Espaces Vectoriels Normés.

1. Normes, distances.

Exemples 1.1 : normes N_1, N_2, N_∞

Les applications définies par : $\forall$ x = $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$,

- $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$,
- $N_\infty(x) = \max_{1\le i\le n}(|x_i|)$,

sont des normes dans $\mathbf{K}^n$.

Les applications définies par : $\forall$ f $\in C^0([a,b],\mathbf{K})$,

- $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|.dt$,
- $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2.dt}$,
- $N_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$,

sont des normes sur $C^0([a,b],\mathbf{K})$.

Les normes N_2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant.

Démonstration :

Commençons par les normes dans $\mathbf{K}^n$.

• (N_1) Pour x dans $\mathbf{K}^n$, $N_1(x)$ est défini est positif, comme une somme finie de réels positifs.
De plus, il est immédiat que : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_1(\lambda.x) = |\lambda|.N_1(x)$.
Puis : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, si : $N_1(x) = 0$, alors : $\forall 1 \le i \le n$, $0 \le |x_i| \le N_1(x) = 0$, donc : $|x_i| = 0$, puis : x = 0.
Enfin : $\forall (x,y) \in (\mathbf{K}^n)^2$, $\forall 1 \le i \le n$, $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$, d'où en sommant : $N_1(x + y) \le N_1(x) + N_1(y)$.

• (N_∞) De même, pour x dans $\mathbf{K}^n$, $N_\infty(x)$ est correctement défini puisque c'est le plus grand élément d'un nombre fini de réels positifs, qui est donc lui-même un réel positif.
Puis : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall 1 \le i \le n$, $|x_i| \le N_\infty(x)$, donc : $|\lambda.x_i| = |\lambda|.|x_i| \le |\lambda|.N_\infty(x)$,
et puisque tous les termes sont majorés par une même constante, on en déduit que : $N_\infty(\lambda.x) \le |\lambda|.N_\infty(x)$.
Si ensuite, λ est nul, l'égalité cherchée est immédiate, et si λ est non nul, alors :

$N_\infty(x) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.x\right) \le \frac{1}{|\lambda|}.N_\infty(\lambda.x)$, et on obtient ainsi une deuxième inégalité, puis l'égalité voulue.

D'autre part : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, si : $N_\infty(x) = 0$, alors : $\forall 1 \le i \le n$, $0 \le |x_i| \le N_\infty(x) = 0$, donc : $|x_i| = 0$, puis : x = 0.
Enfin : $\forall (x,y) \in (\mathbf{K}^n)^2$, $\forall 1 \le i \le n$, $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le N_\infty(x) + N_\infty(y)$,
et tous les termes étant majorés par une même constante, on en déduit que : $N_\infty(x + y) \le N_\infty(x) + N_\infty(y)$.

• (N_2) Pour x dans $\mathbf{K}^n$, comme précédemment, $N_2(x)$ est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}^+$.
Il est également clair que : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_2(\lambda.x) = |\lambda|.N_2(x)$.
De même : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, si : $N_2(x) = 0$, alors : $\forall 1 \le i \le n$, $0 \le |x_i|^2 \le N_2(x)^2 = 0$, d'où : $|x_i| = 0$, et : x = 0.
Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique (hermitien dans $\mathbb{C}^n$) défini dans $\mathbb{R}^n$ par : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$.
Cette inégalité donne : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|(x|y)| \le N_2(x).N_2(y)$.
On peut alors en déduire que :
$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $N_2(x+y)^2 = N_2(x)^2 + 2.(x|y) + N_2(y)^2 \le N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2.N_2(x).N_2(y) = (N_2(x) + N_2(y))^2$,
et l'inégalité triangulaire en découle.
Pour la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou dans le cas de $\mathbb{C}^n$, on pourra se reporter au chapitre « Produit Scalaire ».
Puis on examine le cas des normes dans : E = $C^0([a,b],\mathbf{K})$.

• (N_1) Pour f dans E, |f| est continue sur [a,b] à valeurs réelles positives, donc son intégrale sur [a,b] existe et est un réel positif.
Puis, pour : f $\in$ E, si : $N_1(f) = 0$, alors |f| étant continue et positive sur [a,b], |f| est nulle, donc f aussi.
Ensuite : $\forall f \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_1(\lambda.f) = |\lambda|.N_1(f)$, du fait de la linéarité de l'intégrale sur [a,b].

Enfin : $\forall$ (f,g) $\in$ E^2, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$, et en intégrant sur [a,b] : $N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.
• (N_∞) Pour f dans E, |f| est continue et à valeurs réelles sur [a,b], donc elle y admet un sup dans $\mathbb{R}^+$.
Puis, pour : f $\in$ E, $\lambda \in$ **K**, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|\lambda.f(t)| = |\lambda|.|f(t)| \leq |\lambda|.N_\infty(f)$,
et puisque la fonction est majorée sur [a,b] par une constante, on en déduit que : $N_\infty(\lambda.f) \leq |\lambda|.N_\infty(f)$.
Si ensuite λ est nul, l'égalité cherchée est immédiate et si λ est non nul, alors :

$N_\infty(f) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.f\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}.N_\infty(\lambda.f)$, et on obtient ainsi une deuxième inégalité, puis l'égalité voulue.

