Variables aléatoires (Corrigé des indispensables).

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

1. Notons G_n l'événement : « 6 sort au $n^{\text{ième}}$ lancer ».
   Alors : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $(X = n) = \overline{G_1} \cap \ldots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n$.
   On a par ailleurs : X(Ω) = {1,2,3,4,5,6}, et puisque les lancers sont indépendants, on a donc :
   $$\forall\, n \geq 1,\ P(X = n) = P(\overline{G_1} \cap \ldots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n) = P(\overline{G_1})\ldots P(\overline{G_{n-1}}).P(G_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$
   X suit bien la loi géométrique G($\frac{1}{6}$).

2. X étant à valeurs dans {0, …, n}, Y est également à valeurs dans {0, …, n}.
   De plus : $\forall$ k $\in$ {S, …, n}, $(Y = k) \Leftrightarrow (X = n - k)$, donc :
   $$\forall\, k \in \{0, \ldots, n\},\ P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k}.p^{n-k}.(1-p)^k = \binom{n}{k}.(1-p)^k.p^{n-k}.$$
   Autrement dit, Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(n,1 – p).

3. a. Notons tout d'abord que l'univers « naturel » de cette expérience est $\{1, \ldots, n\}^2$, ensemble des n^2 couples d'entiers entre 1 et n, correspondant aux faces supérieures des dés rendus discernables.
   De plus la variable aléatoire S vérifie : S(Ω) = {2, 3, …, 2.n}.
   L'événement $(S = i)$, pour : 1 ≤ i ≤ n + 1, correspond aux couples dont la somme des éléments fait i autrement dit aux couples (j, i – j), avec : 1 ≤ j ≤ n, et : 1 ≤ i – j ≤ n, soit : 1 ≤ j ≤ i – 1.
   Il y a donc (i – 1) tels couples et la probabilité utilisée dans cette modélisation étant uniforme, on en déduit que : $P(S = i) = \dfrac{i-1}{n^2}$.
   b. De même, pour : n + 2 ≤ i ≤ 2.n, l'événement $(S = i)$ correspond aux couples (j, i – j), avec : 1 ≤ j ≤ n, et : 1 ≤ i – j ≤ n, soit : i – n ≤ j ≤ n.
   Il y a : n – (i – n – 1) = 2.n – i + 1, tels couples et : $P(S = i) = \dfrac{2.n - i + 1}{n^2}$.
   c. Par réunion disjointe (ou événements incompatibles) : $(S \leq n+1) = \bigcup_{k=2}^{n+1} (S = k)$, et :
   $$P(S \leq n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} P(S = k) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2.n}.$$

4. Notons : $\forall$ k $\in$ ℕ*, B_k l'événement : « la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est Blanche ».
   On note pour commencer que : X(Ω) = ℕ*, puis : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $(X = n) = \overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$.
   Alors : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $P(X = n) = P(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) = P(\overline{B_1})\ldots P(\overline{B_{n-1}}).P(B_n)$,
   par indépendance des tirages.
   De plus : $\forall$ k $\in$ ℕ*, $P(B_k) = \dfrac{k+1}{2.k+1}$, puisqu'avant le $k^{\text{ième}}$ tirage, la boîte contient (k+1) boules Blanches sur un total de (2.k+1).
   Donc : $\forall$ n ≥ 1, $P(X = n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \dfrac{k+1}{2.k+1}\right)\right).\dfrac{n+1}{2.n+1} = \dfrac{n+1}{2.n+1}\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{2.k+1} = \dfrac{2^n.(n+1)!.(n-1)!}{(2.n+1)!}$.

5. Il suffit de vérifier que :
   - $\forall$ n $\in$ ℕ*, $p_n \geq 0$, ce qui est le cas,
   - $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, ce qui est aussi le cas puisque la série est télescopique avec : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $p_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

   Le théorème 1.5 garantit alors qu'il existe bien une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par la famille $(n,p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Il nous faut donc déterminer : $p_0 = P(X=0)$, $p_1 = P(X=1)$ et : $p_2 = P(X=2)$.
Or on sait que :

- $1 = E(X) = \sum_{i=0}^{2} i.P(X=i) = 0.p_0 + 1.p_1 + 2.p_2$, et :
- $\frac{1}{2} = E(X^2) - (E(X))^2 = \left(\sum_{i=0}^{2} i.^2 P(X=i)\right) - 1^2 = 0.p_0 + 1.p_1 + 4.p_2 - 1$.

