

Variables aléatoires (Corrigé des classiques).

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

31. Notons tout d'abord que : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Puisque par ailleurs, chaque lancer ne donne pas un résultat acceptable, on va évaluer la probabilité qu'un premier lancer « acceptable » donne un résultat égal à k .

Pour cela utilisons les événements : « le premier résultat pair est $2.k$ », pour : $1 \leq k \leq 6$.

On pourra alors considérer la loi de X comme uniforme si la probabilité des événements précédents vaut

$\frac{1}{6}$ dans tous les cas.

Or cette probabilité vaut : $P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap B_n)$, où on a noté :

A_n : « le $n^{\text{ième}}$ lancer donne un résultat impair »,

B_n : « le $n^{\text{ième}}$ lancer donne $2.k$ ».

En effet, la famille d'événements utilisée est une famille d'événements deux à deux incompatibles.

De plus, par indépendance d'événements (les lancers sont indépendants) :

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_1) \dots P(A_{n-1}) \cdot P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6}{12}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Donc la loi de X est uniforme.

32. a. Il est immédiat par récurrence que : $\forall n \geq 0, P(X = n) = \frac{1}{n!} \cdot P(X = 0)$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{n!} \cdot P(X = 0).$$

$$\text{Puisque : } \sum_{n \in X(\Omega)} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [P(X = n) + P(X = -n)] + P(X = 0) = 1 = P(X = 0) \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right],$$

$$\text{on en déduit que : } P(X = 0) = \frac{1}{1 + 2 \cdot (e - 1)} = \frac{1}{2e - 1}, \text{ puis : } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2e - 1}.$$

b. X admet alors une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \in X(\Omega)} n \cdot P(X = n)$ est absolument convergente.

Or les deux séries $\sum_{n \geq 1} |n \cdot P(X = n)|$ et $\sum_{n \geq 1} |-n \cdot P(X = -n)|$ sont absolument convergentes car :

$$\forall n \geq 1, |n \cdot P(X = n)| = |-n \cdot P(X = -n)| = \frac{1}{2e - 1} \cdot \frac{1}{(n - 1)!}.$$

Donc X admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(X = n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(X = -n) = 0$.

X est donc une variable centrée.

Puis pour des raisons similaires, X^2 admet une espérance car par le théorème de transfert :

$$|n^2 \cdot P(X = n)| = |(-n)^2 \cdot P(X = -n)| = \frac{1}{2e - 1} \cdot \frac{n}{(n - 1)!}, \text{ qui est le terme général d'une série convergente.}$$

$$\text{Enfin : } E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot 2 \cdot P(X = n) = \frac{2}{2e - 1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n - 1)!} = \frac{2}{2e - 1} \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 1}{(n - 1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n - 1)!} \right], \text{ soit :}$$

$$E(X^2) = \frac{2}{2e - 1} \cdot \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n - 2)!} + e \right] = \frac{4e}{2e - 1}, \text{ et finalement : } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4e}{2e - 1}.$$

33. a. On peut noter que puisqu'il y a des boules rouges, vertes et bleues, on a :

$$0 < p < 1, 0 < b < 1, 0 < r < 1, \text{ et évidemment :}$$

$$p + b + r = 1.$$

b. On commence par remarquer que : $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$, puisqu'il faut au moins 2 tirages pour qu'il y ait

changement de couleur.

De plus, si on note B_n (respectivement R_n et V_n) les événements :

« le $n^{\text{ième}}$ tirage donne une boule Bleue (respectivement Rouge et Verte) »,

alors : $P(B_n) = b$, $P(R_n) = r$, et : $P(V_n) = v$.

Pour : $n \geq 2$, l'événement $(X = n)$ correspond à :

$$(X = n) = (B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}) \cup (R_1 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap \overline{R_n}) \cup (V_1 \cap \dots \cap V_{n-1} \cap \overline{V_n}).$$

