Produit scalaire.

Exercices 2014-2015

Les indispensables.

Exercices généraux sur le produit scalaire.

1. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire réel.
   a. Montrer que toute famille orthonormale est libre.
   b. Est-ce encore le cas pour une famille orthogonale ?

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
   L'application : $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t).g(t).dt$, définit-elle un produit scalaire sur E ?

3. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par : $(A,B) \mapsto tr({}^tA.B)$.
   a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, (matrices symétriques et antisymétriques) sont supplémentaires orthogonaux).
   c. Montrer que : $\forall$ A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A) \leq \sqrt{n}.\sqrt{tr({}^tA.A)}$, et préciser les cas d'égalité.

4. a. Montrer que l'application : $(f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t).g(t).e^{-t}.dt$, définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}\{X]$.
   b. Plus généralement, si on note : $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \exists\, n \in \mathbb{Z}, \lim_{t\to+\infty} t^n.f(t) = 0\}$, montrer que l'application précédente définit un produit scalaire sur E.
   c. Vérifier que : Vect(sin, cos) $\subset$ E, puis déterminer une base orthonormale de ce sous-espace vectoriel.

5. Dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, soit f une fonction strictement positive.
   A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que : $(a-b)^2 \leq \int_a^b f(t).dt.\int_a^b \frac{dt}{f(t)}$, et étudier les cas d'égalité.

6. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (.|.).
   Pour : a $\in$ E, non nul, et : $\lambda \in$ **K**, résoudre l'équation : $(a|x) = \lambda$.

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (.|.).
   Montrer que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq \|x + \lambda.y\|$.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

8. Soit E un espace euclidien, et $(e_1,\ldots,e_n)$ des vecteurs unitaires de E, tels que : $\forall$ x $\in$ E, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.
   On pose : $F = Vect(e_1, \ldots ,e_n)$.
   a. Montrer que la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormale.
   b. Montrer que c'est une base de E.

9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.
   Montrer que : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, et : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

10. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille (u,v,w), avec : u = (1,1,1), v = (1,-1,1), w = (1,1,-1).

11. Montrer que : $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{+1} \frac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
    Orthonormaliser la base $(1,X,X^2)$.

12. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire classique de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
    a. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.
    b. Déterminer par ailleurs : $\inf_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx$.

Projecteurs orthogonaux.

13. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
    a. Déterminer une base orthonormale de : $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.
    b. En déduire l'expression de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P.

14. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique, et on note $\mathscr{B}$ sa base canonique.
    Par ailleurs on note : $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.
    a. Déterminer M, matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ où f est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$ sur F.
    b. Déterminer d((1,2,3,4),F).

15. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale : $\mathscr{B} = (i,j,k)$.
    Soit : $p \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $\text{mat}_{\mathscr{B}}(p) = A = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
    Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan P que l'on précisera.

Matrices symétriques réelles.

16. Diagonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale.

17. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    a. Montrer que ${}^tA.A$ est une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives.
    b. Montrer que ces valeurs propres sont strictement positives si et seulement si A est inversible.

18. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et : $B = \frac{1}{2}.(A + {}^tA)$.
    a. Justifier que les valeurs propres de B sont réelles.
    On notera par ailleurs α la plus grande valeur propre de B et β la plus petite.
    b. Pour : $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comparer ${}^tX.A.X$ et ${}^tX.B.X$.
    c. Montrer que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha.{}^tX.X \leq {}^tX.A.X \leq \beta.{}^tX.X$.
    d. En déduire que : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [\alpha,\beta]$.

19. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    a. Montrer que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A.X = 0) \Leftrightarrow ({}^tA.A.X = 0)$.
    b. En déduire que : $rg(A) = rg({}^tA.A)$.

20. Soit A une matrice symétrique réelle telle que : $\exists\, k \geq 2, A^k = I_n$.
    Montrer que : $A^2 = I_n$.

Endomorphismes orthogonaux.

21. Soient E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et : $u \in O(E)$.
    a. Montrer que : $u(F^\perp) = (u(F))^\perp$.
    b. Montrer que : (F stable par u) $\Leftrightarrow$ ($F^\perp$ stable par u).
    Remarque : les deux questions sont indépendantes.

22. Soient E un espace vectoriel euclidien et : $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.
    Montrer que ker(f) et Im(f) sont orthogonaux l'un de l'autre.