On est amené à résoudre le système : $\begin{cases} p_1 + 2.p_2 = 1 \\ p_1 + 4.p_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$, soit : $p_1 = \frac{1}{2}$, et : $p_2 = \frac{1}{4}$.

Enfin, p_0 s'obtient par le fait que la somme des probabilités doit donner 1, soit : $p_0 = \frac{1}{4}$.

7. a. Toutes les valeurs proposées sont positives et :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.2^n.\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\ln(2)}.(-\ln(1-\frac{1}{2})) = 1.$$
Donc $(n,p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien la loi de probabilité d'une variable discrète X.

b. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ est absolument convergente.

Or : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $0 \leq n.p_n = \frac{1}{2^n.\ln(2)}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

Donc X admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n.\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln(2)}$.

c. Comme fonction affine de X, Y admet une espérance et : $E(Y) = (\ln(2)).E(X) - 1 = 0$.
Y est donc une variable centrée.

8. a. La famille est constituée de réels positifs et : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$.

Donc $(n,p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien la loi de probabilité d'une variable discrète X.

b. A nouveau X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ converge, ce qui est le cas car :

$\forall$ n $\geq$ 1, $n^2.(n.p_n) = n^3.\left(\frac{1}{3}\right)^n$, qui tend vers 0 en $+\infty$ du fait du théorème des croissances comparées.

Puis : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^2} = \frac{3}{4}$.

c. Pour la même raison qu'au-dessus la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.p_n$ converge donc X^2 admet une espérance par le théorème de transfert et X admet une variance.

Puis : $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2.p_n = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^2} = \frac{3}{2}$.

On en déduit que : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$.

9. Notons tout d'abord que : X(Ω) = {1, 2, …, n – 1}.
Puis : ∀ 1 ≤ k ≤ n – 1, notons B_k l'événement : « on tire une boule Blanche au k^ième tirage ».
Alors : ∀ 1 ≤ k ≤ n – 1, $(X = k) = \overline{B_1} \cap ... \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$.
Donc par la formule des probabilités composées :
∀ 1 ≤ k ≤ n – 1, $P(X = k) = P(\overline{B_1}).P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})...P_{\overline{B_1}\cap...\cap\overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}}).P_{\overline{B_1}\cap...\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)$, et :
∀ 1 ≤ k ≤ n – 1, $P(X = k) = \frac{n-2}{n}.\frac{n-3}{n-1}...\frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1}.\frac{2}{n-k+1} = \frac{2.(n-k)}{n.(n-1)}$.
X prenant un nombre fini de valeurs, elle admet une espérance et une variance et :
$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k.P(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k.\frac{2.(n-k)}{n.(n-1)} = \frac{2}{n.(n-1)}.\sum_{k=1}^{n-1} k.(n-k)$, d'où à l'aide de sommes classiques :
$E(X) = \frac{2}{n.(n-1)}.\left(n.\frac{n.(n-1)}{2} - \frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6}\right) = n - \frac{2.n-1}{3} = \frac{n+1}{3}$.
Puis : $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2.P(X = k) = \frac{2}{n.(n-1)}.\sum_{k=1}^{n-1}(n.k^2 - k^3) = \frac{2}{n.(n-1)}.\left(n.\frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6} - \frac{n^2.(n-1)^2}{4}\right)$, et :
$E(X^2) = \frac{n.(2.n-1)}{3} - \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{n.(n+1)}{6}$, d'où :
$V(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n.(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1).(n-2)}{18}$.

10. a. Il est immédiat que : X(Ω) = ℕ, et : ∀ n ∈ ℕ, $P(X = n) = \frac{a^n}{n!}.P(X = 0)$.
Et comme : $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = P(X = 0).\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!} = e^a.P(X = 0)$, et donc : $P(X = 0) = e^{-a}$.
Donc : ∀ n ∈ ℕ, $P(X = n) = \frac{a^n}{n!}.e^{-a}$.

b. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ est absolument convergente.
Or $n^2.(n.p_n)$ tend vers 0 quand n tend vers +∞ (théorème des croissances comparées), donc X admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.\frac{a^n}{n!}.e^{-a} = a.e^{-a}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = a.e^{-a}.e^a = a$.

c. La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
Par le théorème de transfert, cela revient à étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.p_n$ qui converge pour une raison similaire à celle de la question b.
Puis : $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2.\frac{a^n}{n!}.e^{-a} = a.e^{-a}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = a.e^{-a}.\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).\frac{a^n}{n!} = a.e^{-a}.\left(a.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\right)$,
donc : $E(X^2) = a.e^{-a}.(a.e^a + e^a) = a^2 + a$.
Enfin : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 + a - a^2 = a$.

