Séries entières (corrigé des indispensables).

Calcul de rayons de convergence.

1. a. On commence par poser : ∀ x ∈ ℝ*, ∀ n ∈ ℕ, $u_n = \frac{(3.n)!}{(n!)^3.n^n}.x^n$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(3.n+3)!}{(3.n)!}.\frac{(n!)^3}{(n+1)!^3}.\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.|x| = \frac{(3.n+3).(3.n+2).(3n.+1)}{(n+1)^3}.\frac{1}{n+1}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.|x|.$$

Les trois termes tendent respectivement vers 27, 0, et $\frac{1}{e}$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$.

Donc la série numérique converge pour tout x suivant la règle de d'Alembert et : R = +∞.

b. On pose de même : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ*, $u_n = \frac{n^4+n}{2^n+\sqrt{n!}}.x^n$, et : $\frac{n^4+n}{2^n+\sqrt{n!}}.x^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^4}{\sqrt{n!}}.x^n$.

Puis : ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{n^4}.\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}.|x| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4.\frac{1}{\sqrt{n+1}}.|x|$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$.

Donc la série numérique converge pour tout x, et : R = +∞.

c. On pose de même : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ*, $u_n = (\sqrt[3]{n})^{2.n}.x^n$.

Alors : ∀ n ∈ ℕ*, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(\sqrt[3]{n+1})^{2.n+2}}{(\sqrt[3]{n})^{2.n}}.|x| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2.n}{3}}.\sqrt[3]{n+1}.|x|$, et comme la première parenthèse tend vers $e^{\frac{2}{3}}$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$.

La série numérique ne converge donc jamais, si : x ≠ 0, et : R = 0.

d. Pour : n ∈ ℕ, et : x ∈ ℝ*, on pose : $u_n = \frac{x^{3.n}}{n^2+1}$, et : ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}.|x|^3$.

Cette quantité tend vers $|x|^3$ en +∞, et on en déduit que : R = 1, puisque c'est la valeur charnière entre absolue convergence de la série et divergence grossière (d'après la règle de d'Alembert).

e. Pour : n ∈ ℕ, et : x ∈ ℝ*, on pose : $u_n = \frac{3^n}{4^n+n}.x^{4.n}$, et : ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{3^{n+1}.(4^n+n)}{3^n.(4^{n+1}+n+1)}.|x|^4$.

Cette quantité tend vers $\frac{3}{4}.|x|^4$, et on en déduit que : R = $\sqrt{\frac{4}{3}}$, puisque c'est la valeur charnière entre absolue convergence de la série et divergence grossière (d'après la règle de d'Alembert).

f. Pour : x ∈ ℝ, n ∈ ℕ, on pose : $u_n = \frac{x^{2^n}}{3^n+1}$, puis : ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)}.|x|^{2^{n+1}-2^n}$, et si :

- |x| < 1, la quantité précédente tend vers : 0 < 1, et la série converge absolument,
- |x| = 1, la quantité précédente tend vers : $\frac{1}{3} < 1$, et la série converge absolument,
- |x| > 1, la quantité précédente tend vers +∞, et la série diverge grossièrement.

Donc : R = 1.

2. a. On commence par utiliser un développement limité pour écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1} = n.\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - n.\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left[1+\frac{1}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right] = \frac{1}{2}+o(1).$$

Donc le terme général est équivalent à $\frac{1}{2}$ en +∞, et la série entière a même rayon de convergence que

$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}.x^n$, c'est à dire 1.

b. On utilise là encore un développement limité avec :

$$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}.\left(1+\frac{1}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sqrt{n}+\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\text{, et :}$$

$$e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}=e^{\sqrt{n}}.\left(e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1\right)=e^{\sqrt{n}}.\left(\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{\sqrt{n}}}{2.\sqrt{n}}.$$

Puis, en notant : ∀ x ∈ ℝ*, ∀ n ∈ ℕ*, $u_n=\frac{e^{\sqrt{n}}}{2.\sqrt{n}}.x^n$, on a : ∀ n ∈ ℕ*, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}.\frac{2.\sqrt{n}}{2.\sqrt{n+1}}.|x|$.