Les trois événements étant incompatibles puis par indépendance des tirages, on a alors :

$$P(X = n) = P(B_1) \dots P(B_{n-1}) \cdot P(\overline{B_n}) + P(R_1) \dots P(R_{n-1}) \cdot P(\overline{R_n}) + P(V_1) \dots P(V_{n-1}) \cdot P(\overline{V_n}), \text{ et donc :}$$

$$P(X = n) = b^{n-1} \cdot (1-b) + r^{n-1} \cdot (1-r) + v^{n-1} \cdot (1-v).$$

On peut vérifier qu'on a bien alors : $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

c. La série $\sum_{n \geq 2} n \cdot P(X = n)$ converge alors comme somme de trois séries convergentes et :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot P(X = n) = (1-b) \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot b^{n-1} + (1-r) \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot r^{n-1} + (1-v) \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot v^{n-1}.$$

Or : $\sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot b^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot b^{n-1} - 1 = \frac{1}{(1-b)^2} - 1$, de même pour les deux autres, donc :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} - (1-b) + \frac{1}{1-r} - (1-r) + \frac{1}{1-v} - (1-v) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

34. a. Puisque : $T_k(\Omega) = \{0, 1\}$, c'est une variable de Bernoulli et T_k s'annule si et seulement si toutes les personnes descendent à un étage différent du $k^{\text{ième}}$, soit :

$$P(T_k = 0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p, \text{ et donc : } P(T_k = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^p.$$

$$\text{Enfin : } E(T_k) = 0 \cdot P(T_k = 0) + 1 \cdot P(T_k = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^p.$$

b. X comptant le nombre d'arrêts de l'ascenseur, on a : $X = T_1 + \dots + T_n$.

Comme l'espérance est linéaire, on en déduit que : $E(X) = \sum_{k=1}^n E(T_k) = n \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^p\right)$.

Remarque : s'il n'y a qu'une personne, il n'y a qu'un arrêt et on a bien alors : $E(X) = 1$.

35. a. On peut reconstituer la fraction et identifier les termes obtenus pour déterminer α , β , γ , soit donc :

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma) \cdot n^2 + (3\alpha + 2\beta + \gamma) \cdot n + (2\alpha)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)},$$

et le système obtenue donne finalement : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$, et : $\gamma = \frac{1}{2}$.

b. On commence par remarquer que pour toute valeur de a , la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ converge car : $p_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Puis : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N p_n = a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{n+2}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{n}\right)$, et :

$$\forall \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N p_n = a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)\right) = a \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+1}\right)\right).$$

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on conclut que : $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{a}{4}$.

En choisissant : $a = 4$, la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ est alors à termes positifs et de somme 1 et $(n, p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors

bien la loi de probabilité d'une variable discrète X .

c. La série $\sum_{n \geq 1} n.P(X = n)$ étant à termes positifs, elle converge car : $n.P(X = n) = n.p_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puis : $\sum_{n=1}^{+\infty} n.P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1).(n+2)} = 4.\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 2$, en reconnaissant une série télescopique.

d. On peut remarquer que : $Y = (X - 3)^2$, et donc : $Y(\Omega) = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

Puis :

- $(Y = 0) = (X = 3)$, et : $P(Y = 0) = P(X = 3) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$,

- $(Y = 1) = (X = 4) \cup (X = 2)$, et par incompatibilité : $P(Y = 1) = P(X = 4) + P(X = 2) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$,

- $(Y = 4) = (X = 5) \cup (X = 1)$, et de même : $P(Y = 4) = P(X = 5) + P(X = 1) = \frac{2}{105} + \frac{2}{3} = \frac{24}{35}$,

- $\forall n \geq 3, (Y = n^2) = (X = n+3) \cup (X = 3-n)$, d'où : $P(Y = n^2) = P(X = n+3) + P(X = 3-n) = p_{n+3}$.

Par le théorème de transfert, Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (n-3)^2.P(X = n)$

converge.

Or on constate que : $(n-3)^2.P(X = n) = \frac{4.(n-3)^2}{n.(n+1).(n+2)} \sim \frac{4}{n}$.

Donc la série proposée diverge et Y n'admet pas d'espérance.

36. On va noter B_n (resp. N_n) l'événement : « on tire une boule Blanche (resp. Noire) au $n^{\text{ième}}$ tirage ».

a. A l'issue du 1^{er} tirage, il peut y avoir 1 ou 2 boules Blanches dans la boîte, plus précisément :

- si on a tiré une boule Noire, il y a après 1 boule Noire et 2 boules Blanches,
- si on a tiré une boule Blanche, il y a après 2 boules Noires et 1 boule Blanche.