11. a. Notons que : X(Ω) = ℕ, et posons : ∀ n ∈ ℕ, $p_n = P(X = n)$.
La suite (p_n) vérifie une relation de récurrence double, d'équation caractéristique : $3.r^2 - 4.r + 1 = 0$, dont les racines sont 1 et $\frac{1}{3}$.

Donc : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $p_n = \alpha + \beta.\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De plus la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ doit être convergente (et de somme 1), donc : $\alpha = 0$.

Enfin : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, et donc on doit prendre : $\beta = \frac{2}{3}$.

La loi de X est donc donnée par : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b. La série $\sum_{n\geq 0} n.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (car $n^2.n.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0) donc X admet une espérance.

De même $\sum_{n\geq 0} n^2.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge pour une raison similaire et par le théorème de transfert, X^2 admet une espérance et X admet une variance.

Puis : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{9}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

De même : $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2.\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$, soit :

$E(X^2) = \frac{2}{27}.\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{9}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, et enfin : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

12. a. Avant le tirage n, la boîte contient n boules Noires et 1 boule Blanche et (n+1) au total.
L'ensemble des valeurs possibles de Y est $\mathbb{N}^*$, soit : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Notons ensuite pour : n $\in \mathbb{N}^*$, l'événement « on tire une boule Noire au tirage n ».
Puis : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $(Y=n) = \overline{N_1} \cap \ldots \cap \overline{N_{n-1}} \cap N_n$, et :

$$P(Y=n) = P(\overline{N_1}).P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2})\ldots P_{\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-2}}}(\overline{N_{n-1}}).P_{\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-1}}}(N_n) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}.\frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}.$$

De même : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $(Z=n) = N_1 \cap \ldots \cap N_{n-1} \cap \overline{N_n}$, et :

$$P(Z=n) = P(N_1).P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\ldots\cap N_{n-2}}(N_{n-1}).P_{N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}}(\overline{N_n}) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n.(n+1)}.$$

b. Y admet une espérance car : $n^2.n.P(Y=n) = \frac{n^4}{(n+1)!}$, tend vers 0 en $+\infty$ et $\sum_{n\geq 1} n.P(Y=n)$ converge.

Puis : $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1).n-(n+1)+1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}$,
et avec la série exponentielle : $E(Y) = e - (e-1) + (e-1-1) = e-1$.

c. Puisque : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $n.P(Z=n) = \frac{1}{n+1}$, la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

13. a. La loi de X est assez simple, c'est la loi du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes, soit la loi géométrique.
Donc : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = q^{n-1}.p$, où on a noté : $q = 1-p$.
On peut aussi dire, en notant S_k l'événement : « A se réalise au $k^{\text{ième}}$ essai » que :
$(X=n) = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$, d'où le même résultat par indépendance des essais car : $P(S_k) = p$.

Dans ce cas, la série $\sum_{n\geq 1} n.P(X=n)$ converge, donc X admet une espérance, et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p.q^{n-1} = p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

b. On a : Y(Ω) = ℕ – {0,1}, et la loi de Y peut s'obtenir avec la formule des probabilités totales :

- pour : n = 1, $P(Y=1) = P(Y=n) = 0$, et :
- ∀ n ≥ 2, $P(Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} P_{(X=k)}(Y=n).P(X=k)$.

Or : 1 ≤ k ≤ n – 1, $P_{(X=k)}(Y=n)$ correspond à la probabilité d'obtenir un succès au $n^{\text{ième}}$ essai après le $k^{\text{ième}}$, ce qui est identique à obtenir un succès au $(n-k)^{\text{ième}}$ essai en repartant du début, soit :

$P_{(X=k)}(Y=n) = P(X=x-k)$,

et donc : $P(Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} p.q^{n-k-1}.p.q^{k-1} = p^2.\sum_{k=1}^{n-1} q^{n-2} = (n-1).p^2.q^{n-2}$.