Or : ∀ n ∈ ℕ*, $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$, donc : $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|$.

Donc le rayon de convergence de cette série vaut 1.

c. De même : $\sqrt{n^2+3.n+1}=n.\left(1+\frac{3}{2.n}+\frac{1}{2.n^2}-\frac{9}{8.n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=n+\frac{3}{2}-\frac{5}{8.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \tan(\pi.\sqrt{n^2+3.n+1}).x^n=\tan\left(n.\pi+\frac{3.\pi}{2}-\frac{5.\pi}{8.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).x^n=\frac{1}{\tan\left(\frac{5.\pi}{8.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.x^n,$$

et donc : $\tan(\pi.\sqrt{n^2+3.n+1}).x^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{8.n}{5.\pi}.x^n$.

La règle de d'Alembert montre alors que le rayon de convergence de la série est 1.

3. a. On constate immédiatement que : ∀ n ∈ ℕ, |cos(n)| ≤ 1, donc le rayon de convergence de la série entière est supérieur à celui de la série $\sum z^n$, donc : R ≥ 1.

   b. Supposons que la suite (cos(n)) converge vers 0.

   Alors : ∀ n ∈ ℕ, $\cos(n+1)=\cos(n).\cos(1)-\sin(n).\sin(1)$, et : $\sin(n)=\frac{\cos(n).\cos(1)-\cos(n+1)}{\sin(1)}$, ce qui montre que la suite (sin(n)) tend aussi vers 0.

   Or c'est impossible puisque : ∀n ∈ ℕ, $\sin^2(n)+\cos^2(n)=1$.

   Pour mémoire, on a démontré que les deux suites (cos(n)) et (sin(n)) étaient divergentes.

   c. On vient donc d'établir que la série entière était divergente pour : x = 1.

   Le rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1, et finalement : R = 1.

   d. Il y a divergence grossière en 1, donc aussi en : z ∈ ℂ, tel que : |z| = 1.

   La série entière diverge donc en tout point du bord du disque de convergence.

4. La valeur z_0 n'est pas à l'intérieur du disque de convergence puisque dans cette zone, il y a absolue convergence de la série entière.
   De même, z_0 ne peut être à l'extérieur du disque fermé de convergence puisque dans cette zone, il y a divergence grossière de la série.
   Conclusion : R = $|z_0|$.

5. Notons R_λ le rayon de convergence de la nouvelle série entière.
   Pour : |λ.z| < R, alors la série $\sum a_n.(\lambda.z)^n$ est absolument convergente, donc : $|z|\leq R_\lambda$.

   On en déduit que : $[0,\frac{R}{|\lambda|}[\subset[0,R_\lambda]$, et : $\frac{R}{|\lambda|}\leq R_\lambda$.

   De même, pour : $|z| < R_\lambda$, alors la série $\sum\lambda^n.a_n.z^n$ est absolument convergente, donc : |λ.z| ≤ R.

   On en déduit de même que : $[0,R_\lambda[\subset[0,\frac{R}{|\lambda|}]$, et : $R_\lambda\leq\frac{R}{|\lambda|}$.

Finalement : $R_\lambda = \dfrac{R}{|\lambda|}$.

Propriété de sommes de séries entières.