Enfin : $\forall$ (f,g) $\in$ E^2, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$,
et la fonction étant majorée sur [a,b] par une constante, on en déduit que : $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
• (N_2) Pour f dans E, comme précédemment, $N_2(f)$ est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}^+$.
La linéarité de l'intégrale sur [a,b] donne encore : $\forall$ f $\in$ E, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $N_2(\lambda.f) = |\lambda|.N_2(f)$.
Avec des arguments identiques à ceux utilisés pour N_1, il est clair que : $\forall$ f $\in$ E, $(N_2(f) = 0) \Rightarrow (f = 0)$.
Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise là encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique (et hermitien dans $C^0([a,b],\mathbb{C})$) défini par : $\forall$ (f,g) $\in$ $C^0([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \int_a^b f.g$.
La démonstration de l'inégalité est alors formellement identique à celle faite pour la norme N_2 dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2 : distance associée à une norme
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et N une norme sur E.
L'application définie par : $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, $d(x,y) = N(x - y)$, est une distance sur E, appelée distance associée (ou liée) à la norme N.

Démonstration :
Les différents points se démontrent sans difficulté :
• d est bien une application de E$\times$E dans $\mathbb{R}^+$,
• pour : (x,y) $\in$ E^2, $(d(x,y) = 0) \Rightarrow (N(x - y) = 0) \Rightarrow (x - y = 0) \Rightarrow (x = y)$,
• pour : (x,y) $\in$ E^2, $d(y,x) = N(y - x) = N(-(x - y)) = |-1|.N(x - y) = N(x - y)$,
• pour : (x,y,z) $\in$ E^3, $d(x,z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leq N(x - y) + N(y - z) = d(x,y) + d(y,z)$.

Théorème 1.3 : l'équivalence de normes est une relation d'équivalence
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence entre les normes de E.
On dit alors que deux normes sont équivalentes.

Démonstration :
Soient trois normes N, N' et N'' sur E.
La relation est :
• réflexive : avec les constantes : $\alpha = \beta = 1 > 0$, on a bien : $\forall$ x $\in$ E, $\alpha.N(x) \leq N(x) \leq \beta.N(x)$,
• symétrique : s'il existe : $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tels que : $\forall$ x $\in$ E, $\alpha.N'(x) \leq N(x) \leq \beta.N'(x)$, alors en notant :
$\alpha' = \frac{1}{\beta} > 0$, et : $\beta' = \frac{1}{\alpha} > 0$, on a bien : $\forall$ x $\in$ E, $\alpha'.N(x) \leq N'(x) \leq \beta'.N(x)$,
• transitive : s'il existe : $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$, tels que :
$\forall$ x $\in$ E, $\alpha.N'(x) \leq N(x) \leq \beta.N'(x)$, et : $\alpha'.N''(x) \leq N'(x) \leq \beta'.N''(x)$, alors en notant :
$\alpha'' = \alpha.\alpha' > 0$, $\beta'' = \beta.\beta' > 0$, on a bien : $\forall$ x $\in$ E, $\alpha''.N''(x) \leq N(x) \leq \beta''.N''(x)$.

Exemples 1.4 : équivalence des normes N_1, N_2, N_∞ précédentes
Dans $\mathbf{K}^n$, on a les relations :
$N_\infty \leq N_1 \leq n.N_\infty$, et : $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n}.N_\infty$.
Dans $C^0([a,b],\mathbf{K})$, on a par ailleurs :
$N_1 \leq (b - a).N_\infty$, $N_2 \leq \sqrt{b-a}.N_\infty$, $N_1 \leq \sqrt{b-a}.N_2$, et pas de relation entre ces normes dans l'autre sens.

Démonstration :
• $\forall$ x = $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $N_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \leq N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n.N_\infty(x)$, et : $N_\infty(x)^2 \leq N_2(x)^2 \leq n.N_\infty(x)^2$.
• $\forall$ f $\in$ $C^0([a,b],\mathbf{K})$, $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|.dt \leq (b - a).\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$, et : $N_2(f)^2 = \int_a^b |f(t)|^2.dt \leq (b - a).\left(\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\right)^2$.
Enfin, l'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée à f et à la fonction constante égale à 1 donne :

$\forall$ f $\in C^0([a,b],\mathbf{K})$, $N_1(f)^2 = \left(\int_a^b 1.|f(t)|.dt\right)^2 \le \left(\int_a^b |f(t)|^2.dt\right).\left(\int_a^b 1.dt\right) = (b-a).N_2(f)^2$.

2. Suites dans un K-espace vectoriel normé.

Théorème 2.1 : unicité de la limite d'une suite convergente pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) converge pour la norme N, sa limite pour cette norme est unique, et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty\, N} x_n$, ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde et supposons que (x_n) admette deux limites L et L' distinctes pour la norme N.

Si on pose alors : $\varepsilon = \frac{1}{3}.N(L - L') > 0$, (puisque : $L - L' \neq 0$), alors :

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \ge n_0$, $N(x_n - L) \le \varepsilon$, et : $\exists\, n'_0 \in \mathbb{N}$, $N(x_n - L') \le \varepsilon$.

