n$.

c. On commence par remarquer que : $\deg(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1}) = n - 2$.
En effet, on constate que ce polynôme a les coefficients suivants :

• pour X^n : $n.\left[\frac{1}{2^n.n!}.\frac{(2.n)!}{n!}\right] - (2.n-1).\left[\frac{1}{2^{n-1}.(n-1)!}.\frac{(2.n-2)!}{(n-1)!}\right] = \frac{(2.n-1)!}{2^n.(n)!.(n-1)!}.(2.n - 2.n) = 0$,

• pour X^{n-1} : 0, car Q_n ne comporte que des termes de même parité que n, tout comme $X.Q_{n-1}$,

• pour X^{n-2} :

$$-n.\left[\frac{1}{2^n.n!}.n.\frac{(2.n-2)!}{(n-2)!}\right] + (2.n-1).\left[\frac{1}{2^{n-1}.(n-1)!}.(n-1).\frac{(2.n-4)!}{(n-4)!}\right] = -(n-1).\frac{1}{2^{n-2}.(n-2)!}.\frac{(2.n-4)!}{(n-2)!},$$

soit le coefficient dominant de Q_{n-2} multiplié par – (n – 1).

Comme de plus : $\forall\ 0 \le k \le n-3$, $(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1} | X^k) = n.(Q_n | X^k) - (2.n-1).(Q_{n-1} | X^{k+1}) = 0$,

puisque Q_n et Q_{n-1} sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, le polynôme $(n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1})$ est donc dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, orthogonal à l'hyperplan Vect$(1,\dots,X^{n-3})$, donc sur la même droite que Q_{n-2}, et donc proportionnel à ce dernier polynôme.

La valeur de ce coefficient de proportionnalité se fait avec les coefficients dominants et :

$n.Q_n - (2.n-1).X.Q_{n-1} = -(n-1).Q_{n-2}$.

d. Le procédé de Gram-Schmidt garantit ce résultat, puisque la famille $(1, \dots, X^n)$ est libre pour tout n.

e. On sait que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}(1, \dots, X^{n-1}) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})^\perp$.

De plus Q_n et P_n sont de degré n tous deux, donc ils sont tous deux sur une même droite, dans $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonale à l'hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par $(1, \dots, X^{n-1})$.

Donc : $\exists\ \lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q_n = \lambda_n.P_n$, puisque P_n est non nul.

Puis : $(Q_n|Q_n) = \lambda_n^2.(P_n|P_n) = \lambda_n^2$, d'où : $\lambda_n = \pm\|Q_n\| = \pm\sqrt{\dfrac{2}{2.n+1}}$.

Enfin : $\lambda_n.(X^n | P_n) = (X^n | Q_n) = \dfrac{(-1)^n}{2^n.n!}.\int_{-1}^{+1} n!.R_n(t).dt = \dfrac{1}{2^n}.\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n.dt > 0$, donc : $\lambda_n > 0$, et finalement :

$\lambda_n = \sqrt{\dfrac{2}{2.n+1}}$.

f. Notons : $S_n = ((1-X^2).P_n')'$, qui est un polynôme de degré au plus n.

On calcule alors :

$\forall\ 0 \le k \le n-1$, $(S_n | X^k) = \int_{-1}^{+1}\dfrac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)].t^k.dt = [(1-t^2).P_n'(t).t^k]_{-1}^{+1} - k.\int_{-1}^{+1}(1-t^2).P_n'(t).t^{k-1}.dt$,

et : $(S_n | X^k) = -k.\int_{-1}^{+1}(1-t^2).P_n'(t).t^{k-1}.dt = -k.[(1-t^2).P_n(t).t^{k-1}]_{-1}^{+1} + k.\int_{-1}^{+1}[(k-1).t^{k-2} - (k+1).t^k].P_n(t).dt$.

Enfin, on a : $\int_{-1}^{+1}[(k-1).t^{k-2} - (k+1).t^k].P_n(t).dt = ((k-1).X^{k-2} - (k+1).X^k | P_n) = 0$,

puisque P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc : $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et : $\exists\ \alpha_n \in \mathbb{R}$, $S_n = P_n$, car ils sont tous deux dans $\mathbb{R}_n[X]$ (comme dans la question e).

Il suffit alors de comparer les coefficient dominant pour constater que celui de S_n (coefficient de X^n) vaut : $-n.(n+1).p_{n,n}$, où $p_{n,n}$ est le coefficient dominant de P_n.

Conclusion : $\alpha_n = -n.(n+1)$, et on en déduit l'égalité voulue.