6. a. Le rayon de convergence de la série entière est donné par la règle de d'Alembert et il vaut 1.
   De plus, en : x = ±1, la série est absolument convergente, donc elle y est convergente.
   Finalement : $\mathscr{D}_S$ = [-1,+1].

   b. On constate que les théorèmes classiques ne donnent rien sur l'intervalle fermé.
   Néanmoins, on remarque que tous les monômes constituant la série sont continus sur [-1,+1], et :
   ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈ [-1,+1], $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$,
   ce qui donne la convergence normale de la série de fonctions sur [-1,+1].
   Donc S est continue sur $\mathscr{D}_S$.

   c. Les théorèmes classiques montrent que S est de classe C^∞ sur]-1,+1[, puisque le rayon de convergence de la série vaut 1.

   d. Pour montrer que S est dérivable en -1, on constate que :
   - la série de fonctions converge simplement sur [-1,0],
   - toutes les fonctions de la série sont de classe C^1 sur [-1,0],
   - la série des dérivées converge uniformément sur [-1,0] car :

   ∀ x ∈ [-1,0], la série des dérivées en x, $\sum_{n\ge1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :
   ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈ [-1,+1], $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{x^{k-1}}{k}\right| \le \left|\dfrac{x^n}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$,
   ce qui garantit la convergence uniforme annoncée.
   Donc S est dérivable en -1, et : $S'(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

7. a. Puisque : $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la règle de d'Alembert donne la rayon de convergence de la série entière définie avec les équivalents trouvés qui est 1 et le rayon de la série entière de départ est aussi 1.
   Pour: x = 1, la série entière diverge puisqu'elle est à termes positifs et : $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Pour : x = -1, la série est alternée et vérifie le critère spécial puisque :
   - la suite $\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).(-1)^n\right)$, est alternée,
   - la suite $\left(\left|\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).(-1)^n\right|\right) = \left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, tend vers 0 en décroissant car :

   ∀ n ≥ 1, $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le 1$, et sinus est croissante sur [0,1].
   Donc la série entière converge en -1, et finalement : $\mathscr{D}_S$ = [-1,+1[.

   b. S est continue sur]-1,+1[comme série entière.
   Puis pour : x ∈ [-1,0], la série $\sum_{n\ge1}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right).x^n$ est convergente et vérifie le critère spécial des séries alternées, donc : ∀ n ∈ ℕ*, $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right).x^k\right| \le \left|\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right).x^{n+1}\right| \le \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,
   ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions sur [-1,0].
   Comme de plus tous les monômes constituant la série sont continus sur [-1,0], la somme de la série (c'est-à-dire S), est continue sur [-1,0], et donc finalement sur [-1,+1[.,

c. Pour: 0 ≤ x < 1, on a : $(1-x).S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).x^{n+1}$, soit :

$$(1-x).S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right).x^n=\sin(1).x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right].x^n.$$

d. La dernière série (entière) qui apparaît converge normalement sur [0,1], car :

$\forall$ x $\in$ [0,1], $\forall$ n ≥ 2, $\left|\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right].x^n\right|\le\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$.

La série majorante étant télescopique et convergente, on en déduit bien que la nouvelle série entière (notons S_1 sa somme) converge normalement sur [0,1], et donc y est continue, en particulier en 1.

Finalement : $\lim_{\substack{x\to1\\<}}(1-x).S(x)=\sin(1)+\lim_{\substack{x\to1\\<}}S_1(x)=\sin(1)+S_1(1)=\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]$.

D'où : $\lim_{\substack{x\to1\\<}}(1-x).S(x)=\sin(1)+\left(\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\right)=\sin(1)-\sin(1)=0$.

8. a. Pour : (p,q) $\in \mathbb{N}^2$, q ≥ 1, on a : $I(p,q)=\int_0^1 t^p.(1-t)^q.dt=\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}.(1-t)^q\right]_0^1+\frac{q}{p+1}.\int_0^1 t^{p+1}.(1-t)^{q-1}.dt$.

Donc : $I(p,q)=\frac{q}{p+1}.I(p+1,q-1)$, et par récurrence :

$$I(p,q)=\frac{q!}{(p+1)...(p+q)}.I(p+q,0)=\frac{q!}{(p+1)...(p+q)}.\int_0^1 t^{p+q}.dt=\frac{q!}{(p+1)...(p+q+1)}=\frac{p!.q!}{(p+q+1)!},$$

formule valable aussi pour : q = 0.

b. On a donc en particulier : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $a_n=I(n,n)=\frac{n!^2}{(2.n+1)!}$.