On peut également écrire : $(Y=n) = (S_1 \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n) \cup \ldots \cup (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n)$,
et les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on obtient le même résultat en utilisant à nouveau l'indépendance des lancers.

Puis la série $\sum_{n\geq 1} n.P(Y=n)$ converge donc Y admet une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).p^2.q^{n-2} = p^2.\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}..$$

c. On constate évidemment que : $E(X) < E(Y)$.

Couple et famille de variables aléatoires.

14. a. Notons tout d'abord que X est à valeurs dans ℕ* et que pour un entier n non nul, $(X=n)$ correspond à :

$F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$, donc par indépendance : $P(X=n) = P(F_1)\ldots P(F_{n-1}).P(\overline{F_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

X correspond en fait à une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

De même, $(Y=n)$ correspond à : $\overline{F_1} \cap \ldots \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$, et : $P(Y=n) = P(\overline{F_1})\ldots P(\overline{F_{n-1}}).P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. Le couple (X,Y) prend ses valeurs dans ℕ*² et plus précisément, pour : (i,j) ∈ ℕ*², on a :

- si : i = j, alors $P(X=i, Y=j) = 0$, puisqu'on ne peut obtenir Pile <u>et</u> Face au même tirage.
- si : i ≥ 2, et : j ≥ 2, on a encore : $P(X=i, Y=j) = 0$, car on a obtenu Pile <u>ou</u> Face au premier tirage,
- si : i = 1, et : j ≥ 2, alors : $(X=i, Y=j) = \overline{F_1} \cap \ldots \cap \overline{F_{j-1}} \cap F_j$, et :

  $P(X=i, Y=j) = P(\overline{F_1})\ldots P(\overline{F_{j-1}}).P(F_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$.
- de même si : j = 1, i ≥ 2, on a : $P(X=i, Y=j) = P(F_1)\ldots P(F_{i-1}).P(\overline{F_i}) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$.

c. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes, puisque :

$P(X=1, Y=1) = 0$, et : $P(X=1).P(Y=1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$.

d. Z prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Puis :

- si : k = 2, alors : $P(Z=k) = P(Z=2) = P(X=1, Y=1) = 0$, et :
- si : k ≥ 3, $P(Z=k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}(X=i, Y=k-i)\right) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i, Y=k-i)$, par incompatibilité et :

  $P(Z=k) = P(X=1, Y=k-1) + P(X=k-1, Y=1)$, puisque ce sont les deux seuls termes non nuls.

De plus on a : 1 ≠ k – 1, donc : $P(Z=k)=\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{k-2}}$.

15. a. Notons que tous les termes sont bien positifs.

De plus : ∀ 1 ≤ j, la série $\sum_{i\geq 1} p_{i,j}$ converge car : $p_{i,j}=\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{j.(j+1)}.\frac{1}{i^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

Puis : ∀ 1 ≤ j, $S_j=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,j}=\frac{1}{j.(j+1)}.\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i.(i+1)}=\frac{1}{j.(j+1)}.1=\frac{1}{j.(j+1)}$ (série télescopique classique),

et : $\sum_{j=1}^{+\infty} S_j=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j.(j+1)}=1$.

Donc $((i,j),p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définit bien la loi de probabilité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.

b. La loi de X s'obtient par :

∀ i ≥ 1, $P(X=i)=\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=i,Y=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}=\frac{1}{i.(i+1)}.\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j.(j+1)}=\frac{1}{i.(i+1)}$.

De façon identique (ou par symétrie) : ∀ j ≥ 1, $P(Y=j)=\frac{1}{j.(j+1)}$.

c. Puisqu'on a alors : ∀ i ≥ 1, ∀ j ≥ 1, $P(X=i,Y=j)=\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}=P(X=i).P(Y=j)$, les variables X et Y sont bien indépendantes.

16. a. On remarque tout d'abord que tous les $a_{i,j}$ sont positifs, puis que :

- si : j = 0, $S_0=\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}=0$, et que :
- ∀ 1 ≤ j, $S_j=\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}=\sum_{i=0}^{j-1}(1-p)^{j-2}.p^2=(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2$.