23. Soient E un espace vectoriel euclidien, et : $f \in \mathbf{O}(E)$.
Montrer que $\ker(f - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

24. Soit E un espace vectoriel euclidien et a un vecteur unitaire de E.
Pour : $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit f_α sur E par : $\forall x \in E$, $f_\alpha(x) = x + \alpha.(a|x).a$.
a. Vérifier que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in \mathscr{L}(E)$, et calculer $f_\alpha o f_\beta$, pour : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
b. Montrer que : (f_α bijective) $\Leftrightarrow$ ($\alpha \neq -1$).
c. Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de f_α sans calculer sa matrice représentative ou son polynôme caractéristique, et en déduire une description géométrique de f_α.

25. Soient E un espace vectoriel euclidien, et : $f \in \mathbf{O}(E)$.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Matrices orthogonales.
26. Déterminer les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

27. Déterminer les matrices orthogonales dont les coefficients sont positifs ou nuls (on pourra démontrer que pour une telle matrice, chaque colonne ne comporte qu'un seul coefficient non nul).

28. Soit : $A \in O_n(\mathbb{R})$.
a. Exprimer $\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}$, à l'aide de A et du vecteur colonne X ne comportant que des 1.
b. En déduire que : $\left|\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}\right| \le n$, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) muni de son produit scalaire canonique.

Isométries de $\mathbb{R}^3$.
29. Donner les éléments géométriques des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan P, d'équation :
$2.x + 3.y - z = 0$.

31. Soient : $u \in \mathbb{R}^3$, normé, et : $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que la rotation d'angle θ, d'axe dirigé et orienté par u est définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $r(x) = (1 - \cos(\theta)).\langle u,x\rangle.u + \cos(\theta).x + \sin(\theta).u \wedge x$.

<u>Les classiques.</u>
Exercices généraux sur le produit scalaire.
32. Montrer que φ définie par : $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P'(t).Q'(t).dt + \frac{1}{2}.(P(0).Q(1) + P(1).Q(0))$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

33. Soient φ et ψ deux produits scalaires dans un espace vectoriel réel E de dimension finie.
On suppose que : $\forall (x,y) \in E^2$, $((\varphi(x,y) = 0) \Rightarrow (\psi(x,y) = 0))$.
En utilisant une base orthonormale (e_i) de E pour φ, montrer que :
$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\psi(x,y) = \alpha.\varphi(x,y)$.

34. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1,\ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$.
a. Si on suppose que : $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \ge n^2$.

b. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

35. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
$\forall$ (A,B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, A et B symétriques, $(tr(A.B+B.A))^2 \leq 4.tr(A^2).tr(B^2)$.

36. a. Montrer que : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\exists$! $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall$ P $\in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt$
b. Montrer par l'absurde que : $\deg(Q_n) = n$.
c. Montrer que le résultat devient faux dans $\mathbb{R}[X]$, à savoir qu'on ne peut trouver : Q $\in \mathbb{R}[X]$, tel que :
$\forall$ P $\in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t).Q(t).dt$

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

37. Famille obtusangle.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soient $x_1, \ldots, x_{n+2}$ des vecteurs de E.
On veut montrer qu'il n'est pas possible d'avoir : $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n+2$, $(x_i|x_j) < 0$.
a. Montrer que ce résultat est vrai si : n = 1.
b. On suppose le résultat établi pour tout espace de dimension (n – 1), pour n donné tel que : n – 1 ≥ 1.
En considérant : F = $\mathrm{Vect}(x_{n+2})^{\perp}$, montrer que le résultat est encore vrai en dimension n.
c. En déduire le cardinal maximum d'une famille obtusangle (telle que l'angle entre deux vecteurs quelconques de la famille est obtus).

38. Déterminant de Gram.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Soit par ailleurs $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de E, et enfin G la matrice de coefficient générique :
$\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $g_{i,j} = (x_i|x_j)$.
a. Montrer que si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'une des colonnes de G est combinaison linéaire des autres et en déduire que : det(G) = 0.
b. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base de E.
Exprimer G en fonction de P et en déduire que : det(G) ≠ 0, ainsi que : det(G) > 0.
c. En déduire une équivalence.
d. Montrer que ce résultat reste vrai si on considère une famille de p vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$, avec : p ≤ n.
Remarque : on note parfois : $\det(G) = Gram(x_1, \ldots, x_p)$.