Soit maintenant : x $\in \mathbb{R}^*$, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n=a_n.x^n$.

Alors : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(2.n+1)!}{(2.n+3)!}.\frac{(n+1)!^2}{n!^2}.|x|=\frac{(n+1)^2}{(2.n+3).(2.n+2)}.|x|$, qui tend vers $\frac{|x|}{4}$.

Donc le rayon de convergence de la série entière proposée est : R = 4.

c. La formule de Stirling montre que : $\frac{n!^2}{(2.n+1)!}.4^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\pi.n.2^{2.n}}{(2.n+1)^{2.n+1}.e^{-2.n-1}.\sqrt{2.\pi.(2.n+1)}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2.\sqrt{n}}$,

et donc la série diverge en 4, puisqu'à termes positifs.
En -4, la série est alternée et son terme général tend vers 0 (avec l'(équivalent précéent).

De plus, avec la notation de la question B, pour : x = 4, on a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\frac{4.(n+1)^2}{(2.n+3).(2.n+2)}=\frac{(2.n+2)}{(2.n+3)}<1$, et

la série vérifie donc le critère spécial des séries alternées : elle est donc convergente.
Finalement : $\mathcal{D}_S$ = [-4,+4[.

9. a. Notons M un majorant de |S| sur]-1,+1[.

Alors : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall$ x $\in$ [0,1[, $0\le\sum_{k=0}^{n}a_k.x^k\le\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.x^k=S(x)\le M$,

la première majoration venant du fait que les a_k sont positifs.
Puis il est possible de faire tendre x vers 1 (dans la somme partielle) et on en déduit que :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $0\le\sum_{k=0}^{n}a_k.x^k\le M$.

Enfin, la série $\sum a_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge.

b. La fonction S, comme somme (même infinie) de fonctions croissantes, est croissante sur [0,1[.
De plus, S est majorée : donc S admet une limite finie en 1 qu'on notera L (et : L ≤ M).

c. On peut écrire :

$\forall$ x $\in$ [0,1[, $\forall$ n $\in$ ℕ, $0 \le \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k \le \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.x^k = S(x)$, et donc quand x tend vers 1, on en déduit que :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $0 \le \sum_{k=0}^{n} a_k \le L$, puis en faisant tendre n vers +∞, on conclut que : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \le L$.

Puis : $\forall$ x $\in$ [0,1[, $\forall$ k $\in$ ℕ, $a_k.x^k \le a_k$, et puisque les deux séries sont convergentes : $S(x) \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Enfin, on peut faire tendre x vers 1 pour obtenir : $L \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Finalement, par double inégalité que : $L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Utilisation de séries entières.

10. a. Pour tout x dans ℝ, on a : $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$, d'où : $1-\cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\frac{x^{2.n}}{(2.n)!}$, et :

$\forall$ x $\in$ ℝ*, $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\frac{x^{2.n-2}}{(2.n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n}}{(2.n+2)!}$.

Enfin, cette égalité est encore vérifiée pour : x = 0, donc elle est vérifiée sur ℝ et f est bien développable en série entière sur ℝ.

b. Puisque f coïncide sur ℝ avec une série entière (de rayon de convergence infini), f est donc de classe C^∞ sur ℝ.

c. On sait qu'une série entière se primitive terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc ici, en notant F la primitive de f qui s'annule en 0, on a donc :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+2)!.(2.n+1)}$, puisque la série proposée s'annule bien en 0.

11. a. Pour : t $\in$ [0,1[, et : a > 0, on a : $\left|-t^a\right| < 1$, et donc : $\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.t^{a.n}$.

b. Notons : $\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n(t) = (-1)^n.t^{a.n}$.

La série de fonctions converge normalement sur tout segment [0,x], pour : 0 ≤ x < 1.