Donc pour : $N = \max(n_0, n'_0)$, on a : $N(x_N - L) \le \varepsilon$, et : $N(x_N - L') \le \varepsilon$.

Mais alors : $N(L - L') \le N((L - x_n) + (x_n - L')) \le N(x_n - L) + N(x_n - L') \le 2.\varepsilon = \frac{2}{3}.N(L - L')$,

ce qui est impossible puisque $N(L - L')$ est supposé être un réel strictement positif.

Théorème 2.2 : suites bornées et normes équivalentes

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) est bornée pour N, elle est bornée pour toute norme équivalente à N.

Démonstration :

Supposons donc que N et N' sont deux normes équivalentes dans E et que (x_n) est une suite d'éléments de E, bornée pour la norme N.

Alors : $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \le M$.

Or : $\exists\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $\alpha.N' \le N \le \beta.N'$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N'(x_n) \le M/\beta$, et comme : $M/\beta \in \mathbb{R}^+$, cela montre que (x_n) est bornée pour N'.

Théorème 2.3 : la convergence entraîne le caractère borné

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.

Si (x_n) converge pour la norme N, (x_n) est bornée pour cette norme.

Démonstration :

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de E pour la norme N vers L.

Alors, pour : $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un rang n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \ge n_0$, $N(x_n - L) \le \varepsilon$.

On a donc, à l'aide de l'inégalité triangulaire : $\forall\, n \ge n_0$, $N(x_n) \le N(L) + N(x_n - L) \le \varepsilon + N(L)$.

En posant : $M = \max(N(x_0), \dots, N(x_{n_0-1}), \varepsilon + N(L))$, on a alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \le M$.

Théorème 2.4 : caractérisation séquentielle des normes équivalentes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

Soient N et N' deux normes sur E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\exists\, \alpha > 0$, $N' \le \alpha.N$,
- toute suite d'éléments de E convergeant pour N converge pour N'.

De même, les propositions suivantes sont équivalentes :

- N et N' sont équivalentes,
- toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre, vers la même limite.

Et par contraposée, il y a également équivalence entre les propositions suivantes :

- N et N' ne sont pas équivalentes,
- il existe une suite (x_n) d'éléments de E, convergente pour l'une des normes, divergente pour l'autre.

En conséquence, deux normes équivalentes de E définissent les mêmes suites d'éléments de E convergentes, qui convergent alors vers la même limite pour les deux normes.

Démonstration :

1. • [$\Rightarrow$]

Soit (x_n) une suite d'éléments de E, convergente pour la norme N vers L.

Alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(x_n - L) \leq \varepsilon/\alpha$.
Donc : $\forall n \geq n_0, N'(x_n - L) \leq \alpha.\varepsilon/\alpha = \varepsilon$, et la suite (x_n) converge pour N' (vers la même limite L).

- [$\Leftarrow$]

Travaillons alors par contraposée et supposons que : $\forall n > 0, \exists x_n \in E, N'(x_n) > n.N(x_n)$.

Posons alors : $x'_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}.N(x_n)}$, ce qui est possible, puisque l'inégalité précédente montre que : $x_n \neq 0$.

Alors (x'_n) tend vers 0 pour N car : $N(x'_n - 0) = N\left(\dfrac{x_n}{\sqrt{n}.N(x_n)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, qui tend bien vers 0,

et (x'_n) ne converge par pour N' car elle n'est pas bornée pour cette norme.

En effet : $\forall n > 0$, $N'(x'_n) = N'\left(\dfrac{x_n}{\sqrt{n}.N(x_n)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}.\dfrac{N'(x_n)}{N(x_n)} > \sqrt{n}$.

On vient donc de mettre en évidence une suite (x'_n) qui converge pour N et pas pour N'.
2. La deuxième équivalence est en fait la première utilisée deux fois. En effet :

- si N et N' sont équivalentes : $\exists \alpha > 0, \beta > 0, N' \leq \dfrac{1}{\alpha}.N$, et $N \leq \beta.N'$, qui montre que toute suite d'éléments de E convergeant pour l'une des normes converge pour l'autre (vers la même limite, vu la démonstration précédente).
- si toute suite d'éléments de E, convergeant pour l'une des normes converge pour l'autre, on peut trouver β et β', strictement positifs, tels que : $N \leq \beta.N'$, et : $N' \leq \beta'.N$, ce qui prouve l'équivalence de ces normes en posant : $\alpha = 1/\beta'$.

3. Comme indiqué, cette troisième équivalence est la contraposée de la précédente.

Théorème 2.5 : structure d'espace vectoriel pour les suites convergentes pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.
L'ensemble des suites d'éléments de E convergentes pour la norme N forme un sous-espace vectoriel $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ du **K**-espace vectoriel $E^{\mathbf{K}}$.
L'application qui à une suite d'éléments de E convergente pour la norme N, fait correspondre la limite de cette suite pour cette norme, est une application linéaire de $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ dans E.
En particulier, on a donc :

$\forall ((x_n),(y_n)) \in (E^{\mathbf{K}}_{c,N})^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2, \lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha.x_n + \beta.y_n) = \alpha.\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \beta.\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Démonstration :

