Séries entières (corrigé des classiques).

Calcul de rayons de convergence.

20. a. Plusieurs méthodes ici.

On peut remarquer que si : x = $\frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ diverge grossièrement car ($a_{2.n+1}.x^{2.n+1}$) ne tend pas vers 0, et donc : $R \leq \frac{1}{2}$.

De plus : ∀ n ∈ ℕ, $|a_n| \leq 2^n$, et la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n.x^n$ a un rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$, d'où : $R \geq \frac{1}{2}$, et finalement : $R = \frac{1}{2}$.

b. On sait que : ∀ n ∈ ℕ, 0 ≤ a_n ≤ 10.

Or la série entière $\sum_{n\geq 0} 10.x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (série géométrique).

Donc le rayon de convergence R cherché vérifie : R ≥ 1.

De plus, pour : x = 1, la série diverge grossièrement.

En effet, si elle convergeait, cela signifierait que (a_n) tend vers 0, mais comme c'est une suite d'entiers, la suite devrait être stationnaire égale à 0.

Cela entraînerait que $\sqrt{2}$ est un nombre décimal donc rationnel, ce qui est faux.

Donc cette divergence en 1 montre que : R ≤ 1, et finalement : R = 1.

21. a. On peut commencer par étudier le coefficient de cette série :

∀ n ≥ 2, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2.\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n^2.\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-n-\frac{1}{2}+o(1)\right)$,

donc : $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$, et : ∀ n ≥ 2, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}}.|z| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|z|}{e}$, en notant : $u_n = (-1)^n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.z^n$.

Donc $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ tend vers $\frac{|z|}{e}$, et le rayon de convergence de la série est : R = e.

b. On applique directement ici la règle de d'Alembert, après avoir noté : ∀ n ∈ ℕ, $u_n = \frac{z^{n^2}}{n!}$, et :

∀ z ∈ ℂ*, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)!}.|z|^{(n+1)^2-n^2} = \frac{|z|^{2.n+1}}{n+1}$.

Donc cette dernière suite converge si et seulement si : |z| ≤ 1, et sa limite est alors nulle.

Plus précisément, la règle de d'Alembert montre que la série converge absolument si : |z| ≤ 1, et diverge grossièrement si : |z| > 1.

Donc : R = 1.

c. On commence par préciser le coefficient générique :

∀ n ∈ ℕ*, $\sum_{k=1}^{n} sh(k) = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} e^k - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{2}.\frac{1-e^n}{1-e} - \frac{1}{2}.\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.\frac{e^n}{e-1}$, d'où :

∀ n ∈ ℕ*, $\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} sh(k)}{n.e^n}.z^n\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n}.\frac{1}{e-1}$, et le rayon de convergence de la série entière vaut : R = 1.

d. On note tout d'abord que : ∀ n ∈ ℕ*, $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} \in [-1,0]$.

Puis φ : h ↦ $\arccos(1-h)$, est dérivable sur]0,1[, et sa dérivée vaut :

$\forall$ h $\in$]0,1[, $\varphi'(h) = -\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-h)^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2.h-h^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2.h}}.\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2.h}}.\left(1+\dfrac{h}{4}+o(h)\right)$, d'où :

$\varphi'(h) = \dfrac{1}{\sqrt{2.h}} + \dfrac{\sqrt{h}}{4.\sqrt{2}} + o(\sqrt{h})$, et : $\varphi(h) = \varphi(0) + 2.\dfrac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{3}.\dfrac{h^{\frac{3}{2}}}{4.\sqrt{2}} + o(h^{\frac{3}{2}}) = \sqrt{2.h} + \dfrac{h^{\frac{3}{2}}}{6.\sqrt{2}} + o(h^{\frac{3}{2}})$.

On en déduit que : $\forall$ n $\geq$ 2, $\arccos\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = \sqrt{2.\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, en $+\infty$.

Grâce à l'équivalent qu'on déduit de ce développement limité, on conclut que : R = 1.

e. On va distinguer deux cas, suivant la valeur de b, et utiliser la règle de d'Alembert.