On en déduit que :

- $P(Y_1 = 0) = 0$,

- $P(Y_1 = 1) = P(B_1) = \frac{2}{3}$,

- $P(Y_1 = 2) = P(N_1) = \frac{1}{3}$.

b. L'événement $(Y_n = 2)$ correspond à tirer jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tirage uniquement la boule Noire.

Donc : $P(Y = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, par la formule des probabilités composées, qu'on ne détaille pas ici.

c. On a déjà calculé u_1 qui vaut : $u_1 = \frac{2}{3}$.

On peut écrire : $\forall n \geq 1, (Y_{n+1} = 1) = ((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) \cup ((Y_n = 2) \cap B_{n+1})$, et ces événements étant incompatibles, on en déduit que : $u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) + P((Y_n = 2) \cap B_{n+1})$, puis :

- $P((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) = P_{(Y_n=1)}(N_{n+1}).P(Y_n = 1) = \frac{2}{3}.u_n$, et :

- $P((Y_n = 2) \cap B_{n+1}) = P_{(Y_n=2)}(B_{n+1}).P(Y_n = 2) = \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^2$, soit finalement : $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{2}{3}.u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.

Si alors on note : $\forall n \geq 1, v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}.u_n + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}.\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}.v_n$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\left(u_1 + \frac{2}{3}\right) = 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$, soit : $u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = \frac{2.(2^n - 1)}{3^n}$.

d. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2.(2^n - 1)}{3^n} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}$, puisque $(Y = 0), (Y = 1)$ et $(Y = 2)$ forment un système complet d'événements.

e. On en déduit que : $\forall n \geq 1, E(Y_n) = 0.P(Y_n = 0) + 1.P(Y_n = 1) + 2.P(Y_n = 2) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

f. Tout d'abord, Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$, puisqu'il faut au moins 2 tirages pour éliminer les boules Blanches.

On peut alors écrire : $\forall n \geq 2, (Z = n) = (Y_n = 0) \cap (Y_{n-1} \neq 0) = (Y_n = 0) \cap \overline{(Y_{n-1} = 0)}$.

Or : $(Y_{n-1} = 0) \subset (Y_n = 0)$, donc : $(Z = n) = (Y_n = 0) \cap \overline{(Y_{n-1} = 0)} = (Y_n = 0) \setminus (Y_{n-1} = 0)$.

D'où : $P(Z = n) = P(Y_n = 0) - P(Y_{n-1} = 0) = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n} - \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = \frac{2^n - 2}{3^n}$.

Enfin la série $\sum_{n \geq 2} n.P(Z = n)$ converge et :

$$E(Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \frac{2^n - 2}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 \right] - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right] = \frac{16}{3} - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}.$$

Couple et famille de variables aléatoires.

37. On peut remarquer que X et Y jouent des rôles totalement symétriques.

a. Pour cela, on a : $\forall j \in \mathbb{N}, S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a \cdot \frac{i+j}{i! \cdot j!} = \frac{a}{j!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{i!} + j \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \right) = \frac{a}{j!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} + j \cdot e \right) = \frac{a \cdot e}{j!} \cdot (j+1)$, toutes les séries qui apparaissent étant convergentes.

Puis la série $\sum_{j \geq 0} S_j$ converge et : $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a \cdot e}{j!} \cdot (j+1) = a \cdot e \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right) = 2 \cdot a \cdot e^2$.

Si donc on pose : $a = \frac{1}{2 \cdot e^2}$, alors la famille $((i,j), p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, détermine bien la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

b. Les lois marginales de X et de Y sont données par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{i! \cdot j!} = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \frac{i+1}{i!},$$

et de façon symétrique : $\forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \frac{j+1}{j!}$.

On peut alors remarquer que : $P(X = 0, Y = 0) = 0$, et : $P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = \left(\frac{1}{2 \cdot e}\right)^2 \neq 0$, et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

c. Tout d'abord X (et Y) admettent une espérance puisque : $i \cdot P(X = i) = i \cdot \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \frac{i+1}{i!} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{i^2}\right)$.

De plus : $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i \cdot (i+1)}{i! \cdot j!} = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j \cdot (j+1)}{j!} = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j \cdot (j-1)}{j!} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) = \frac{3}{2}$.

Y admet donc aussi une espérance qui vaut la même valeur.