Pour le dernier point, pour : $n \ge 1$, on peut écrire :

$$a_n = \int_0^1 P_n(t).dt = -\frac{1}{n.(n+1)}.\int_0^1 \frac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)].dt = -\frac{1}{n.(n+1)}.[(1-t^2).P_n'(t)]_0^1 = \frac{P_n'(0)}{n.(n+1)}.$$

Or P_n est proportionnel à Q_n et le polynôme R_n de la question a étant pair, Q_n est de même parité que n, donc Q_n' est de même parité que n+1, donc :

- si n est pair, Q_n' est impair, $Q_n'(0) = 0$, et : $a_n = 0$.
- si n est impair, alors : $R_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.X^{2.k}.(-1)^{n-k}$, donc $Q_n'(0)$ correspond à la dérivée (n+1) en 0 de

R_n, autrement dit elle est donnée par le terme en $X^{2.k}$, où : $2.k = n+1$.

Donc : $Q_n'(0) = \dfrac{1}{2^n.n!}.(n+1)!.(-1)^{n-\frac{n+1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} = \dfrac{(n+1)}{2^n}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

Soit : $a_n = \dfrac{1}{n.(n+1)}.\dfrac{1}{\lambda_n}.Q_n'(0) = \dfrac{1}{n.(n+1)}.\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}.\dfrac{(n+1)}{2^n}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+\frac{1}{2}}.n}.\dbinom{n}{\frac{n+1}{2}}$.

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

54. • La matrice A est orthogonale et de déterminant +1 : c'est donc la matrice d'une rotation r dans $\mathbb{R}^3$ canonique.

L'axe de la rotation correspond aux vecteurs invariants et vaut : $\Delta = \text{Vect}((1,1,0))$.

L'angle θ est donné par la trace et vaut : $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Le sens de la rotation se détermine en choisissant un vecteur orthogonal à Δ, par exemple : e = (0,0,1), son image valant : r(e) = $(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2})$, et : e∧r(e) = $(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, 0)$.

La rotation se fait donc dans le sens positif du plan si on choisit le vecteur (1,1,0) pour orienter Δ.

• La matrice B est orthogonale et de déterminant +1 : c'est donc encore la matrice d'une rotation r dans $\mathbb{R}^3$ canonique.

L'axe de la rotation Δ vaut : Δ = Vect((1,-1,3)).

L'angle est donné par la trace et vaut : $\theta = \arccos(\frac{7}{18})$.

On choisit ensuite par exemple : e = (1,1,0), on calcule : r(e) = $(-\frac{4}{9}, \frac{11}{9}, \frac{5}{9})$, et : e∧r(e) = $(\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{15}{9})$.

La rotation se fait donc dans le sens positif, si on oriente Δ avec (1,-1,3).

55. Rappel : un retournement est une rotation d'angle π.

a. Si f et g sont deux rotations de même axe Δ, alors dans une base adaptée à $\Delta \oplus \Delta^\perp$, les matrices de f et de g valent : $mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, et : $mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(b) & -\sin(b) \\ 0 & \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

Donc : $mat(fog) = mat(gof) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ 0 & \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$, et f et g commutent.

Si f est g sont deux retournements autour de Vect(e_1) et Vect(e_2), avec e_1 et e_2 orthogonaux (et normés), alors en posant : $e_3 = e_1 \wedge e_2$, on a :

- $fog(e_1) = f(-e_1) = -e_1$, et : $gof(e_1) = g(e_1) = -e_1$,
- $fog(e_2) = f(e_2) = -e_2$, et : $gof(e_2) = g(-e_2) = -e_2$,
- $fog(e_3) = f(-e_3) = +e_3$, et : $gof(e_3) = g(-e_3) = +e_3$,

et f et g commutent (c'est le retournement d'axe Vect(e_3)).

b. Puisque u est sur l'axe Δ de f, alors : f(u) = u, et : gof(u) = g(u) = fog(u) = f(g(u)).
Donc g(u) est un vecteur unitaire (puisque g est une isométrie), invariant par f donc sur Δ, et donc l'un des deux vecteurs u ou –u, seuls vecteurs de norme 1 sur Δ.

c. Si : g(u) = u, alors u est invariant par g qui admet comme seuls vecteurs invariants les vecteurs de son axe (car : $g \neq id_E$), et donc u est sur l'axe de g : f et g ont donc même axe.

d. Si : g(u) = -u, alors -1 est valeur propre de g, ce qui ne peut se produire, en examinant la matrice de g précédente, que si :

- l'angle de la rotation g est π,
- u est orthogonal à l'axe Δ' du retournement g.

Mais on a aussi, en notant v un vecteur de Δ', que : f(g(v)) = f(v) = g(f(v)), et donc f(v) est sur l'axe Δ'.
Donc : f(v) = v, ou : f(v) = -v, mais on ne peut être dans le premier cas, car alors f admettrait deux vecteurs propres indépendants pour la valeur propre 1 (à savoir u et v), ce qui ne peut se produire que si : $f = id_E$, ce qui n'est pas le cas ici.
Donc : f(v) = -v, et la même remarque que celle faite pour g au début de la question montre que f est un retournement également, dont l'axe est bien orthogonal à celui de g.