On note pour cela : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}^*$, $u_n = \dfrac{a^n}{1+b^n}.z^n$.

- si : 0 < b $\leq$ 1, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^{n+1}}{a^n}.|z| = a.|z|$, et la limite de ce quotient conduit à : $R = \dfrac{1}{a}$,
- si : 1 < b, alors : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^{n+1}}{a^n}.\dfrac{b^n}{b^{n+1}}.|z| = \dfrac{a}{b}.|z|$, et la limite de ce quotient donne : $R = \dfrac{b}{a}$.

f. On va commencer par un développement limité du coefficient générique de cette série entière.
Pour cela :

$$a_n = \left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} = \exp\left(n^a.\ln\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n^a.\ln\left(1+\frac{1}{2.n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{n^{a-2}}{2}+o(n^{a-2})\right)\text{, en } +\infty.$$

Donc : $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}^*$, $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $|u_n| = \left|\left(ch\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^a}.z^n\right| = \exp\left(\dfrac{n^{a-2}}{2} + n.\ln(|z|) + o(n^{a-2})\right)$, en $+\infty$.

On distingue alors trois cas :

- si : a > 3, (u_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge toujours grossièrement, soit : R = 0,
- si : a = 3, on distingue alors deux sous-cas :

  si : $\dfrac{1}{2}+\ln(|z|) > 0$, la suite ($u_n$) tend vers $+\infty$ est la série diverge grossièrement,

  si : $\dfrac{1}{2}+\ln(|z|) < 0$, alors : $n^2.|u_n| = \exp\left(n.\left(\ln(|z|)+\dfrac{1}{2}\right)+2.\ln(n)+o(n)\right)$, tend vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.

  On en déduit dans ce cas que la valeur charnière est : $R = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

- si : a < 3, on distingue à nouveau deux sous-cas :

  si : $\ln(|z|) > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge grossièrement,

  si : $\ln(|z|) < 0$, alors : $n^2.|u_n| = \exp(n.\ln(|z|)+2.\ln(n)+o(n))$, tend vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.

  On en déduit dans ce dernier cas que : R = 1.

Produit de Cauchy.

22. a. La fonction proposée se développe en série entière sur]-1,+1[(donc avec un rayon de convergence égal à 1) et : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $S(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

b. Pour x dans]-1,+1[, la série entière converge absolument, donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge et : $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right).\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n.x^n$.

Si on note a_n le coefficient générique de la série S, alors : $\forall$ n $\in$ ℕ, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Autrement dit : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

c. La fonction : x $\mapsto$ $\frac{1}{(1-x)^2}$, étant la dérivée de la fonction de départ, on a aussi :

$\forall$ x $\in$]-1,+1[, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).x^n$, soit bien le résultat que l'on avait obtenu.

23. a. La fonction : x $\mapsto$ sh(x), est développable en série entière sur ℝ, et :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1}$.

Donc : $\forall$ x $\in$ ℝ, $sh^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.x^{2.n+2}$, avec :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)!}.\frac{1}{(2.(n-k)+1)!} = \frac{1}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n} \frac{(2.n+2)!}{(2.k+1)!.(2.n-2.k+1)!}$.

On reconnaît des coefficients binomiaux et : $\forall$ n $\in$ ℕ, $b_n = \frac{1}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{2.n+2}{2.k+1} = \frac{1}{2}.\frac{2^{2.n+2}}{(2.n+2)!}$,

puisque : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2.k} = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2.k+1} = 2^{n-1}$, avec :

- $\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2.k} + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2.k+1} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$, et :
- $\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2.k} - \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2.k+1} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p.\binom{n}{p} = (1-1)^n = 0$.