Puis X.Y admet une espérance car par la formule du transfert, la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) \right)$ converge.

En effet, on a tout d'abord : $\forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{+\infty} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) = \frac{i}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} j \cdot \frac{i+j}{j!}$.

Donc : $\sum_{j=0}^{+\infty} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) = \frac{i}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot \left(i \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{(j-1)!} \right) = \frac{i}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot (i \cdot e + 2 \cdot e) = \frac{i \cdot (i+2)}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e}$.

On constate alors que la série obtenue (en i) est bien convergente, et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} i \cdot j \cdot P(X=i, Y=j) \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i \cdot (i+2)}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e} \right) = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i \cdot (i+2)}{i!} = \frac{1}{2 \cdot e} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i \cdot (i-1) + 3 \cdot i}{i!} = \frac{4 \cdot e}{2 \cdot e} = 2.$$

Finalement $X \cdot Y$ admet une covariance et : $\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

Remarque : en cas de doute pour la manipulation de sommes infinies, on peut toujours revenir à des sommes partielles.

d. De la même façon, par la formule de transfert, la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} \cdot P(X=i, Y=j) \right)$ est convergente.

$$\text{En effet : } \forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} \cdot P(X=i, Y=j) = 2^i \cdot \frac{1}{i!} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^2} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} 2^j \cdot \frac{i+j}{j!} = \frac{2^i}{2 \cdot e^2 \cdot i!} \left(i \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^j}{j!} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2^{j-1}}{(j-1)!} \right),$$

$$\text{et : } \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} \cdot P(X=i, Y=j) = \frac{2^i}{2 \cdot e^2 \cdot i!} \cdot (i \cdot e^2 + 2 \cdot e^2) = \frac{2^i \cdot (i+2)}{2 \cdot i!}.$$

On constate alors que la série obtenue (en i) est bien convergente, et :

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} \cdot P(X=i, Y=j) \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{2^i \cdot (i+2)}{2 \cdot i!} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{i!} \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2^{i-1}}{(i-1)!} + e^2 = 2 \cdot e^2.$$

38. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par T_n est \mathbb{N}^* , et : $\forall k \geq 1, P(T_n = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$.

On a donc, comme loi géométrique : $E(T_n) = \frac{1}{p}$, et : $V(T_n) = \frac{1-p}{p^2}$.

Remarque : on peut retrouver ces résultats avec :

- la série $\sum_{k \geq 1} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1}$, converge car : $k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)$, donc T_n admet une espérance et :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

- la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \cdot p \cdot (1-p)^{k-1}$ converge pour une raison similaire donc T_n^2 admet une espérance et :

$$E(T_n^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = \frac{2 \cdot p \cdot (1-p)}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p}, \text{ soit :}$$

$$E(T_n^2) = \frac{2 \cdot (1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}, \text{ puis : } V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

b. La variable aléatoire T_1 donne le rang du premier Pile, soit : $S_1 = T_1$

La somme $(T_1 + T_2)$ est égale à la somme du rang du premier Pile et du nombre de lancers

supplémentaires nécessaires pour obtenir le second Pile, soit le rang du second Pile et : $S_2 = T_1 + T_2$.

Plus généralement $(T_1 + \dots + T_n)$ est égale au rang du $n^{\text{ième}}$ Pile, soit la valeur de S_n et : $S_n = T_1 + \dots + T_n$.

c. Par linéarité de l'espérance, S_n admet donc une espérance et : $\forall n \geq 1, E(S_n) = E(T_1) + \dots + E(T_n) = \frac{n}{p}$.

Tous les lancers étant indépendants, les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont mutuellement

indépendantes et donc : $\forall n \geq 1, V(S_n) = V(T_1) + \dots + V(T_n) = \frac{n \cdot (1-p)}{p^2}$.

Lois usuelles, modélisations, approximations.

39. a. On rappelle tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$, donc : $u_n = \frac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = \frac{\lambda}{n+1}$.

b. Distinguons alors deux cas :

- si : $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors : $\exists N \in \mathbb{N}, u_N = 1$, plus précisément pour : $N = \lambda - 1$.

Dans ce cas : $\forall n < N, u_n > 1$, et la suite u est strictement croissante jusqu'au rang N , puis on a :

$P(X = N) = P(X = N + 1)$, et enfin : $\forall n > N, u_n < 1$, et la suite u est strictement décroissante à partir du rang $N+1$.