Soient donc (x_n) et (y_n) deux suites convergeant respectivement vers L_x et L_y, et : $\alpha \in \mathbf{K}^*$.
Alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_x, N(x_n - L_x) \leq \varepsilon/2$, et : $\exists n_y \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_y, N(y_n - L_y) \leq \varepsilon/2$.
Donc en posant : $n_0 = \max(n_x, n_y)$, on a bien :

$\forall n \geq n_0, N((x_n + y_n) - (L_x + L_y)) \leq N(x_n - L_x) + N(y_n - L_y) \leq \varepsilon$,

et la suite $((x_n) + (y_n))$ converge vers $[L_x + L_y]$ pour la norme N.
Puis : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, N(x_n - L_x) \leq \varepsilon/|\alpha|$, et donc : $\forall n \geq n_0\ N(\alpha.x_n - \alpha.L_x) \leq \varepsilon$,
et la suite $\alpha.(x_n)$ converge vers $\alpha.L_x$ pour la norme N.
Considérons enfin l'ensemble $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ des suites d'éléments de E, convergeant pour la norme N.
Cet ensemble est inclus dans $E^{\mathbb{N}}$, est non vide puisque la suite nulle converge vers 0 pour toute norme de E et on vient de montrer qu'il était stable par combinaison linéaire.
C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui à un élément de $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$ associe sa limite pour la norme N est bien une application linéaire de $E^{\mathbf{K}}_{c,N}$, comme on vient de le montrer.

3. Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables.

Théorème 3.1 : norme de la convergence en moyenne

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues par morceaux, intégrables de I dans **K**, forme un **K**-espace vectoriel.
L'ensemble des fonctions continues, intégrables de I dans **K** forme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$.
L'application $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$, définit une norme (de la convergence en moyenne) sur cet espace.

Démonstration :

L'ensemble $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$.
En effet, il est bien inclus dedans, il est non vide puisque la fonction nulle de I dans **K** est bien continue par morceaux et intégrable sur I.
Enfin, il est stable par combinaison linéaire, en utilisant une majoration.
De même, le deuxième ensemble proposé (notons le E_1) est bien inclus dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$, il est non vide, et stable également par combinaison linéaire, avec : $\forall (f,g) \in E_1^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $|\lambda.f + \mu.g| \leq |\lambda|.|f| + [\mu|.|g|$.
Puis dans E_1, la fonction proposée est bien une norme.
En effet, elle y est correctement définie (puisque toutes les fonctions sont intégrables sur I), et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Le théorème 1.6 montre que : $\forall f \in E_1$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_1(\lambda.f) = |f|.N_1(f)$.
L'inégalité triangulaire découle de la majoration : $\forall (f,g) \in E_1^2$, $|f + g| \leq |f| + |g|$.
Enfin, la continuité et la positivité donne : $\forall f \in E_1$, $(N_1(f) = 0) \Rightarrow (f = 0)$, grâce à la continuité de f sur I.

Théorème 3.2 : norme de la convergence en moyenne quadratique

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'ensemble E_2 des fonctions f continues sur I, telles que $|f|^2$ soit intégrable sur I (dites de carré intégrable sur I) forme un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbf{K})$.
L'application $N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I |f|^2}$, définit une norme (de la convergence en moyenne quadratique) sur E_2.

Démonstration :

L'ensemble E_2 est bien un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbf{K})$.
En effet, il est inclus dedans, il est non vide (la fonction nulle de I dans **K** est de carré intégrable sur I).
Enfin, pour : $\lambda \in \mathbf{K}$, $f \in E_2$, $\lambda.f$ est bien de carré intégrable sur I, et :

$\forall (f,g) \in E_2^2$, $|f.g| \leq \frac{1}{2}.(|f|^2 + |g|^2)$, ce qui entraîne : $|f + g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2.\mathrm{Re}(f.\bar{g}) \leq |f|^2 + |g|^2 + 2.|f.g|$.

Donc pour tout couple (f,g) d'éléments de E_2, la somme est encore élément de E_2 puisque de carré intégrable sur I, par majoration.
Par ailleurs, l'application N_2 est correctement définie, de E_2 dans $\mathbb{R}^+$, et il est clair que :
- $\forall f \in E_2$, $(N_2(f) = 0) \Rightarrow (f = 0)$, avec les mêmes arguments que précédemment, car $|f|^2$ est continue et positive sur I,
- $\forall f \in E_2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_2(\lambda.f) = |\lambda|.N_2(f)$.

Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on commence par démontrer que :
- pour tout segment : $J = [a,b] \subset I$, $\forall (f,g) \in E_2^2$, $\left|\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2.dt\right).\left(\int_a^b |g(t)|^2.dt\right)$.

Pour cela, soient : $(f,g) \in E_2^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi : x \mapsto \int_a^b |f(t) + x.e^{i.\alpha}.g(t)|^2.dt$.
On peut commencer par remarquer que : $\forall (\alpha,x) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) \geq 0$, vu son expression, puis on peut développer cette expression pour obtenir :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_a^b (|f(t)|^2 + x.e^{i.\alpha}g(t).\overline{f(t)} + x.e^{-i.\alpha}.f(t).\overline{g(t)} + x^2.|g(t)|^2).dt$, et finalement :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2.\int_a^b |g(t)|^2.dt + x.[e^{i.\alpha}.\int_a^b g(t).\overline{f(t)}.dt + e^{-i.\alpha}.\int_a^b f(t).\overline{g(t)}).dt] + \int_a^b |f(t)|^2.dt$.

