Espaces vectoriels normés.

Chap. 10 : résultats.

1. Normes, distances.

Définition 1.1 : norme dans un **K**-espace vectoriel
Exemples 1.1 : normes N_1, N_2, N_∞ dans $\mathbf{K}^n$ ou $C^0([a,b],\mathbf{K})$
Définition 1.2 : distance
Théorème 1.1 : distance associée à une norme
Définition 1.3 : normes équivalentes
Théorème 1.3 : l'équivalence de normes est une relation d'équivalence
Exemples 1.4 : équivalence des normes N_1, N_2, N_∞ précédentes

2. Suites dans un K-espace vectoriel normé.

Définition 2.1 : suite d'éléments d'un **K**-espace vectoriel
Définition 2.2 : suite convergente ou divergente dans un **K**-espace vectoriel normé
Théorème 2.1 : unicité de la limite d'une suite convergente pour une norme
Définition 2.3 : suite bornée pour une norme
Théorème 2.2 : suites bornées et normes équivalentes
Théorème 2.3 : la convergence entraîne le caractère borné
Théorème 2.4 : caractérisation séquentielle des normes équivalentes
Théorème 2.5 : structure d'espace vectoriel pour les suites convergentes pour une norme
Définition 2.4 : suite négligeable devant une autre, suite dominée par une autre

3. Exemple : espaces vectoriels normés de fonctions intégrables.

Théorème 3.1 : norme de la convergence en moyenne
Théorème 3.2 : norme de la convergence en moyenne quadratique

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 4.1 et définition 4.1 : norme infinie attachée à une base dans un espace vectoriel de dimension finie
Théorème 4.2 : équivalence des normes dans les espaces vectoriels de dimension finie
Théorème 4.3 : notions inchangées pour des normes équivalentes
Théorème 4.4 : lien entre la convergence d'une suite et celle de ses suites coordonnées dans une base de l'espace
Définition 4.2 : suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé
Théorème 4.5 : toute suite convergente est une suite de Cauchy
Théorème 4.6 : suites de Cauchy dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

5. Topologie métrique dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 5.1 : boule ouverte, boule fermée dans un espace vectoriel normé
Définition 5.2 : ouvert ou partie ouverte d'un espace vectoriel normé
Définition 5.3 : fermé ou partie fermée d'un espace vectoriel normé
Théorème 5.1 : ouverts et fermés dans des espaces vectoriels normés de dimension finie
Théorème 5.2 : union et intersection d'ouverts et de fermés
Définition 5.4 : point intérieur à une partie dans un espace vectoriel normé
Définition 5.5 : point adhérent à une partie dans un espace vectoriel normé
Théorème 5.3 : point intérieur ou adhérent et normes équivalentes
Théorème 5.4 : caractérisation séquentielle des points adhérents
Théorème 5.5 : caractérisation séquentielle des fermés
Définition 5.6 : partie bornée d'un espace vectoriel normé
Définition 5.7 : partie compacte ou compact d'un espace vectoriel normé
Théorème 5.6 : compact dans des espaces vectoriels de dimension finie
Théorème 5.7 : Bolzano-Weierstrass

Espaces vectoriels normés.

1. Normes, distances.

Définition 1.1 : norme dans un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit que N est une norme sur E si et seulement si :

- c'est une application de E dans $\mathbb{R}^+$,
- $\forall x \in E$, $(N(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$,
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x + y) \le N(x) + N(y)$.

On dit alors que (E,N) est un **K**-espace vectoriel normé.

Exemples 1.1 : normes N_1, N_2, N_∞

Les applications définies par : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$,

- $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$,
- $N_\infty(x) = \max_{1 \le i \le n}(|x_i|)$,

sont des normes dans $\mathbf{K}^n$.
Les applications définies par : $\forall f \in C^0([a,b],\mathbf{K})$,

- $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|.dt$,
- $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2.dt}$,
- $N_\infty(f) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$,

sont des normes sur $C^0([a,b],\mathbf{K})$.
Les normes N_2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant.

Définition 1.2 : distance

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit que d est une distance sur E si et seulement si :

- c'est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $(d(x,y) = 0) \Rightarrow (x = y)$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$,
- $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, (inégalité triangulaire).

Théorème 1.1 : distance associée à une norme

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et N une norme sur E.
L'application définie par : $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x - y)$, est une distance sur E, appelée distance associée (ou liée) à la norme N.

Définition 1.3 : normes équivalentes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, N et N' deux normes sur E.
On dit que N est équivalente à N' si et seulement si :
$\exists \alpha > 0$, $\exists \beta > 0$, tels que : $\forall x \in E$, $\alpha.N'(x) \le N(x) \le \beta.N'(x)$.

Théorème 1.3 : l'équivalence de normes est une relation d'équivalence

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence entre les normes de E.
On dit alors que deux normes sont équivalentes.

Exemples 1.4 : équivalence des normes N_1, N_2, N_∞ précédentes

Dans $\mathbf{K}^n$, on a les relations :

$N_\infty \leq N_1 \leq n.N_\infty$, et : $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n}.N_\infty$.