Donc u atteint son maximum en N et en $(N+1)$ où elle vaut : $u_N = u_{N+1} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^N}{N!}$, avec : $N = \lambda - 1$.

• si : $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors : $\forall n \leq \lfloor \lambda \rfloor - 1, u_n > 1$, et la suite u est strictement croissante jusqu'à ce rang puis on a : $\forall n \geq \lfloor \lambda \rfloor, u_n < 1$, et la suite u est strictement décroissante à partir de ce rang.

Dans ce cas, u atteint son maximum pour la valeur : $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

40. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par S est \mathbb{N}

Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, P(S = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k)$, par incompatibilité d'événements, et :

$$P(S = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \lambda^k \cdot \mu^{n-k},$$

par indépendance des variables, et enfin : $P(S = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \cdot (\lambda + \mu)^n$.

Autrement dit S suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

b. On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$:

• si : $k > n$, alors : $P_{(S=n)}(X = k) = 0$, et :

• si : $0 \leq k \leq n$,

$$P_{(S=n)}(X = k) = \frac{P(X = k, S = n)}{P(S = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(S = n)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda + \mu)^n},$$

$$\text{d'où : } P_{(S=n)}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.$$

Cette loi conditionnelle est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$.

41. a. Tout d'abord, l'ensemble des valeurs prises par Z est \mathbb{N}

Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, (Z = 2.n) = (X = 1, Y = 2.n) \cup (X = 2, Y = n)$, d'où par incompatibilité et indépendance :

$$P(Z = 2.n) = P(X = 1, Y = 2.n) + P(X = 2, Y = n) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2.n) + P(X = 2) \cdot P(Y = n),$$

$$\text{soit : } P(Z = 2.n) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{n!}.$$

De même : $\forall n \in \mathbb{N}, (Z = 2.n + 1) = (X = 1, Y = 2.n + 1)$, et :

$$P(Z = 2.n + 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2.n + 1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{2.n+1}}{(2.n+1)!}.$$

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, on a : $E(Z) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{3}{2} \cdot \lambda$.

De même X^2 et Y^2 sont indépendantes et : $E(Z^2) = E(X^2 \cdot Y^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2)$.

Puis : $E(X^2) = 1 \cdot P(X = 1) + 4 \cdot P(X = 2) = \frac{5}{2}$, et : $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \lambda + \lambda^2$.

$$\text{Finalement : } V(Z) = \frac{5}{2} \cdot (\lambda + \lambda^2) - \left(\frac{3}{2} \cdot \lambda \right)^2 = \frac{\lambda \cdot (10 + \lambda)}{4}.$$

b. Il paraît plus simple de chercher la probabilité pour que Z soit impair, c'est-à-dire :

$$P(Z \text{ impair}) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z = 2.n + 1)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = 2.n + 1) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \cdot \text{sh}(\lambda) = \frac{1 - e^{-2.\lambda}}{4},$$

le résultat étant obtenu par incompatibilité d'événements.

$$\text{Donc : } P(Z \text{ pair}) = 1 - P(Z \text{ impair}) = 1 - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4} = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}.$$

42. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par : $S = X + Y$, est $\mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Puis : $\forall n \geq 2, P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k).P(Y = n - k)$, par incompatibilité puis indépendance.

$$\text{Donc : } \forall n \geq 2, P(Z = n) = \sum_{k=1}^{n-1} p.(1-p)^{k-1}.p.(1-p)^{n-k-1} = (n-1).p^2.(1-p)^{n-2}.$$

D'autre part, l'ensemble des valeurs prises par : $T = \min(X, Y)$, est \mathbb{N}^* et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T \geq n) = P(X \geq n, Y \geq n) = P(X \geq n).P(Y \geq n) = P(X \geq n)^2$, toujours par indépendance et puisque X et Y suivent la même loi.

$$\text{On a ensuite : } P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p.(1-p)^{k-1} = p.(1-p)^{n-1} \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}.$$

$$\text{Donc : } P(T \geq n) = (1-p)^{2.n-2}.$$

Comme de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T \geq n) = P(T = n) + P(T \geq n+1)$, par incompatibilité d'événements, on en déduit que : $P(T = n) = P(T \geq n) - P(T \geq n+1) = (1-p)^{2.n-2} - (1-p)^{2.n} = ((1-p)^2)^{n-1} \cdot (2.p - p^2)$.