39. Soient : n $\in \mathbb{N}^*$, A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, X $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ – {0}, et : H = {Y $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.Y = 0$}.
Montrer que X est vecteur propre de ${}^tA$ si et seulement si H est stable par A.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

40. Montrer en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, qu'une matrice inversible réelle A s'écrit de manière unique : A = Q.R, où Q est orthogonale, et R une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Projecteurs orthogonaux.

41. Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux vecteurs non nuls de E.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que le projeté orthogonal de x sur Vect(y) soit égal au projeté orthogonal de y sur Vect(x).

42. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et x et y deux vecteurs distincts de E tels que :
$(x|y) = \|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que : $y = p_H(x)$, où p_H est la projection orthogonale de E sur H.

43. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique : $(X|Y) = tr({}^tX.Y)$.
On définit par ailleurs :

$$A=\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}, \text{ et : } U=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$, puis : $F = \mathrm{Vect}\{U^k, 0 \leq k \leq (n-1)\}$.

a. En remarquant que la matrice U est orthogonale, montrer que $(U^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base orthogonale de F.
b. En déduire la projection orthogonale de A sur F.

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

44. Soit : $A = \begin{pmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\c_1&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\0&\cdots&0&c_{n-1}&a_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, $c_k.b_k > 0$.
a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont le premier coefficient diagonal vaut 1 telle que : $D^{-1}.A.D$ soit symétrique réelle.
b. En déduire que A est diagonalisable.

45. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de $A.{}^tA$.
a. Montrer que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\mu_i \geq 0$ (on pourra utiliser un vecteur propre associé à chaque valeur propre).
b. Montrer que : $\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

46. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\mathrm{Sp}({}^tA.A - A.{}^tA) \subset \mathbb{R}^+$.
Montrer que A et ${}^tA$ commutent.

47. Soit A une matrice antisymétrique réelle, et B une matrice symétrique réelle, telles que : A.B = B.A.
a. Montrer que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(A.X).(B.X) = 0$.
b. Montrer que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|(A+B).X\| = \|(A-B).X\|$ ($\|\ .\ \|$ désigne la norme canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
c. On suppose de plus B inversible.
Montrer que (A + B) et (A – B) sont inversibles et que $(A + B).(A - B)^{-1}$ est orthogonale.

48. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Etudier ${}^tX.{}^tA.A.X$ pour un vecteur propre de ${}^tA.A$.
b. Que dire de la valeur propre correspondante si A est inversible ?
c. Retrouver que l'application : $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA.B)$, définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

49. Matrices symétriques positives et strictement positives.
Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.
On dit que A est positive (soit : $A \geq 0$), si et seulement si : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X \geq 0$.
On dit que A est strictement positive (soit : $A > 0$) si et seulement si : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tX.A.X > 0$.
On note $S_n^+(\mathbb{R})$, les matrices réelles positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que : $\forall\ (A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, $(A + B) \in S_n^+(\mathbb{R})$.
b. Montrer que : $\forall\ (A,B) \in S_n^+(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(A + B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
c. Montrer que : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA.A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
d. Montrer que $\forall\ A \in Gl_n(\mathbb{R})$, ${}^tA.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
e. Montrer que : $\forall\ A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\forall\ S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, ${}^tA.S.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales.

50. Soit E un espace vectoriel euclidien et f une application de E dans E telle que :
- $f(0) = 0$,
- $\forall\ (x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

a. Montrer que : ∀ x ∈ E, $\|f(x)\| = \|x\|$.

b. A l'aide de l'identité du parallélogramme, en déduire que : ∀ x ∈ E, f(-x) = - f(x).

c. Montrer que : ∀ (x,y) ∈ E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y).

d. Si (e_1, …, e_n) est une base orthonormale de E, montrer que : ∀ x ∈ E, f(x) = $\sum_{k=1}^{n}(e_k|x).f(e_k)$.

e. En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.

51. Calculer card(**O**(n) ∩ $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$).

52. Soient : C ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle, et : $S = I_n - \frac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC$.

Montrer que S est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à C.

Exercice général.

53. Polynômes de Legendre.

Soit : E = $\mathbb{R}$[X], et le produit scalaire classique : (P|Q) = $\int_{-1}^{1} P(t).Q(t).dt$.