De plus la série $\sum_{j\geq 0} S_j$ converge car : $(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2=o_{+\infty}\left(\frac{1}{j^2}\right)$, et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j=\sum_{j=1}^{+\infty}(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2=p^2.\sum_{k=0}^{+\infty}k.(1-p)^{k-1}=p^2.\sum_{k=1}^{+\infty}k.(1-p)^{k-1}=p^2.\frac{1}{(1-(1-p))^2}=1.$$

Donc $\{(i,j,a_{i,j}),(i,j)\in\mathbb{N}^2\}$ est bien la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.

b. X prend ses valeurs dans ℕ et sa loi s'obtient par :

∀ 1 ≤ i, $P(X=i)=\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=i,Y=j)=\sum_{j=i+1}^{+\infty}(1-p)^{j-2}.p^2=p^2.\frac{(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)}=p.(1-p)^{i-1}$.

Y prend ses valeurs dans ℕ - {0,1} et :

∀ 2 ≤ j, $P(Y=j)=\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=i,Y=j)=\sum_{i=0}^{j-1}(1-p)^{j-2}.p^2=(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$P(X=2,Y=2)=a_{2,2}=0$, et : $P(X=2).P(Y=2)=p.(1-p).p^2\neq 0$.

c. Soit donc : j ≥ 2.

Alors :

- $P_{(Y=j)}(X=i)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{(1-p)^{j-2}.p^2}{(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2}=\frac{1}{j-1}$, si : 1 ≤ i ≤ j – 1, et :
- $P_{(Y=j)}(X=i)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=0$, sinon.

Un peu comme une restriction de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}_{j-1}$.

17. On commence par noter que X et Y admettent une espérance ainsi que U^2 et V^2, car :

$U^2 = \alpha^2.X^2 + 2..\beta.X + \beta^2$, avec une expression similaire pour V^2.

Donc U et V admettent aussi une espérance et : $\text{cov}(U,V) = E(U).E(V) - E(U.V)$.

Or :

- $E(U) = \alpha.E(X) + \beta$, $E(V) = \gamma.E(Y) + \delta$, et :
- $E(U.V) = E(\alpha.\gamma.X.Y + \alpha.\delta.X + \beta.\gamma.Y + \beta.\delta) = \alpha.\gamma.E(X.Y) + \alpha.\delta.E(X) + \beta.\gamma.E(Y) + \beta.\delta$, soit :
- $\text{cov}(U,V) = \alpha.\gamma.(E(X).E(Y) - E(X).E(Y)) = \alpha.\gamma.\text{cov}(X,Y)$.

Puis : $V(U) = V(\alpha.X + \beta) = V(\alpha.X) = \alpha^2.V(X)$, soit : $\sigma(U) = |\alpha|.\sigma(X)$, et de même : $\sigma(V) = |\gamma|.\sigma(Y)$.

On doit alors supposer que α et γ sont non nuls pour pouvoir parler de $\rho(U,V)$.

Et finalement : $\rho(U,V) = \dfrac{\alpha.\gamma.\text{cov}(X,Y)}{|\alpha|.\sigma(X).|\gamma|.\sigma(Y)} = \pm\rho(X,Y)$, le signe étant celui de $\alpha.\gamma$.

18. Pour chaque tirage tous les numéros ont la même probabilité de sortir et X_i suit donc la loi uniforme sur $\mathbb{N}_N$ pour tout entier i.

Donc : $\forall$ i $\in$ $\mathbb{N}^*$, $E(X_i) = \dfrac{N+1}{2}$, et : $V(X_i) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

Par linéarité de l'espérance on a donc : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n.\dfrac{N+1}{2}$.

Puis les variables X_i étant mutuellement indépendantes : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n.\dfrac{N^2-1}{12}$.

19. Par linéarité de l'espérance on a : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n.m$.

Puis : $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2.\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(X_i, X_j) = n.v + 2.\dfrac{n.(n-1)}{2}.v = n^2.v$.

Lois usuelles, modélisations, approximations.

20. a. X suit ici la loi uniforme sur {1, …, 6} $\mathcal{U}$(6), les résultats étant équiprobable (dé équilibré).

b. Ici la probabilité à chaque tirage d'obtenir une boule Rouge est constante égale à : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Il s'agit donc d'une succession de 8 épreuves de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à $\dfrac{1}{3}$.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(8, \dfrac{1}{3})$.

c. Ici il s'agit d'une expérience où on attend « le premier succès », donc X suit la loi géométrique de paramètre : $p = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, soit $\mathcal{G}(\dfrac{1}{3})$.

d. Le placement de chaque boule est une épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès égale à $\dfrac{1}{3}$, et indépendant des autres placements.