Enfin, l'ensemble des valeurs prises par : $U = \max(X, Y)$, est \mathbb{N}^* , et en s'inspirant de ce qui précède, on commence par remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(U \leq n) = P(X \leq n).P(Y \leq n) = P(X \leq n)^2$, pour les mêmes raisons que précédemment.

De plus : $P(X \leq n) = 1 - P(X \geq n+1) = 1 - (1-p)^n$, et on en déduit que : $P(U \leq n) = (1 - (1-p)^n)^2$.

En remarquant que cette égalité est encore valable pour : $n = 0$, on en déduit finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(U \leq n+1) = P(U = n) + P(U \leq n), \text{ et :}$$

$$P(U = n) = P(U \leq n+1) - P(U \leq n) = (1 - (1-p)^{n+1})^2 - (1 - (1-p)^n)^2.$$

b. • Si on considère le lancer d'une pièce déséquilibrée qui donne Pile avec la probabilité p, alors X peut représenter la variable aléatoire décrivant le rang du premier Pile, et Y peut représenter la variable aléatoire donnant le rang du premier Pile suivant le premier Pile obtenu.

Dans ce cas, $(X + Y)$ est la variable aléatoire donnant le rang du second Pile (voir exercice 37).

• D'autre part, si on imagine le lancer en parallèle de deux pièces comme dans le premier exemple, alors X et Y représentent les variables aléatoires donnant le rang d'apparition du premier Pile pour chaque pièce, indépendamment de l'autre.

Dans ce cas $\min(X, Y)$ représente le rang d'apparition du premier Pile, quelque soit la pièce envisagée. Or la probabilité d'apparition d'un premier Pile est le complément à 1 de la probabilité d'apparition de deux Face (pour chaque pièce) et vaut donc $(1-p)^2$.

Autrement dit, on est dans le cas de la répétition d'une expérience de Bernoulli où la probabilité d'échec est $(1-p)^2$.

Donc $\min(X, Y)$ doit suivre la loi géométrique (loi du premier succès) $\mathcal{G}(1 - (1-p)^2)$.

Or : $1 - (1-p)^2 = (2.p - p^2)$, donc c'est bien ce qu'on avait trouvé puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = (2.p - p^2) \cdot ((1-p)^2)^{n-1} = (2.p - p^2) \cdot (1 - (2.p - p^2))^{n-1}.$$

• Enfin, dans la même configuration qu'au dessus, $\max(X, Y)$ représente le nombre nécessaire de lancers pour obtenir au moins un Pile sur les deux pièces, qui ne correspond à aucun schéma classique.

c. La première probabilité vaut, par incompatibilités d'événements et indépendance :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n).P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p.(1-p)^{n-1})^2 = p^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1}, \text{ et :}$$

$$P(X = Y) = p^2 \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

Pour la deuxième probabilité, on a pour les mêmes raisons :

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n).P(Y \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p \cdot ((1-p)^{n-1})^2 = p \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1},$$

avec le calcul fait en question a, et donc : $P(X \leq Y) = p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$.

Remarque : on a aussi (par symétrie) : $P(X \geq Y) = \frac{1}{2-p}$, et :

$$P(X \geq Y) + P(X < Y) = P(X \geq Y) + (P(X \leq Y) - P(X = Y)) = \frac{1}{2-p} + \frac{1}{2-p} - \frac{p}{2-p} = 1.$$

43. a. On sait déjà que par linéarité de l'espérance : $\forall n \geq 1, E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$,

et puisque les variables sont supposées indépendantes : $V(S_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$.

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : $\forall \varepsilon > 0, P(|S_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}$.

On en déduit donc bien que : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

On pouvait aussi bien sûr reconnaître la loi faible des grands nombres puisque les variables aléatoires X_k suivent la même loi et sont mutuellement indépendantes.

b. Toujours par linéarité de l'espérance, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(Y_n) = \frac{E(X_n) + E(X_{n+1})}{2} = p$.