En effet : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ t $\in$ [0,x], $|u_n(t)| = \left|t^a\right|^n \le \left|x^a\right|^n$, et comme : $0 \le |x|^a < 1$, la série majorante est bien convergente.

Donc : $\forall$ x $\in$ [0,1[, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n.t^{a.n}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+a.n}.x^{a.n+1}$.

On constate bien que la fonction proposée admet une primitive sur [0,1[qui s'exprime sous forme de série de fonctions.

Montrons maintenant que cette série de fonctions (qu'on notera $\sum_{n\ge0} v_n$) est en fait définie sur [0,1] et qu'elle y converge uniformément.

Pour cela, pour tout : x $\in$ [0,1], la série $\sum_{n\ge0} v_n(x)$, est alternée et vérifie le critère spécial car :

- la suite $\left(\frac{(-1)^n}{1+a.n}.x^{a.n+1}\right)$, est alternée et tend vers 0 (car : a > 0, et : 0 ≤ x^a ≤ 1),
- la suite $\left(\frac{x^{a.n+1}}{1+a.n}\right)$, est décroissante comme le produit de deux suites positives décroissantes.

Donc : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ x $\in$ [0,1], $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+a.k}.x^{a.k+1}\right| \le \frac{x^{a.(n+1)+1}}{1+a.(n+1)} \le \frac{1}{1+a.(n+1)}$,

ce qui garantit que la série converge uniformément sur [0,1] (donc en particulier simplement).

c. Notons : ∀ t ∈ [0,1[, $f(t)=\dfrac{1}{1+t^a}$, et F la primitive précédente, définie sur [0,1].

Alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \int_0^x \frac{dt}{1+t^a} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} F(x) = F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n.a}$.

d. On applique le résultat précédent pour : a = 1, 2 et 3 et :

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2.n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3.n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$.

On utilise alors une décomposition en éléments simples et :

∀ t ∈ [0,1], $\displaystyle\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+t} - \frac{1}{3}.\frac{t-2}{t^2-t+1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+t} - \frac{1}{6}.\frac{2.t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

On peut ainsi primitiver et obtenir : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}.\ln(1+x) - \frac{1}{6}.\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.(\arctan\left(\frac{2.x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6})$.:

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3.n+1} = \frac{1}{3}.\ln(2) + \frac{\pi}{3.\sqrt{3}}$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

12. a. On peut commencer par écrire : $\displaystyle\frac{x^2+x+3}{x^2-1} = 1 + \frac{5}{2}.\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2}.\frac{1}{x+1}$,

et donc : ∀ x ∈]-1,+1[, $\displaystyle\frac{x^2+x+3}{x^2-1} = 1 - \frac{5}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.x^n = -3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+3.(-1)^n}{2} x^n$,

et puisque la dernière série diverge pour : x = ±1, son rayon de convergence est 1 et son intervalle de convergence est]-1,+1[.

b. Ici on commence par distinguer les valeurs de θ suivantes :

- θ = 0 (2.π), qui conduit à : $\displaystyle\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Cette fonction est la dérivée de $\dfrac{1}{1-x}$, et : ∀ x ∈]-1,+1[, $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^n$.

- θ = π (2.π), qui conduit cette fois à : $\displaystyle\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$, et cette fonction est cette fois la

dérivée de $\dfrac{-1}{1+x}$, donc : ∀ x ∈]-1,+1[, $\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.(n+1).x^n$.

- Pour les autres valeurs, on va écrire : $\displaystyle\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1} = \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\left(\frac{1}{x-e^{i.\theta}} - \frac{1}{x-e^{-i.\theta}}\right)$,

puis, pour : |x| < 1, on a : $\displaystyle\frac{1}{x-e^{i.\theta}} = \frac{-1}{e^{i.\theta}}.\frac{1}{1-x.e^{-i.\theta}} = \frac{-1}{e^{i.\theta}}.\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.n.\theta} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.(n+1).\theta}$,

et avec le même résultat pour la conjuguée, on a :

∀ x ∈]-1,+1[, $\displaystyle\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1} = \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{-i.(n+1).\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.e^{i.(n+1).\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1).\theta)}{\sin(\theta)} x^n$.