On veut estimer le nombre de succès : X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \dfrac{1}{3})$.

e. Puisque les cartes sont mélangées au hasard, la place de la Dame de Cœur est équiprobable parmi toutes les places possibles et donc X suit la loi uniforme sur {1, …, 32}, soit $\mathcal{U}$(32).

f. Cette situation est totalement identique à la précédente (on aurait pu imaginer que les cartes étaient tirées une à une du paquet (ou du sac) et étalées ensuite sur la table).
X suit donc loi uniforme sur {1, …, n}, soit $\mathcal{U}$(n).

g. Il s'agit ici d'une expérience où on attend « le premier succès » et X suit donc la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$, soit $\mathcal{G}(\dfrac{1}{n})$.

h. Ici il s'agit d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre : $p = \frac{1}{r}$, et X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{r})$.

21. a. Il est immédiat par récurrence que : $\forall$ n $\in$ ℕ, $P(X = n) = \frac{2^n}{n!}.P(X = 0)$.

Comme de plus la somme des probabilités doit valoir 1, on a donc :

$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = P(X = 0).\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = P(X = 0).e^2$, soit : $P(X = 0) = e^{-2}$, et finalement :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $P(X = n) = \frac{2^n}{n!}.e^{-2}$.

X suit donc la loi de Poisson $\mathscr{P}(2)$.

On en déduit que : $E(X) = V(X) = 2$.

b. La suite $(P(X = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire double, d'équation caractéristique : $3.r^2 - 4.r + 1 = 0$, qui a pour racines 1 et $\frac{1}{3}$.

Donc : $\exists$ (A,B) $\in$ ℝ², $\forall$ n $\in$ ℕ*, $P(X = n) = A.1^n + B.\left(\frac{1}{3}\right)^n = A + \frac{B}{3^n}$.

Puisque la série $\sum_{n\geq 1} P(X = n)$, doit être convergente, on a : A = 0, et de somme 1, on a alors :

$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B}{3^n} = B.\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{B}{2}$, et : $B = 2$.

Finalement : $\forall$ n $\in$ ℕ, $P(X = n) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3^{n-1}}$, et X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{2}{3})$.

En particulier : $E(X) = \frac{3}{2}$, et : $V(X) = \frac{3}{4}$.

22. a. L'ensemble des valeurs prises par Y est ℕ.

Puis (Y = 0) est égal à l'union disjointe $\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2.k + 1)$, et donc :

$$P(Y = 0) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2.k + 1)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2.k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p.(1-p)^{2.k} = p.\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}.$$

D'autre part : $\forall$ n $\in$ ℕ*, (Y = n) = (X = 2.n), et donc :

$P(Y = n) = P(X = 2.n) = p.(1-p)^{2.n-1}$.

Enfin, la série $\sum_{n\geq 0} n.P(Y = n)$ converge car : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $n.p.(1-p)^{2.n-1} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p.(1-p)^{2.n-1} = p.(1-p).\sum_{n=1}^{+\infty} n.((1-p)^2)^{n-1} = \frac{p.(1-p)}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{1-p}{p.(2-p)^2}.$$

b. L'ensemble des valeurs prises par Y est encore ℕ, et comme dans la question précédente :

$P(Y = 0) = P\left((X = 0) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 2.k + 1)\right) = P(X = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2.k + 1)$, et donc :

$$P(Y = 0) = e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.k+1}}{(2.k+1)!} = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}.sh(\lambda) = \frac{1 + 2.e^{-\lambda} - e^{-2.\lambda}}{2}.$$

D'autre part : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $P(Y = n) = P(X = 2.n) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!}$.

Enfin, Y admet une espérance car : $n^2.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série $\sum_{n\geq 0} n.P(Y = n)$ converge, et :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty}(2.n).\frac{\lambda^{2.n-1}}{(2.n)!} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda}{2}.ch'(\lambda) = \frac{\lambda.(1-e^{-2.\lambda})}{4}.$$

23. Chaque passager a une probabilité de présence de 0.95 au départ de l'avion.
On a donc une succession de 94 expériences de Bernoulli de paramètre 0.95, soit une variable aléatoire X donnant le nombre de passagers présents au départ de l'avion qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(94, 0.95).
La probabilité qu'il y ait un problème au départ (trop de personnes présentes) correspond donc à :

$$P(X \geq 91) = \sum_{n=91}^{94} P(X = n) = \sum_{n=91}^{94}\binom{94}{n}.0.95^n.(1-0.95)^{94-n} \approx 0.3028.$$