Distinguons alors deux cas :

si : $\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt = 0$, l'inégalité annoncée est vraie,

et sinon, on peut poser : $\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt = \rho.e^{i.\beta}$, en utilisant module et argument.

On fixe alors : $\alpha = -\beta$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2.\int_a^b |g(t)|^2.dt + 2.x.\rho + \int_a^b |f(t)|^2.dt$,

autrement dit, φ est une expression polynomiale de degré au plus 2.
Là encore, deux sous-cas se présentent :
- si : $\int_a^b |g(t)|^2.dt = 0$, alors, φ est de degré au plus 1, et étant toujours positive sur $\mathbb{R}$, φ est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui se traduit par : $\rho = 0$, ou : $\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt = 0$, ce qui donne à nouveau l'inégalité annoncée.

• si : $\int_a^b |g(t)|^2.dt \neq 0$, φ est donc un polynôme du second degré qui n'admet au plus qu'une racine réelle. Son discriminant est donc négatif ou nul, ce qui s'écrit encore : $\rho^2 \leq \left(\int_a^b |g(t)|^2.dt\right).\left(\int_a^b |f(t)|^2.dt\right)$.

Encore une fois, c'est bien l'inégalité annoncée.

Finalement : $N_2(f+g)^2 = \int_a^b |f(t)+g(t)|^2.dt = \int_a^b [|f(t)|^2 + |g(t)|^2 + \overline{f(t)}.g(t) + f(t).\overline{g(t)}].dt$, ou encore :

$N_2(f+g)^2 = \int_a^b |f(t)|^2.dt + \int_a^b |g(t)|^2.dt + 2.\mathrm{Re}\left(\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt\right) \leq \int_a^b |f(t)|^2.dt + \int_a^b |g(t)|^2.dt + 2.\left|\int_a^b \overline{f(t)}.g(t).dt\right|$, et

enfin : $N_2(f+g)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2.dt + \int_a^b |g(t)|^2.dt + 2.\sqrt{\left(\int_a^b |f(t)|^2.dt\right).\left(\int_a^b |g(t)|^2.dt\right)} = N_2(f)^2 + N_2(g)^2 + 2.N_2(f).N_2(g)$.

On conclut enfin par l'inégalité triangulaire pour la norme N_2 sur [a,b].
Ce résultat étant valable sur tout segment inclus dans I, les intégrales de plus convergeant sur I, on peut l'étendre aux intégrales sur I, par passage à la limite pour (éventuellement) les deux bornes.

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 4.1 et définition 4.1 : norme infinie attachée à une base dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

L'application qui à un vecteur : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, de E fait correspondre : $N_{\infty,\mathscr{B}}(x) = \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$, est une norme sur E appelée norme infinie attachée à la base $\mathscr{B}$, et notée N_∞ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base.

Démonstration :

Elle est formellement identique à celle qui établit que N_∞ est une norme dans $\mathbf{K}^n$.

Théorème 4.2 : équivalence des normes dans les espaces vectoriels de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration (hors programme) :

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E et N_∞ la norme infinie sur E attachée à cette base.
On va montrer que toute norme N sur E est équivalente à N_∞.
Soit donc N une norme sur E, $\|\ .\ \|_\infty$ la norme infinie dans $\mathbf{K}^n$, et : $S^1 = \{x \in \mathbf{K}^n, \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| = 1\}$.

Notons par ailleurs ν l'application de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\forall x = (x_1,\ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $\nu(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i\right)$.

• On constate pour commencer que : $\forall x \in \mathbf{K}^n$, $\nu(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.N(e_i) \leq \beta.\|x\|_\infty$, et : $\forall x \in S^1$, $\nu(x) \leq \beta$,

avec : $\beta = \sum_{i=1}^{n} N(e_i) > 0$, puisque N est une norme sur E et que les e_i sont non nuls.

• D'autre part, ν est une fonction à valeurs positives ou nulles, donc elle admet une borne inférieure α sur S^1 (donc le plus petit des minorants de ν sur S^1) qui est positive ou nulle.
Supposons que : $\alpha = 0$.

Alors pour tout entier : $p > 0$, $\frac{1}{p}$ n'est pas un minorant de ν sur S^1 et : $\exists x_p \in S^1$, $\nu(x_p) \leq \frac{1}{p}$.

Considérons maintenant les suites coordonnées de la suite (x_p) données par : $\forall p \geq 1$, $x_p = (x_{1,p}, \ldots, x_{n,p})$.
Ces suites coordonnées sont bornées (puisque : $\forall p \geq 1$, $x_p \in S^1$), donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_{1,p})$ une suite $(x_{1,\varphi_1(p)})$ convergeant vers une limite a_1.

Mais la suite $(x_{2,\varphi_1(p)})$ étant aussi bornée, on peut en extraire une suite $(x_{2,\varphi_2 o \varphi_1(p)})$, elle-même convergeant vers une limite a_2.

Et comme $(x_{1,\varphi_2 o \varphi_1(p)})$ est elle-même extraite de $(x_{1,\varphi_1(p)})$, elle reste convergente de limite a_1.