On pose, par ailleurs, pour tout entier n : $Q_n = \frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$.

a. Montrer que : deg(Q_n) = n, que Q_n a n racines simples dans]-1,+1[, et que : $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b. Calculer (Q_n|Q_n), Q_n(1), et Q_n(-1).

c. Montrer que la suite (Q_n) vérifie la ration de récurrence : ∀ n ≥ 2, n.Q_n = (2.n – 1).X.Q_{n-1} – (n – 1).Q_{n-2}.

d. Montrer qu'il existe une unique famille (P_n) orthonormale telle que : ∀ n ∈ $\mathbb{N}$, d°P_n = n, (P_n|X^n) > 0,.

e. Montrer que : ∀ n ∈ $\mathbb{N}$, ∃ $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $P_n = \lambda_n.Q_n$, et calculer λ_n.

f. Montrer que : ∀ t ∈ $\mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)] + n.(n+1).P_n(t) = 0$, puis calculer : $a_n = \int_0^1 P_n(t).dt$.

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

54. Donner les éléments géométriques des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 4 & -8 & -1 \\ 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

55. On munit : E = $\mathbb{R}^3$, de son produit scalaire et de son orientation canoniques.

a. Montrer que si f et g sont deux rotations de même axe ou deux retournements d'axe orthogonaux, alors f et g commutent.

On suppose dans la suite que f et g sont deux rotations de E distinctes de id_E, telles que : fog = gof.

b. Soit u un vecteur unitaire appartenant à l'axe Δ de f.
Montrer que : g(u) = u, ou : g(u) = -u.

c. Si : g(u) = u, en déduire que f et g sont deux rotations de même axe.

d. Si : g(u) = -u, montrer que f et g ont des axes orthogonaux et que ce sont des retournements.

__Les plus.__

Exercices généraux sur le produit scalaire.

56. Soit E un espace préhilbertien réel et soit : (x_1, …, x_n) ∈ E^n, tel que :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \in \{-1,+1\}^n,\ \left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k.x_k\right\| \le M.$$

On veut montrer que : $\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \le M^2$.

a. Montrer que ce résultat est vrai si : n = 1, ou : n = 2.

b. En raisonnant par récurrence, montrer que ce résultat est vrai pour tout entier : n ≥ 1.

57. On munit : $E = C^0([-1,+1],\mathbb{R})$, de son produit scalaire canonique.
On pose :
- $F = \{f \in E, \forall t \in [0,1], f(t) = 0\}$,
- $G = \{g \in E, \forall t \in [-1,0], g(t) = 0\}$.

a. Montrer que : $F^{\perp} = G$.
b. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

58. On munit : $E = \mathbb{R}[X]$, du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in E^2$, $(P|Q) = \int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt$.

a. Montrer que : $H = \{P \in E, \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt = 0\}$, est un hyperplan de E.

b. Montrer que : $\forall Q \in H^{\perp}$, $\int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt\right).\left(\int_{-1}^{+1} Q(t).dt\right)$.

c. En déduire que : $H^{\perp} = \{0\}$.

59. Soit E un espace vectoriel euclidien et : $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $tr(u) = 0$.

a. Montrer que si : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, est une base orthonormale de E, alors : $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|u(e_i))$.

b. Montrer que : $\exists x \in E$, $x \neq 0$, $(x|u(x)) = 0$.
Pour : $n \geq 2$, on pourra considérer l'application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = (u(t.e_i + (1-t).e_j)|t.e_i + (1-t).e_j)$,
pour des vecteurs e_i et e_j bien choisis et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
c. En déduire par récurrence qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

60. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Si F est un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(x_1, \ldots, x_p)$, on note X_k la matrice colonne des coordonnées de x_k dans $\mathscr{B}$.

Montrer que la projection orthogonale p_F de E sur F a pour matrice dans la base $\mathscr{B}$: $M = \sum_{k=1}^{p} X_k.{}^tX_k$.

Projecteurs orthogonaux.

61. Soit E un espace préhilbertien réel et soit : $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, tel que : $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$, $(x_i|x_j) < 0$.
En raisonnant par récurrence et à l'aide d'une projection orthogonale, montrer que toute sous-famille de $(n - 1)$ vecteurs est libre.

62. Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable et l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),P)$.
On note F l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ (F contient donc des variables aléatoires réelles sur Ω).
On note enfin F' l'ensemble des éléments X de F tels que X^2 admette une espérance.
a. Montrer que si X et Y sont dans F', alors X.Y admet une espérance.
b. Montrer que F' est un sous-espace vectoriel de F.
c. Montrer que l'application de F'×F' dans $\mathbb{R}$ donnée par : $\forall (X,Y) \in F'^2$, $\psi(X,Y) = E(X.Y)$, définit un produit scalaire si et seulement si : $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X = x) > 0$ (on suppose dans la suite ce point acquis).
Pour tout sous-espace G de F' de dimension finie, on note p_G la projection orthogonale sur G, et pour : $A \subset \Omega$, on note 1_A la fonction indicatrice de A.
d. Pour : $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, on note G_A le sous-espace vectoriel de F engendré par 1_A et 1_Ω.
Montrer que 1_A admet une espérance, la calculer, puis montrer que : $1_A \in F'$, et en déduire que G_A est un sous-espace vectoriel de F'.
Montrer que $(1_A, 1_{\bar{A}})$ est une base orthogonale de G, et que : $\forall B \in \Omega$, $p_G(1_B) = P_A(B).1_A + P_{\bar{A}}(B).1_{\bar{A}}$.
e. Pour : $X \in F'$, non constante, on note G le sous-espace vectoriel engendré par X et 1_Ω et soit : $Y \in F'$.§
Donner l'expression de $p_G(Y)$.
f. Si X et Y admettent une espérance, montre que $p_G(Y)$ aussi et comparer $E(P_G(Y))$, et $E(Y)$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

63. Pour : A ∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{M\in S_n(R)}\left(\sum_{1\le i,j\le n}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)$,

où $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n.

64. On reprend le déterminant de Gram vu dans l'exercice 38.
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E, et : F = Vect$(x_1, \ldots, x_p)$.
En utilisant $F^\perp$, montrer que : ∀ x ∈ E, $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{Gram(x,x_1,...,x_p)}{Gram(x_1,...,x_p)}}$.

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

65. Soient n un entier supérieur à 2, H ∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non symétrique de rang 1, et : A = H + ${}^tH$.
a. Expliquer pourquoi A est diagonalisable.
b. Montrer qu'il existe : (U,V) ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, non nulles et non proportionnelles telles que : H = U.${}^tV$.
c. Soit X un vecteur propre de H associé à la valeur propre α.
Montrer que si X est orthogonal à U et V, alors : α = 0.
Retrouver que A est diagonalisable en précisant ses espaces propres et ses valeurs propres.

66. Soit A une matrice symétrique réelle telle que : A^2 = A.
Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de dimension n^2 que :
$\sum_{1\le i,j\le n}\left|a_{i,j}\right| \le n.\sqrt{tr(A)}$.

67. On reprend les notations de l'exercice 49.
Pour : p ∈ ℕ*, on note, pour : $(S_1, \ldots, S_p)$ ∈ $(S_n(\mathbb{R}))^p$, S = $\sum_{k=1}^{p} S_k^2$.
a. Montrer que : S ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$.
b. Montrer que : (S = 0) ⇔ (∀ 1 ≤ k ≤ p, S_k = 0).

68. On reprend les notations de l'exercice 49.
Soient n et p des entiers non nuls.
a. Montrer que si p est impair : ∀ S ∈ $S_n(\mathbb{R})$, ∃ R ∈ $S_n(\mathbb{R})$, R^p = S.
b. Montrer que si p est pair : ∀ S ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, ∃ R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, R^p = S.
c. En déduire que : ∀ S ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, ∃ R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, R^2 = S.
Que dire de R si : S ∈ $S_n^{++}(\mathbb{R})$?

69. On a montré dans l'exercice 68 que : ∀ S ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, ∃ R ∈ $S_n^+(\mathbb{R})$, R^2 = S.
Montrer en examinant les sous-espaces propres de R et de S que la matrice R est unique.
Cette matrice est appelée parfois la racine carrée de S.

Matrices orthogonales.

70. Soit : A ∈ O(n), telle que : 1 ∉ Sp(A).
a. Etudier la convergence de la suite définie par : ∀ p ∈ ℕ, $U_p=\dfrac{1}{p+1}.(I_n+A+...+A^p)$.
b. La suite (A^p) est-elle convergente ?

71. Pour : (a,b,c) ∈ $\mathbb{R}^3$, on pose : $\sigma = a.b+b.c+c.a$, $S=a+b+c$, et : $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
a. Montrer que : (A ∈ O(3)) ⇔ (σ = 0, et : S ∈ {-1,+1}).
b. Montrer que : (A ∈ SO(3)) ⇔ (σ = 0, et : S = 1).
c. Montrer que : (A ∈ SO(3)) ⇔ (∃ k ∈ [0, $\dfrac{4}{27}$], tel que a, b et c sont les racines de : $P = X^3 - X^2 + k$).