Puis pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*, Y_n$ est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, et :

- $P(Y_n = 0) = P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) \cdot P(X_{n+1} = 0) = (1-p)^2$, par indépendance,

- $P(Y_n = \frac{1}{2}) = P(X_n = 0, X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1, X_{n+1} = 0)$, par incompatibilité, et :

$$P(Y_n = \frac{1}{2}) = P(X_n = 0) \cdot P(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \cdot P(X_{n+1} = 0) = 2 \cdot p \cdot (1-p), \text{ par indépendance,}$$

- $P(Y_n = 1) = P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1) \cdot P(X_{n+1} = 1) = p^2$, pour les mêmes raisons.

Remarque : on peut alors recalculer l'espérance de Y_n :

$$E(Y_n) = 0 \cdot (1-p)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p) + 1 \cdot p^2 = p.$$

c. Distinguons plusieurs cas.

- si : $m \geq n + 2$, alors les quatre variables $X_n, X_{n+1}, X_m, X_{m+1}$ sont distinctes et par hypothèse indépendantes, donc Y_n et Y_m aussi car :

- pour α et β valant 0 ou 1, $(Y_n = \alpha)$ et $(Y_m = \beta)$ se décomposent chacun en $(X_n = \alpha, X_{n+1} = \alpha)$ et $(X_m = \beta, X_{m+1} = \beta)$, et par indépendance, on a alors :

$$P(Y_n = \alpha, Y_m = \beta) = P(X_n = \alpha) \cdot P(X_{n+1} = \alpha) \cdot P(X_m = \beta) \cdot P(X_{m+1} = \beta) = P(Y_n = \alpha) \cdot P(Y_m = \beta).$$

- pour α valant 0 ou 1, et : $\beta = \frac{1}{2}$, $(Y_m = \beta)$ s'écrit $(X_m = 0, X_{m+1} = 1) \cup P(X_m = 1, X_{m+1} = 0)$, d'où par

$$\text{incompatibilité : } P(Y_n = \alpha, Y_m = \beta) = P(Y_n = \alpha, X_m = 0, X_{m+1} = 1) + P(Y_n = \alpha, X_m = 1, X_{m+1} = 0),$$

et on termine comme dans le cas précédent.

- pour α et β valant tous deux $\frac{1}{2}$, les arguments précédents s'adaptent encore.

- si : $m = n + 1$, alors Y_n et Y_m (c'est-à-dire Y_{n+1}) ne sont pas indépendantes car :

$$P(Y_n = 0) = (1-p)^2, P(Y_{n+1} = 1) = p^2, \text{ et :}$$

$$P(Y_n = 0, Y_{n+1} = 1) = P(X_n = 0, X_{n+1} = 0, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1) = 0 \neq p^2 \cdot (1-p)^2.$$

d. On sait déjà, toujours par linéarité de l'espérance, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(T_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$.

$$\text{D'autre part : } \forall n \in \mathbf{N}^*, T_n = \frac{1}{2.n} \cdot \sum_{k=1}^n (X_k + X_{k+1}) = \frac{1}{2.n} \cdot (X_1 + 2.X_2 + \dots + 2.X_n + X_{n+1}).$$

Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, V(T_n) = \frac{1}{4.n^2} \cdot (V(X_1) + 4.V(X_2) + \dots + 4.V(X_n) + V(X_{n+1})) = \frac{1}{4.n^2} \cdot (4.n - 2) \cdot p \cdot (1 - p).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev redonne alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|T_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2.n - 1}{2.n^2} \cdot \frac{p \cdot (1 - p)}{\varepsilon^2}, \text{ et : } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

44. a. Si on note S la variable aléatoire donnant le nombre de boules Blanches tirées, alors on a :

$$S = X_1 + \dots + X_n.$$

Chaque variable X_j suit alors la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Dans ce cas, on a de plus, par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n.p$, et puisque les variables X_j sont indépendantes (remise de la boule tirée) : $V(S) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n.p \cdot (1 - p)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (ou la loi faible des grands nombres) donne alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S}{n} - E\left(\frac{S}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot V\left(\frac{S}{n}\right), \text{ soit : } P\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n.p \cdot (1 - p)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p \cdot (1 - p)}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Comme de plus la fonction : $p \mapsto p \cdot (1 - p)$, est positive et majorée par $\frac{1}{4}$, sur $]0,1[$, on en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n.p \cdot (1 - p)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4.n \cdot \varepsilon^2}.$$

Si on a obtenu : $S = k$, on conclut que : $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4.n \cdot \varepsilon^2}$.