On recommence ainsi, de proche en proche jusqu'à la n-ième suite coordonnée, à extraire des suites de

(x_p), pour aboutir à une fonction φ, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (composée de toutes les fonctions qui permettent d'extraire, à chaque étape, des suites des précédentes), telle que toutes les suites coordonnées $(x_{i,\varphi(p)})$ convergent chacune vers une limite a_i.

De plus : $\forall\ p \geq 1$, $(\|x_p\|_\infty = 1) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} |x_{i,p}| \geq 1) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} |x_{i,\varphi(p)}| \geq 1)$, et à la limite, on obtient : $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \geq 1$ (*).

Montrons maintenant que : $\nu(a) = \nu((a_1, \ldots, a_n)) = 0$. Pour cela :

$$\forall\ p \geq 1,\ \nu(a) = \nu(a - x_{\varphi(p)} + x_{\varphi(p)}) \leq \nu(a - x_{\varphi(p)}) + \nu(x_{\varphi(p)}) \leq \beta.\|a - x_{\varphi(p)}\|_\infty + \frac{1}{\varphi(p)} \leq \beta.\sum_{i=1}^{n} |a_i - x_{i,\varphi(p)}| + \frac{1}{\varphi(p)}.$$

Si on fait alors tendre p vers $+\infty$, on constate que : $\nu(a) \leq 0$, et comme ν est à valeurs positives : $\nu(a) = 0$.

Or : $(\nu(a) = 0) \Rightarrow (N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.e_i\right) = 0) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i.e_i = 0) \Rightarrow (\forall\ 1 \leq i \leq n,\ a_i = 0) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 0)$.

Cette contradiction avec (*) montre finalement que : $\alpha > 0$.

- Enfin pour x dans E, non nul, avec : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, notons : $x' = (x_1, \ldots, x_n)$.

Alors : $\frac{1}{\|x'\|_\infty}.x' \in S^1$, donc : $\alpha \leq \nu\left(\frac{1}{\|x'\|_\infty}.x'\right) = \frac{1}{\|x'\|_\infty} N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i\right) = \frac{1}{N_\infty(x)}.N(x) \leq \beta$.

On en déduit pour conclure que : $\alpha.N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta.N_\infty(x)$, qui reste évidemment valable pour : $x = 0$.
Donc en utilisant le fait que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence, toutes les normes sur E sont équivalentes entre elles.

Théorème 4.3 : notions inchangées pour des normes équivalentes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
Les notions suivantes ne nécessitent pas de préciser la norme utilisée :
- convergence ou divergence d'une suite d'éléments de E,
- limite d'une suite d'éléments de E convergente,
- suite d'éléments de E bornée.

Démonstration :

Il suffit bien entendu de remarquer que toutes les normes dans un tel espace sont équivalentes.

Théorème 4.4 : lien entre la convergence d'une suite et celle de ses suites coordonnées dans une base de l'espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base : $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Soit (x_p) une suite d'éléments de E telle que : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $x_p = \sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i$.

Alors la suite (x_p) converge dans E si et seulement si les n suites coordonnées $(x_{i,p})$ convergent dans **K**, et dans ce cas, on a : $\lim_{p\to+\infty}(\sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i) = \sum_{i=1}^{n}(\lim_{p\to+\infty} x_{i,p}).e_i$.

Démonstration :

- $[\Rightarrow]$

Si (x_p) converge vers : $L = \sum_{i=1}^{n} L_i.e_i$, pour la norme N_∞ attachée à la base $\mathcal{B}$, alors :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ p_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ p \geq p_0,\ \max_{1\leq i\leq n}(|x_{i,p} - L_i|) \leq \varepsilon, \text{ et donc : } \forall\ 1 \leq i \leq n,\ |x_{i,p} - L_i| \leq \varepsilon.$$

Donc toutes les suites $(x_{i,p})$ convergent respectivement vers L_i.

- $[\Leftarrow]$

Si chaque suite $(x_{i,p})$ converge vers L_i, alors : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ p_i \in \mathbb{N}$, $\forall\ p \geq p_i$, $|x_{i,p} - L_i| \leq \varepsilon$.
Il est alors clair que, en notant : $p_0 = \max(p_1, \ldots, p_n)$, $\forall\ p \geq p_0$, $N_\infty(x_p - L_i) \leq \varepsilon$,
puisque la norme infinie d'un élément de E est la plus grande de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, et qu'ici elles sont toutes majorées par ε, pour : $p \geq p_0$.

Théorème 4.5 : toute suite convergente est une suite de Cauchy
Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.
Toute suite d'éléments de E convergente pour la norme N est une suite de Cauchy pour la norme N.

Démonstration :
Supposons que (x_n) converge vers L pour la norme N.
Alors : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ n \geq n_0, N(x_n - L) \leq \varepsilon/2$.
Donc : $\forall\ n \geq n_0, \forall\ p \geq n_0, N(x_n - x_p) = N((x_n - L) + (L - x_p)) \leq N(x_n - L) + N(x_p - L) \leq \varepsilon$.