Si d'autre part, on considère la variable aléatoire Y donnant le nombre de passagers absents au départ de l'avion, soit : $Y = 94 - X$, cette variable Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(94,0.05).
On peut alors approcher cette loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre : $\lambda = 94.(1-0.95) = 4.7$, car on a : N = 94, éléments concernés (valeur assez grande) et un produit : N.p = 4.7, (donc assez faible).
Dans ce cas, la probabilité qu'il y ait un problème (pas assez d'absents au départ) est donc :

$$P(Y \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{3} e^{-4.7}.\frac{4.7^k}{k!} \approx 0.3097.$$

La loi de Poisson proposée semble donc une bonne approximation ici de la loi binomiale précédente.

24. La loi de X_n est ici clairement la loi binomiale $\mathscr{B}$(n, $\frac{1}{n}$), puisque le fait de remettre la boule tirée après chaque étape fait qu'on a affaire ici à une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre : $p_n = \frac{1}{n}$.
Or lorsque n tend vers +∞, et puisque : $n.p_n = 1$, on peut approcher cette loi par la loi de Poisson $\mathscr{P}$(1).
En particulier on a : $P(X_n = k) \approx e^{-1}.\frac{1^k}{k!}$, et donc : $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e.k!}$.
Remarque : en fait, on a : $P(X_n = k) = \binom{n}{k}.\left(\frac{1}{n}\right)^k.\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.(n-1)^{-k}.\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, et la formule de Stirling donne :

$$P(X_n = k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}}{k!.(n-k)^{n-k}.e^{-(n-k)}.\sqrt{2.\pi.(n-k)}}.(n-1)^{-k}.\frac{1}{e} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.\frac{1}{e^k}.\frac{(n-k)^k}{n^k}.\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.\frac{e^k}{e^k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.$$

25. On a par linéarité de l'espérance : ∀ n ∈ ℕ*, $E(Y_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}.E(X_n) = \frac{1}{n}.n.p = p$.
Par ailleurs : $V(Y_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.V(X_n) = \frac{1}{n^2}.n.p.(1-p) = \frac{p.(1-p)}{n}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne alors : ∀ ε > 0, $P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$, soit ici :
∀ ε > 0, $P(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2}$.
Or si on étudie la fonction : p $\mapsto$ $p.(1-p)$, sur [0,1], on constate qu'elle y reste positive et qu'elle atteint son maximum en : $p = \frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$, ce qui entraîne bien : $P(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4.n.\varepsilon^2}$.

26. a. Notons tout d'abord que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(n, $\frac{1}{6}$), et : $E(X) = n.\frac{1}{6} = \frac{n}{6}$, et : $V(X) = n.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5.n}{36}$.
Puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne :

$\forall$ ε > 0, $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)=P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$,

soit pour : $\varepsilon=\frac{n}{100}$, $P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geq\frac{n}{100}\right)\leq\frac{5.n}{36}.\frac{10000}{n^2}=\frac{5.10^4}{36.n}$.

b. On constate ensuite que : $\forall$ n ∈ ℕ*, $\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geq\frac{n}{100}\right)=\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|\geq\frac{1}{100}\right)$.

Donc : $P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right)=1-P\left(\left|X-\frac{n}{6}\right|\geq\frac{n}{100}\right)\geq1-\frac{5.10^4}{36.n}$.

Enfin, $\frac{X}{n}$ correspond à la fréquence d'apparition du 1 au cours ce des n lancers et si donc on veut que cette fréquence soit dans l'intervalle $\left]\frac{1}{6}-\frac{1}{100},\frac{1}{6}+\frac{1}{100}\right[$ avec un risque d'erreur inférieur à 0.05, cela correspond à une probabilité de 0.95 de trouver $\frac{X}{n}$ dans cet intervalle, ce qui est garantit dès que :

$1-\frac{5.10^4}{36.n}\geq0.95$, soit : $n\geq\frac{5.10^4}{36.0.05}>27777$, ou encore : n ≥ 27778.

27. a. Le résultat demandé est immédiat puisqu'il s'agit de la loi faible des grands nombres, en remarquant simplement que : $v=\sigma^2$, où σ est l'écart-type commun à toutes les variables aléatoires X_k.

b. Il suffit donc de trouver N tel que : $\frac{10^{-1}}{N.(10^{-2})^2}\leq10^{-3}$, soit : $\frac{10^{-1}.10^3}{10^{-4}}=10^6\leq N$, et : $N=10^6$, convient.