Donc : $\forall$ x $\in$ ℝ, $sh^2(x) = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2.n+2}}{(2.n+2)!}.x^{2.n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

b. Soit avec la trigonométrie hyperbolique, ou en revenant à une écriture en exponentielles, on a :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $sh^2(x) = \frac{1}{2}.(ch(2.x)-1) = \frac{1}{2}.\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.x)^{2.n}}{(2.n)!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

24. On peut commencer par écrire :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2.x)}{2} = \frac{1}{2}.\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{(2.x)^{2.n}}{(2.n)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{2^{2.n-1}.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

D'autre part, l'absolue convergence de la série entière du sinus sur ℝ, permet d'écrire :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $\sin^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^{2.n+1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.x^{2.n+2}$, à l'aide d'un produit de Cauchy,

et : $\forall$ n $\in$ ℕ, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2.k+1)!}.\frac{(-1)^{n-k}}{(2.n-2.k+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2.n+2)!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{2.n+2}{2.k+1}$.

L'unicité du développement en série entière de $\sin^2$ donne alors :

$\forall$ n $\geq$ 1, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2.n}{2.k+1} = (-1)^{n-1}.(2.n)!.b_{n-1} = (-1)^{n-1}.(2.n)!.(-1)^{n-1}.\frac{2^{2.n-1}}{(2.n)!} = 2^{2.n-1}$.

Propriété de sommes de séries entières.

25. a. La règle de d'Alembert donne le rayon de convergence de cette série qui vaut 1.

b. On part de $(1+x).S(x)$, qui donne : ∀ x ∈]-1,1[,

$$(1+x).S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n.\ln(n).x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n.\ln(n).x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n.\ln(n).x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\ln(n+1).x^n \text{ , ou :}$$

$$(1+x).S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.[\ln(n+1)-\ln(n)].x^n - \ln(1).x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n \text{ , d'où le résultat.}$$

c. Montrons que la série entière converge uniformément sur [0,1[.

Pour cela : ∀ x ∈ [0,1[, la série numérique $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n$ est alternée et vérifie le critère spécial (la valeur absolue du terme général décroît vers 0).

Donc : ∀ x ∈ [0,1[, ∀ N ∈ ℕ*, $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n\right| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right).|x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui entraîne la convergence uniforme de la série sur [0,1[.

De plus, chaque fonction constituant cette série a une limite en 1, et la série de ces limites converge (toujours par exemple avec le critère spécial).

Donc on peut intervertir limite et somme et :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = \frac{1}{2}.\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left((-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^n\right) = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

d. En revenant à des sommes partielles, on a :

∀ N ∈ ℕ*, $S_{2.N-1} = \sum_{n=1}^{2.N-1}(-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2.N-1}(-1)^{n+1}.\ln(n+1) - \sum_{n=1}^{2.N-1}(-1)^{n+1}.\ln(n)$, et en séparant termes pairs et impairs :

$$S_{2.N-1} = \sum_{p=1}^{N}\ln(2.p) - \sum_{p=1}^{N}\ln(2.p-1) + \sum_{p=1}^{N-1}\ln(2.p) - \sum_{p=1}^{N}\ln(2.p-1) = 2.\ln\left(\frac{2.4...(2.N)}{1.3...(2.N-1)}\right) - \ln(2.N),$$

puis : $S_{2.N-1} = 2.\ln\left(\frac{2^{2.N}.N!^2}{(2.N)!.\sqrt{2.N}}\right)$, et donc : $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = \frac{1}{2}.2.\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

26. a. Pour : |x| < R, on peut calculer :

$$(1-x).\sum_{k=0}^{n}S_k.x^k = \sum_{k=0}^{n}S_k.x^k - \sum_{k=0}^{n}S_k.x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}S_k.x^k - \sum_{k=1}^{n+1}S_{k-1}.x^k = S_0 - S_n.x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}a_k.x^k \text{ ,}$$

et donc : $S_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k.x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k.x^k = \sum_{k=0}^{n}a_k.x^k = (1-x).\sum_{k=0}^{n}S_k.x^k + x.S_n.x^n$.

Mais si : |x| < R, alors $\sum_{n\geq 0}S_n.x^n$ converge (et en particulier $(S_n.x^n)$ tend vers 0.

Donc $\sum_{k=0}^{n}a_k.x^k$ a une limite finie quand n tend vers +∞, et la série $\sum_{n\geq 10}a_n.x^n$ converge.