Théorème 4.6 : convergence des suites de Cauchy dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, indépendance vis-à-vis de la norme choisie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
La notion de suite de Cauchy est indépendante de la norme choisie dans E.
De plus, toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente.
On dit alors que l'espace est complet (ce qui correspond donc à un espace vectoriel normé dans le lequel toute suite qui est de Cauchy pour la norme est convergente pour cette norme).

Démonstration :
• Soit donc N et N' deux normes de E, et (x_p) une suite de Cauchy pour la norme N.
Alors en particulier : $\exists\ \alpha > 0, \alpha.N' \leq N$, et : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ p_0 \in \mathbb{N}, \forall\ p \geq p_0, \forall\ q \geq p_0, N(x_p - x_q) \leq \alpha.\varepsilon$.
Donc : $\forall\ p \geq p_0, \forall\ q \geq p_0, N'(x_p - x_q) \leq \varepsilon$, et (x_p) est de Cauchy pour la norme N'.
• Utilisons alors une base $\mathscr{B}$ de E, et N_∞ la norme infinie attachée à cette base.
Soit (x_p) une suite de Cauchy d'éléments de E (pour la norme N_∞ en particulier).
Alors : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ p_0 \in \mathbb{N}, \forall\ p \geq p_0, \forall\ q \geq p_0, N_\infty(x_p - x_q) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_{i,p} - x_{i,q}|) \leq \varepsilon$,
et toutes les suites $(x_{i,p})$ convergent, puisque ce sont des suites de Cauchy dans $\mathbf{K}^n$.
Mais dans ce cas, (x_p) est convergente, comme l'a vu précédemment.

5. Topologie métrique dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 5.1 : ouverts et fermés dans des espaces vectoriels normés de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
Les notions d'ouverts et de fermés dans E ne dépendent pas de la norme choisie dans E.

Démonstration :
• Soit Ω un ensemble ouvert de E pour la norme N, et soit N' une autre norme dans E.
Alors N' est équivalente à N, et : $\exists\ \beta > 0, N \leq \beta.N'$.
Montrons que Ω est ouvert pour N', et pour cela, soit : $a \in \Omega$.
Il existe alors : $r > 0, B_N(a,r) \subset \Omega$. On constate alors que $B_{N'}(a,r/\beta) \subset \Omega$.
En effet : $\forall\ x \in B_{N'}(a,r/\beta), N'(x - a) < r/\beta$, donc : $N(x - a) \leq \beta.N'(x - a) < r$, et : $x \in B_N(a,r)$, donc : $x \in \Omega$.
Conclusion : $\forall\ a \in \Omega, \exists\ r' = r/\beta > 0, B_{N'}(a,r') \subset \Omega$, et Ω est bien ouvert pour la norme N'.
• Soit maintenant un fermé F pour la norme N.
Alors son complémentaire dans E est un ouvert pour cette norme donc pour toute autre norme de E, et le complémentaire de ce complémentaire, c'est-à-dire F, est fermé pour ces autres normes.

Théorème 5.2 : union et intersection d'ouverts et de fermés
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
- une réunion quelconque d'ouverts de E reste un ouvert de E.
- l'intersection d'un nombre fini d'ouverts de E est encore un ouvert de E.
- une intersection quelconque de fermés de E reste un fermé de E.
- la réunion d'un nombre fini de fermés de E est encore un fermé de E.

Démonstration :
Puisque toutes les normes sont équivalentes dans E, on fixe une norme N quelconque sur E.
• Soient $(\Omega_i)_{i\in I}$ des ouverts de E, et soit : $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$.
Alors : $\forall\ x \in \Omega, \exists\ i \in I, x \in \Omega_i$, donc : $\exists\ r_i > 0, B(x,r_i) \subset \Omega_i$, et donc : $B(x,r_i) \subset \Omega$, car : $\Omega_i \subset \Omega$.
Donc Ω est bien un ouvert de E.
• Soit $(\Omega_i)_{1\leq i\leq n}$, une famille finie d'ouverts de E, et : $\Omega = \bigcap\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$.
Alors : $\forall\ x \in \Omega, \forall\ 1 \leq i \leq n, \forall\ r_i > 0, B(x,r_i) \subset \Omega_i$.

En posant : $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, qui appartient à $\mathbb{R}^{+*}$, et puisque : $\forall\ 1 \le i \le n$, $(r \le r_i) \Rightarrow (B(x,r) \subset B(x,r_i))$, on en déduit que : $\forall\ 1 \le i \le n$, $B(x,r) \subset \Omega_i$, donc finalement : $B(x,r) \subset \Omega$, et Ω est bien un ouvert de E.

• Soient $(F_i)_{i\in I}$ des fermés de E, et soit : $F = \bigcap_{i\in I} F_i$.

Alors : $\forall\ i \in I$, $\Omega_i = C_E F_i$, est un ouvert de E, et : $C_E F = C_E\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E F_i = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, est un ouvert de E comme réunion d'ouverts de E, donc F comme complémentaire d'un ouvert de E est un fermé de E.

• De même, soit $(F_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie de fermés de E, et : $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

Alors : $\forall\ 1 \le i \le n$, $\Omega_i = C_E F_i$, est un ouvert de E et : $C_E F = C_E\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} C_E F_i = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$, est un ouvert de E comme intersection finie d'ouverts de E donc F est un fermé de E.