Fonctions génératrices.

28. Au travail donc…

- Si X suit la loi uniforme $\mathscr{U}$(n), on a :

$\forall$ t ∈ ℝ, $G_X(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}.t^k=\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}t^k=\frac{1}{n}.\frac{1-t^n}{1-t}.t$, la dernière égalité étant valable pour : t ≠ 1.

- Si X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}$(p), on a :

$\forall$ t ∈ ℝ, $G_X(t)=(1-p).t^0+p.t^1+=(1-p)+p.t$.

- Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(p,n), on a :

$\forall$ t ∈ ℝ, $G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}.t^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(p.t)^k.(1-p)^{n-k}=\left(1-p+p.t\right)^n$.

- Si X suit la loi géométrique $\mathscr{G}$(p), on a :

$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p.(1-p)^{n-1}.t^n=p.t.\frac{1}{1-(1-p).t}$, et cette série a pour rayon de convergence : $R=\frac{1}{1-p}$, la fonction étant elle définie sur $\left]-\frac{1}{1-p},+\frac{1}{1-p}\right[$.

- Si X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}$(λ), on a :

$\forall$ t ∈ ℝ, $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}.t^n=e^{-\lambda}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda.t)^n}{n!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda.t}=e^{(\lambda-1).t}$.

29. Tout d'abord, si X suit la loi $\mathscr{B}$(n,p), alors :

$\forall$ t ∈ ℝ, $G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k).t^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}.t^k=(p.t+(1-p))^n$.

De même si Y suit la loi $\mathscr{B}$(m,p), alors : $\forall$ t ∈ ℝ, $G_Y(t)=(p.t+(1-p))^m$.

Puis X et Y étant indépendantes, on a : $\forall$ t ∈ ℝ, $G_{X+Y}(t)=G_X(t).G_Y(t)=(p.t+(1-p))^{n+m}$, et (X+Y) suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(n+m,p).

30. a. Vérifier la cohérence de cette définition revient à vérifier qu'on définit bien ainsi une variable aléatoire discrète.

Or toutes les valeurs prises sont positives et : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{1}{ch(x)}.ch(x) = 1$.

Donc on vient bien de définir ainsi la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

La fonction génératrice cherchée est donnée par la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n.P(X=n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

Or : ∀ t ∈ ℝ*, ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{t^{n+1}.P(X=n+1)}{t^n.P(X=n)}\right| = |t|.\left|\frac{x^{2.n+2}}{(2.n+2)!}.\frac{(2.n)!}{x^{2.n}}\right| = |t|.\frac{x^2}{(2.n+2).(2.n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

et la règle de d'Alembert garantit que le rayon de convergence de la série entière est donc : R = +∞.

Ensuite : ∀ t ∈ ℝ, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.P(X=n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n.x^{2.n}}{(2.n)!}$, et donc :

- si : t ≥ 0, $G_X(t) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x.\sqrt{t})^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{ch(x.\sqrt{t})}{ch(x)}$, et :
- si : t < 0, $G_X(t) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.(x.\sqrt{-t})^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{\cos(x.\sqrt{-t})}{ch(x)}$.

b. Comme série entière, G_X est de classe C^∞ sur ℝ, donc X et X^2 admettent une espérance.
De plus :

∀ t > 0, $G_X'(t) = \frac{sh(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x}{2.\sqrt{t}}$, d'où : $E(X) = G_X'(1) = \frac{x.sh(x)}{2.ch(x)}$, et :

∀ t > 0, $G_X''(t) = \frac{ch(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x^2}{4.t} - \frac{sh(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x}{4.t^{\frac{3}{2}}}$, et : $G_X''(1) = \frac{x^2}{4} - \frac{sh(x)}{ch(x)}.\frac{x}{4}$

On peut alors retrouver : $G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).P(X=n) = E(X.(X-1)) = E(X^2) - E(X)$, soit :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{sh(x)}{ch(x)}.\frac{x}{4}\right) + \frac{x.sh(x)}{2.ch(x)} - \left(\frac{x.sh(x)}{2.ch(x)}\right)^2,$$

soit après simplification : $V(X) = \frac{x.(x + sh(x).ch(x))}{4.ch^2(x)}$.