Dans $C^0([a,b],\mathbf{K})$, on a par ailleurs :

$N_1 \leq (b-a).N_\infty$, $N_2 \leq \sqrt{b-a}.N_\infty$, $N_1 \leq \sqrt{b-a}.N_2$, et pas de relation entre ces normes dans l'autre sens.

2. Suites dans un K-espace vectoriel normé.

Définition 2.1 : suite d'éléments d'un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

Une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de type $\{n_0, n_0+1, \ldots\}$) dans E.

On la note : $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x = (x_n)$, ou : $x = (x_n)_{n\geq n_0}$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou : $\forall n \geq n_0$), $x_n \in E$.

L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel.

Définition 2.2 : suite convergente ou divergente dans un K-espace vectoriel normé

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.

On dit que (x_n), suite d'éléments de E converge pour la norme N si et seulement si :

$\exists L \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(x_n - L) \leq \varepsilon$.

L est alors appelée limite de la suite (x_n) pour la norme N.

Si une suite ne converge pas pour la norme N, elle diverge pour cette norme.

Théorème 2.1 : unicité de la limite d'une suite convergente pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) converge pour la norme N, sa limite pour cette norme est unique, et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} {}_N\, x_n$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée.

Définition 2.3 : suite bornée pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

On dit que (x_n) est bornée pour la norme N si et seulement si :

$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, N(x_n) \leq M$.

Théorème 2.2 : suites bornées et normes équivalentes

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) est bornée pour N, elle est bornée pour toute norme équivalente à N.

Théorème 2.3 : la convergence entraîne le caractère borné

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) converge pour la norme N, (x_n) est bornée pour cette norme.

Théorème 2.4 : caractérisation séquentielle des normes équivalentes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

Soient N et N' deux normes sur E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\exists \alpha > 0$, $N' \leq \alpha.N$,
- toute suite d'éléments de E convergeant pour N converge pour N'.

De même, les propositions suivantes sont équivalentes :

- N et N' sont équivalentes,
- toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre.

Et par contraposée, il y a également équivalence entre les propositions suivantes :

- N et N' ne sont pas équivalentes,
- il existe une suite (x_n) d'éléments de E, convergente pour l'une des normes, divergente pour l'autre.

En conséquence, deux normes équivalentes de E définissent les mêmes suites d'éléments de E convergentes, qui convergent alors vers la même limite pour les deux normes.

Théorème 2.5 : structure d'espace vectoriel pour les suites convergentes pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.

L'ensemble des suites d'éléments de E convergentes pour la norme N forme un sous-espace vectoriel $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ du **K**-espace vectoriel $E^{\mathbf{K}}$.

L'application qui à une suite d'éléments de E convergente pour la norme N, fait correspondre la limite de cette suite pour cette norme, est une application linéaire de $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ dans E.
En particulier, on a donc :
$\forall ((x_n),(y_n)) \in (E^{\mathbf{K}}_{c,N})^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha.x_n + \beta.y_n) = \alpha.\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \beta.\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Définition 2.4 : suite négligeable devant une autre, suite dominée par une autre
Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.
Soit (u_n) une suite d'éléments de E, (α_n) et (β_n) deux suites réelles ou complexes.
On dira que :

- (u_n) est dominée par (α_n) pour la norme N, ce que l'on notera : $u_n = O(\alpha_n)$, en $+\infty$, si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $N(u_n) \leq M.|\alpha_n|$,
- (u_n) est négligeable devant (α_n) pour la norme N, ou : $u_n = o(\alpha_n)$, en $+\infty$, si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n.\varepsilon(n)$, avec : $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$,

  ce qui s'écrit encore, lorsque (α_n) est non nulle à partir d'un certain rang : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\alpha_n} = 0$,
- (α_n) est équivalente à (β_n) en $+\infty$, ou : $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \beta_n$, si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \beta_n.(1 + \varepsilon(n))$, avec : $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$,

  ce qui s'écrit encore, si β_n est non nulle à partir d'un certain rang : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$.

3. Exemple : espaces vectoriels normés de fonctions intégrables.

Théorème 3.1 : norme de la convergence en moyenne
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues par morceaux, intégrables de I dans **K**, forme un **K**-espace vectoriel.
L'ensemble des fonctions continues, intégrables de I dans **K** forme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$.
L'application $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$, définit une norme (de la convergence en moyenne) sur cet espace.

Théorème 3.2 : norme de la convergence en moyenne quadratique
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'ensemble E_2 des fonctions f continues sur I, telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I (dites de carré intégrable sur I) forme un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbf{K})$.
L'application $N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I |f|^2}$, définit une norme (de la convergence en moyenne quadratique) sur E_2.