Donc: [0,R[⊂ [0,1], et : R ≤ 1.

b. Pour : |x| < 1, la série $\sum_{n\geq 0}a_n.x^n$ est absolument convergente, donc :

∀ n ∈ ℕ, $\left|S_n.x^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}a_k.x^n\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|a_k.x^n\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|a_k.x^k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left|a_k.x^k\right|$, et la suite $(S_n.x^n)$ est bien bornée.

Le lemme d'Abel permet d'en déduire que : [0,1[⊂ [0,R], et: 1 ≤ R.

c. Par double inégalité, on en déduit que : R = 1.

d. La question a répond à cette question, puisque (comme : R = 1), on avait aussi :

∀ |x| < 1, $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.x^k = (1-x).\sum_{k=0}^{+\infty}S_k.x^k$, soit : S(x) = (1 – x).f(x).

27. On calcule facilement : $\forall$ x $\in$ ℝ, $f'(x) = P'(x).e^{P(x)}$, et : $f''(x) = (P''(x) + P'(x)^2).e^{P(x)}$.

Si on suppose que : P'(x_0) = 0, alors : $f''(x_0) = (P''(x_0) + P'(x_0)^2).e^{P(x_0)} = P''(x_0).e^{P(x_0)}$.

Or si tous les coefficients du développement en série entière de f sont positifs ou nuls, ceux de f'' le sont aussi, puisqu'ils s'en déduisent par des produits par des nombres entiers positifs.

Donc x_0 étant positif, on a : $f''(x_0) \geq 0$, donc : $P''(x_0) = f''(x_0).e^{-P(x_0)} \geq 0$.

Utilisation de séries entières.

28. a. Le développement en série entière de arctan s'obtient en primitivant celui de sa dérivée et :

$$\forall x \in]-1,+1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2.n+1}}{2.n+1}.$$

b. Notons : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ x $\in$ [-1,+1], $u_n(x) = (-1)^n.\dfrac{x^{2.n+1}}{2.n+1}$.

• chaque fonction u_n est continue (donc continue par morceaux) sur [0,1[, intégrable sur [0,1[car elle l'est sur [0,1], étant continue sur ce segment,

• la série de fonctions converge simplement sur [0,1[(vers arctan(x)),

• la fonction somme de cette série est continue par morceaux (car continue) sur [0,1[,

• de plus : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\int_0^1 |u_n(x)|.dx = \dfrac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}$, et la série : $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |u_n(x)|.dx = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}$, est convergente.

Donc le théorème de convergence dominée permet d'intervertir somme et intégrale et :

$$\int_0^1 \arctan(x).dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n+1).(2.n+2)}.$$

c. Puisque la série qui apparaît vérifie par évidence le critère spécial des séries alternées, il suffit que son reste soit inférieur à 10^{-3} pour fournir la valeur cherchée.

Pour cela, il suffit que : $\dfrac{1}{(2.n+3).(2.n+4)} \leq 10^{-3}$, et la valeur : n = 15, convient.

Donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{15} \frac{(-1)^n}{(2.n+1).(2.n+2)} = \frac{63299647353199}{144403552893600} \approx 0.4383524234$, correspond à la valeur cherchée.

29. a. La fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$, admet un développement en série entière sur]-1,+1[, donc S, comme primitive de cette fonction s'annulant en 0, admet aussi un développement en série entière sur]-1,+1[.

Ce développement s'obtient à partir de : $\forall$ t $\in$]-1,+1[, et :

$$\forall x \in]-1,+1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}.$$

Quand x tend vers 1, S(x) admet une limite finie si et seulement si $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ converge.

Or la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur [0,1[, et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2).(1+t)}}.\frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$, la fonction équivalente étant intégrable sur [0,1[.

Donc S admet une limite finie en 1.

b. Montrons maintenant que la série entière se définit et est continue sur [0,1].