L'intervalle de convergence est finalement]-1,+1[, car la suite (sin(n+1).θ) diverge.

13. a. Cette première fonction f est définie et dérivable sur ℝ, et : ∀ x ∈ ℝ, $f'(x) = \dfrac{2.x+1}{x^2+x+1}$.

On peut alors décomposer en : $\dfrac{2.x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2} = -\dfrac{1}{j}.\dfrac{1}{1-j^2.x} - \dfrac{1}{j^2}.\dfrac{1}{1-j.x}$.

Donc : ∀ x ∈]-1,+1[, $f'(x) = -\dfrac{1}{j}.\sum_{n=0}^{+\infty}(j^2.x)^n - \dfrac{1}{j^2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(j.x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(j^{2.n+2} + j^{n+1}).x^n$.

Enfin : ∀ n ∈ ℕ, $j^{n+1} + j^{2.n+2} = e^{i.(n+1).\frac{2.\pi}{3}} + e^{-i.(n+1).\frac{2.\pi}{3}} = 2.\cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right)$.

Donc : $f'(x) = -2.\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right).x^n$, puis : ∀ x ∈]-1,+1[, $f'(x) = 0 - 2.\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1).\dfrac{2.\pi}{3}\right).\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

b. Pour cette fonction g, on a : ∀ x ∈]-1,+1[, $g'(x) = \dfrac{2.\tan(\alpha)}{(1-x)^2 + (1+x)^2.\tan^2(\alpha)} = \dfrac{\sin(2.\alpha)}{x^2 - 2.x.\cos(2.\alpha) + 1}$, et

on distingue deux cas :

- α = 0, auquel cas la fonction g est nulle,
- α ≠ 0, et l'exercice 12.b donne : ∀ x ∈]-1,+1[, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1).2.\alpha)x^n$, soit finalement :

∀ x ∈]-1,+1[, $g(x) = \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1).2.\alpha)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

c. La dérivée ici de la fonction h proposée est : ∀ x ∈ ℝ, $h'(x) = sh(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x^2)^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4.n+2}}{(2.n+1)!}$.

Donc : ∀ x ∈ ℝ, $h(x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4.n+3}}{(2.n+1)!.(4.n+3)}$.

14. On peut donc linéariser les fonctions proposées :

∀ x ∈ ℝ, $\sin^3(x) = \left(\dfrac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2.i}\right)^3 = \dfrac{-1}{8.i}.(e^{3.i.x} - 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x} - e^{-3.i.x}) = \dfrac{3}{4}.\sin(x) - \dfrac{1}{4}.\sin(3.x)$.

On en déduit que :

∀ x ∈ ℝ, $\sin^3(x) = \dfrac{3}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!} - \dfrac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{(3.x)^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3^{2.n+1}}{4}\right).\dfrac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}$.

De même : ∀ x ∈ ℝ, $\cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{i.x} + e^{-i.x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}.(e^{3.i.x} + 3.e^{i.x} + 3.e^{-i.x} + e^{-3.i.x}) = \dfrac{1}{4}.\cos(3.x) + \dfrac{3}{4}.\cos(x)$,

et : ∀ x ∈ ℝ, $\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{(3.x)^{2.n}}{(2.n)!} + \dfrac{3}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{x^{2.n}}{(2.n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\left(\dfrac{3^{2.n}}{4} + \dfrac{3}{4}\right).\dfrac{x^{2.n}}{(2.n)!}$.

15. 1a. On commence par calculer le rayon de convergence de la série à l'aide de la règle de d'Alembert, et on obtient : R = 1, avec divergence grossière en ±1.