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 4.1 et définition 4.1 : norme infinie attachée à une base dans un espace vectoriel de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
L'application qui à un vecteur : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.e_i$, de E fait correspondre : $N_{\infty,\mathscr{B}}(x) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$, est une norme sur E appelée norme infinie attachée à la base $\mathscr{B}$.
En conséquence, il est possible de définir une norme sur tout espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 4.2 : équivalence des normes dans les espaces vectoriels de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Théorème 4.3 : notions inchangées pour des normes équivalentes
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
Les notions suivantes ne nécessitent pas de préciser la norme utilisée :

- convergence ou divergence d'une suite d'éléments de E,
- limite d'une suite d'éléments de E convergente,
- suite d'éléments de E bornée.

Théorème 4.4 : lien entre la convergence d'une suite et celle de ses suites coordonnées dans une base de l'espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Soit (x_p) une suite d'éléments de E telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = \sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i$.

Alors la suite (x_p) converge dans E si et seulement si les n suites coordonnées $(x_{i,p})$ convergent dans **K**,

et dans ce cas, on a : $\lim_{p\to+\infty}(\sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i) = \sum_{i=1}^{n}(\lim_{p\to+\infty} x_{i,p}).e_i$.

Définition 4.2 : suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.

Une suite (x_n) d'éléments de E est une suite de Cauchy pour la norme N si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, N(x_n - x_p) \leq \varepsilon$.

Théorème 4.5 : toute suite convergente est une suite de Cauchy

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.

Toute suite d'éléments de E convergente pour la norme N est une suite de Cauchy pour la norme N.

Théorème 4.6 : convergence des suites de Cauchy dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, indépendance vis-à-vis de la norme choisie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.

La notion de suite de Cauchy est indépendante de la norme choisie dans E.

De plus, toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente.

On dit alors que l'espace est complet (ce qui correspond donc à un espace vectoriel normé dans le lequel toute suite qui est de Cauchy pour la norme est convergente pour cette norme).

5. Topologie métrique dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 5.1 : boule ouverte, boule fermée dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

Pour x_0 élément de E, et r réel strictement positif, on définit :

- la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r pour la norme N par :
  $B_N(x_0,r) = \{x \in E, N(x - x_0) < r\}$,
- la boule fermée de centre x_0 et de rayon r pour la norme N par :
  $B'_N(x_0,r) = \{x \in E, N(x - x_0) \leq r\}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme, on note simplement $B(x_0,r)$ et $B'(x_0,r)$.

Définition 5.2 : ouvert ou partie ouverte d'un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

On dit que Ω est un ouvert (ou une partie ouverte) de E pour la norme N si et seulement si :

- $\forall a \in \Omega, \exists r > 0, B(a,r) \subset \Omega$.

Définition 5.3 : fermé ou partie fermée d'un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

On dit que F est un fermé (ou une partie fermée) de E pour la norme N si et seulement si son complémentaire dans E est un ouvert de E pour la norme N.

Théorème 5.1 : ouverts et fermés dans des espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.

Les notions d'ouverts et de fermés dans E ne dépendent pas de la norme choisie dans E.

Théorème 5.2 : union et intersection d'ouverts et de fermés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.

- une réunion quelconque d'ouverts de E reste un ouvert de E.

- l’intersection d’un nombre fini d’ouverts de E est encore un ouvert de E, mais pas nécessairement si le nombre d’ouverts concernés devient infini.
- une intersection quelconque de fermés de E reste un fermé de E.
- la réunion d’un nombre fini de fermés de E est encore un fermé de E, mais pas nécessairement si le nombre de fermés concernés par la réunion devient infini.

Définition 5.4 : point intérieur à une partie dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E.
On dit qu’un élément a de E est intérieur à A si et seulement si :

- $\exists\, r > 0$, $B(a,r) \subset A$.

Définition 5.5 : point adhérent à une partie dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E.
On dit qu’un élément a de E est adhérent à A si et seulement si :

- $\forall\, r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$.

Théorème 5.3 : point intérieur ou adhérent et normes équivalentes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie et A une partie quelconque de E.
La notion de point intérieur à A ou adhérent à A ne dépend pas de la norme choisie dans E.
De plus, tout point de A est adhérent à A et tout point intérieur à A est élément de A.

Théorème 5.4 : caractérisation séquentielle des points adhérents

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.
Alors un élément x de E est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d’éléments de A qui converge vers x.

Théorème 5.5 : caractérisation séquentielle des fermés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.
A est un fermé de E si et seulement si, pour tout suite d’éléments de A convergente, sa limite appartient à A.

Définition 5.6 : partie bornée d’un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E.
On dit que A est bornée pour la norme N si et seulement si :

- $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$, $\forall\, x \in A$, $N(x) \leq M$.

Définition 5.7 : partie compacte ou compact d’un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E.
On dit que A est une partie compacte ou un compact de E pour la norme N si et seulement si A est une partie à la fois fermée et bornée pour la norme N.

Théorème 5.6 : compact dans des espaces vectoriels de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
La notion de partie bornée ou de partie compacte est indépendante de la norme choisie dans E.

Théorème 5.7 : Bolzano-Weierstrass

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et soit A un compact de E.
De toute suite d’éléments de A, il est possible d’extraire une suite convergente vers un élément de A.