Théorème 5.3 : point intérieur ou adhérent à une partie d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie et A une partie quelconque de E.
La notion de point intérieur à A ou adhérent à A ne dépend pas de la norme choisie dans E.
De plus, tout point de A est adhérent à A et tout point intérieur à A est élément de A.

Démonstration :

Soit N deux normes sur E, donc pour lesquelles : $\exists\ \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha.N' \le N \le \beta.N'$.

• Soit a un point intérieur à A pour la norme N.
Alors : $\exists\ r > 0$, $B_N(a,r) \subset A$
Dans ce cas, la boule $B_{N'}(a,r/\beta)$ est incluse dans A, car :
$\forall\ x \in B_{N'}(a,r/\beta)$, $N'(x - a) \le r/\beta$, donc : $N(x - a) \le \beta.N'(x - a) < r$, et : $x \in A$.
Finalement, a est bien intérieur à A pour la norme N'.

• De même, si a est adhérent à A, alors : $\forall\ r > 0$, $B_N(a,r) \cap A \ne \emptyset$.
Or pour : $r > 0$, $B_N(a,r.\alpha)$ est incluse dans $B_{N'}(a,r)$ car : $\forall\ x \in B_N(a,r.\alpha)$, $N(x - a) \le r.\alpha$, et : $N'(x - a) \le r$.
Donc $[B_{N'}(a,r) \cap A]$ contient $[B_N(a,r.\alpha) \cap A]$ qui est non vide puisque a est adhérent à A et $[B_{N'}(a,r) \cap A]$ est également non vide.
Finalement, a est adhérent à A pour la norme N'.

• Ensuite, il est clair que : $\forall\ a \in A$, $\forall\ r > 0$, $a \in [B(a,r) \cap A]$ et cette intersection est donc toujours non vide, ce qui montre bien que tout élément de A est adhérent à A.

• Enfin, pour tout point intérieur à A, on peut trouver : $r > 0$, tel que : $B(a,r) \subset A$.
Or a lui-même est dans cette boule (pour tout rayon r), donc : $a \in A$.

Théorème 5.4 : caractérisation séquentielle des points adhérents

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.
Alors un élément x de E est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration :

• [$\Rightarrow$]
Si x est adhérent à A, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $B(x,2^{-n}) \cap A \ne \emptyset$, et donc : $\exists\ x_n \in A$, $N(x_n - x) < 2^{-n}$.
Il est clair que (x_n) est alors une suite d'éléments de A qui converge (pour la norme N) vers x.

• [$\Leftarrow$]
Si (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x (pour la norme N), alors :
$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \ge n_\varepsilon$, $N(x_n - x) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$, et : $B(x,\varepsilon) \cap A \ne \emptyset$, car x_{n_ε} est dans cette intersection.

Théorème 5.5 : caractérisation séquentielle des fermés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.
A est un fermé de E si et seulement si, pour tout suite d'éléments de A convergente, sa limite appartient à A.

Démonstration :

Travaillons par double implication et contraposées.

• [$\Rightarrow$]
Si A n'est pas fermé, en notant Ω son complémentaire dans E, Ω n'est pas ouvert et donc :
$\exists\ a \in \Omega$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $B(a,2^{-n}) \not\subset \Omega$, donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ x_n \in B(a,2^{-n}) \cap A$.

La suite (x_n) est alors une suite d'éléments de A qui converge vers a, limite qui n'appartient pas à A.
• [$\Leftarrow$]
Si maintenant (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers a, élément du complémentaire Ω de A dans E, alors a montre que Ω n'est pas un ouvert de E (donc que A n'est pas fermé). En effet :
$\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N}, 2^{-n} \le r$, et : $B(a,r) \not\subset \Omega$, puisque : $B(a,r) \subset B(a,2^{-n})$, cette dernière boule contenant x_n qui est dans A donc pas dans Ω.

Théorème 5.6 : compact dans des espaces vectoriels de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
La notion de partie bornée ou de partie compacte est indépendante de la norme choisie dans E.

Démonstration :
La notion de fermé et de partie bornée dans E est invariante par changement de norme équivalente.

Théorème 4.7 : Bolzano-Weierstrass
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et soit A un compact de E.
De toute suite d'éléments de A, il est possible d'extraire une suite convergente vers un élément de A.

Démonstration :
Soit donc (x_p) une suite d'éléments de A, et $(x_{i,p})$ les suites coordonnées de (x_p) dans une base $\mathscr{B}$ de E.
La suite $(x_{1,p})$ est bornée (car A l'est), donc on peut en extraire une suite convergente $(x_{1,\varphi_1(p)})$ vers a_1.
Puis $(x_{2,\varphi_1(p)})$ est également bornée, donc on peut en extraire une suite convergente $(x_{2,\varphi_2 o \varphi_1(p)})$ vers a_2.
Mais $(x_{1,\varphi_2 o \varphi_1(p)})$, extraite elle-même d'une suite convergente reste convergente vers a_1.
On recommence ce procédé jusqu'à obtenir une fonction strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que : $\forall\ 1 \le k \le n$, $(x_{k,\varphi(p)})$ converge vers a_k.
Mais alors la suite $(x_{\varphi(p)})$ converge vers un élément a de E, et comme A est fermé, on conclut à : $a \in A$.