Puis : ∀ n ∈ ℕ, $n^2 + n + 1 = n.(n-1) + 2.n + 1$, et:

∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1).x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}n.(n-1).x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty}n.x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).x^n + 2.\sum_{n=1}^{+\infty}n.x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$.

D'où : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1).x^n = x^2.\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + 2.x.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + \left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}$.

b. A nouveau on commence par déterminer le rayon de convergence de la série qui est 1, toujours avec la règle de d'Alembert, et divergence grossière en ±1.

Puis : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right).x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = x.\sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} + \ln(1-x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x)$.

c. On commence à nouveau avec le rayon de convergence, qui vaut encore 1 et il y a à nouveau divergence grossière en ±1.

Puis : $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+(-1)^n).x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.x^n + 1 = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x} + 1$.

16. a. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence (qui vaut 1) et il y a divergence grossière en ±1.

Puis : ∀ n ∈ ℕ, $\frac{n^2+3.n+4}{n+1} = (n+2) + \frac{2}{n+1}$, d'où :

∀ x ∈]-1,+1[, x ≠ 0, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3.n+4}{n+1}.x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2).x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n + 2.\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{2}{x}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

et : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3.n+4}{n+1}.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - 2.\frac{\ln(1-x)}{x}$.

Enfin, pour : x = 0, la fonction initiale vaut 4, ce qui correspond à la limite de la somme trouvée en 0.

b. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (avec la règle de d'Alembert), et il y a absolue convergence en ±1.

Puis : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n}$, car les deux séries convergent.

Soit : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} - x$, et finalement :

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.x^n}{n.(n-1)} = (x+1).\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} - x = (x+1).\ln(1+x) - x$, pour : x ∈]-1,+1[.

Enfin, pour : x = -1, la série vaut : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$, soit la limite de la fonction somme précédente en -1.

Et pour : x = 1, la série vaut : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} - 1 = 2.\ln(2) - 1$,

soit encore la limite de la fonction somme précédente, cette fois en 1.

17. Posons : ∀ x ∈ ℝ, $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n.(n-1)}$.

Le rayon de convergence de cette série entière s'obtient rapidement avec la règle de d'Alembert, et : R= 1.

Puis : ∀ n ≥ 2, $\frac{1}{n.(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$, et : ∀ x ∈]-1,+1[, $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n.(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$,

car les deux nouvelles séries ont même rayon de convergence que la première.

On en déduit que : ∀ x ∈]-1,+1[, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + x = (x-1).\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + x = -(x-1).\ln(1-x) + x$.

Finalement : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1).2^n} = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$.

Autour de l'exponentielle complexe.

18. La série exponentielle converge pour tout nombre complexe.

Donc : ∀(z,N) ∈ ℂ×ℕ, $\left|e^z - \sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - \sum_{n=0}^{N}\frac{|z|^n}{n!}$.

19. Posons : z = a + i.b, avec : (a,b) ∈ $ℝ^2$..

Alors : $(\sin(z) = 2) \Leftrightarrow (\frac{e^{i.z} - e^{-i.z}}{2.i} = 2) \Leftrightarrow (e^{2.i.z} - 4.i.e^{i.z} - 1 = 0)$.

Or les racines de : $x^2 - 4.i.x - 1 = 0$, sont : $(2 \pm \sqrt{3}).i$.

On remplace ainsi e$^{i.z}$ par : $e^{i.z} = e^{i.a}.e^{-b}$, et : $(2 \pm \sqrt{3}).i = e^{i.a}.e^{-b}$, est équivalent à :

- $e^{-b} = |e^{i.z}| = |(2 \pm \sqrt{3}).i| = 2 \pm \sqrt{3}$, soit : $b = -\ln(2 \pm \sqrt{3})$,
- $a = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$, avec : k ∈ $\mathbb{Z}$.

Finalement, les solutions de l'équation sont :

$z_k = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi - i.\ln(2 \pm \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \pm i.\ln(2 + \sqrt{3})$, k ∈ $\mathbb{Z}$, car : $(2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3}) = 1$.