En particulier, par événement contraire, p appartient à l'intervalle de confiance $\left[\frac{k}{n} - \varepsilon, \frac{k}{n} + \varepsilon\right]$ avec une probabilité supérieure à $\left(1 - \frac{1}{4.n \cdot \varepsilon^2}\right)$.

b. Si on veut garantir p au 100^{ième} près, on doit prendre : $\varepsilon = \frac{1}{100.n}$, ce qui conduit à :

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 1 - \frac{5000}{n}.$$

Si de plus, on veut que cette valeur soit garantie à 99%, cela oblige à prendre : $1 - \frac{5000}{n} \geq \frac{99}{100}$, soit

finalement : $n \geq 500000$.

Ca fait beaucoup et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre ici son peu d'efficacité ?

Fonctions génératrices.

45. a. On peut écrire par indépendance d'événements :

$$P(X > n) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = r_n, \text{ c'est-à-dire le reste d'ordre } n \text{ de la série } \sum_{n \geq 0} P(X = n).$$

b. C'est une démonstration faite dans le cours.

On commence par remarquer que : $\forall n \geq 1, P(X > n - 1) = P(X > n) + P(X = n)$, par incompatibilité.

Donc :

$$\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N n.P(X = n) = \sum_{n=1}^N n.P(X > n - 1) - \sum_{n=1}^N n.P(X > n) = \sum_{n=0}^{N-1} (n + 1).P(X > n) - \sum_{n=1}^N n.P(X > n),$$

$$\text{et donc : } \forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N n.P(X = n) = \sum_{n=0}^{N-1} (n + 1).P(X > n) - \sum_{n=0}^N n.P(X > n) = \sum_{n=0}^N P(X > n) - N.P(X > N).$$

Puis : $\forall N \geq 1, 0 \leq N.P(X > N) = N \cdot \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X = n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} n.P(X = n),$

et le majorant tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, comme reste d'une série convergente ($E(X)$).

Comme de plus $\sum_{n=1}^N n.P(X = n)$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$ qui est $E(X)$, la série $\sum_{n \geq 0} P(X < n)$ est donc convergente et finalement :

$$E(X) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N n.P(X = n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N P(X > n) - \lim_{N \rightarrow +\infty} N.P(X > N) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

c. Comme vu dans le cours, on constate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |P(X > n)| \leq 1,$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} P(X > n).t^n$ vaut au moins 1 et la fonction H est

bien définie au moins sur $] -1, +1[$

d. On peut commencer par écrire :

$$\forall t \in] -1, +1[, (1-t).H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).t^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X > n-1).t^n .$$

Donc : $\forall t \in] -1, +1[,$

$$(1-t).H(t) = P(X > 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [P(X > n) - P(X > n-1)].t^n = (1 - P(X = 0)) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n).t^n , \text{ car :}$$

- $P(X = 0) + P(X > 0) = P(X \geq 0) = 1$, et :
- $\forall n \geq 1, P(X > n-1) = P(X > n) + P(X = n)$ (comme on l'a vu plus haut).

Donc : $\forall t \in] -1, +1[, (1-t).H(t) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n).t^n = 1 - G(t)$, d'où le résultat voulu.

46. La fonction génératrice de Y est définie au moins sur $] -1, +1[$, et :

$$\forall t \in] -1, +1[, G(t) = E(t^Y) = E(t^{\lambda_1 \cdot X_1 + \dots + \lambda_n \cdot X_n}) = E(t^{\lambda_1 \cdot X_1} \dots t^{\lambda_n \cdot X_n}).$$

Or X_1, \dots, X_n étant des variables aléatoires mutuellement indépendantes, les variables $t^{\lambda_1 \cdot X_1}, \dots, t^{\lambda_n \cdot X_n}$ le sont aussi et donc :

$$\forall t \in] -1, +1[, G(t) = E(t^{\lambda_1 \cdot X_1 + \dots + \lambda_n \cdot X_n}) = E(t^{\lambda_1 \cdot X_1}) \dots E(t^{\lambda_n \cdot X_n}) = E((t^{\lambda_1})^{X_1}) \dots E((t^{\lambda_n})^{X_n}) = G_1(t^{\lambda_1}) \dots G_n(t^{\lambda_n}).$$