Pour cela :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \left|\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}\right| \leq \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{1}{4.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}.\sqrt{4.\pi.n}}{2^{2.n}.n^{2.n}.e^{-2.n}.2.\pi.n.4.n} = \frac{1}{4.\sqrt{\pi}.n^{\frac{3}{2}}}.$$

On en déduit que la série entière converge normalement sur [0,1], donc qu'elle est définie sur [0,1] et qu'elle y est bien continue, notamment en 1.

Donc : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.\frac{1}{4.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2.n}{n}}{4^n.(4.n+1)}$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

30. a. Si P est le polynôme nul, la série entière a un rayon de convergence infini.

Sinon : $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a.n^k$, où : a ≠ 0, et : k = deg(P).

Donc : ∀ z ∈ ℝ*, $\left|\frac{P(n+1).z^{n+1}}{P(n).z^n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{a.(n+1)^k}{a.n^k}.|z| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k.|z|$, qui tend vers |z| quand n tend vers +∞.

Donc : R = 1.

b. La famille proposée est libre car étagée en degrés et il est clair que, pour tout : n ∈ ℕ, toute famille (1, X, ..., X.(X – 1)...(X – n + 1)) est une base de $\mathbf{K}_n$[X] (car libre et de cardinal (n+1)), donc tout polynôme de **K**[X] peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes de la famille de départ, et la famille est génératrice de **K**[X].

Donc (1, X, X.(X – 1), … , X.(X – 1)…(X – n + 1),…) forme bien une base de ℂ[X].

c. Si on suppose que P a été décomposé dans la base précédente : $P = \sum_{k=0}^{N} a_k.P_k$, alors :

∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n).x^n = \sum_{k=0}^{N} a_k.\sum_{n=0}^{+\infty} P_k(n).x^n$, car chaque série a un rayon de convergence 1.

Puis : ∀ k ∈ ℕ, ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} P_k(n).x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1)...(n-k+1).x^n = x^k.\sum_{n=k}^{+\infty} n.(n-1)...(n-k+1).x^{n-k}$,

et on reconnaît une série entière dérivée : $\sum_{n=0}^{+\infty} P_k(n).x^n = x^k.\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^k.k!}{(1-x)^{k+1}}$.

On en déduit que : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n).x^n = \sum_{k=0}^{N} a_k.\frac{x^k.k!}{(1-x)^{k+1}}$, que l'on peut encore au besoin réduire au même dénominateur, à savoir $(1 – x)^{N+1}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n).x^n = \frac{1}{(1-x)^{N+1}}.\sum_{k=0}^{N} a_k.x^k.k!.(1-x)^{N-k}$

On veut en fait décomposer P dans la base précédente, et pour cela (on suppose P non nul) :

(0) faire : N = 0,

(1) si : P ≠ 0, (2)diviser P par (X – N) et noter P le quotient et a_N le reste,

(3) faire : N = N+1 et recommencer à (1),

(4) faire : N = N – 1, et calculer : $\frac{1}{(1-x)^{N+1}}.\sum_{k=0}^{N} a_k.x^k.k!.(1-x)^{N-k}$, et fin de l'algorithme.

d. Si on considère la première série entière, on obtient :

$n^2+n+1 = n.(n+1)+1$, et : a_0 = 1,

$n+1 = 1.(n-1)+2$, et : a_1 = 2,

$1 = 0.(n-2)+1$, et : a_2 = 1.

Puis on a bien : $n^2+n+1 = 1+2.n+1.n.(n-1)$, et :

∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1).x^n = \frac{1}{(1-x)^{2+1}}.[1.x^0.0!.(1-x)^2+2.x.1!.(1-x)+1.x^2.2!] = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}$.

Pour la deuxième, on obtient :

$n^3 = n.(n-1).(n-2)+3.n.(n-1)+1.n$, et :

∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3.x^n = \frac{1}{(1-x)^{3+1}}.[1.x^1.1!.(1-x)^2+3.x^2.2!.(1-x)+1.x^3.3!] = \frac{x^3+4.x^2+x}{(1-x)^4}$.

31. a. La fonction f admet une limite (pour x non nul) en 0 qui est 0.

Donc f est continue en 0.

f est par ailleurs de classe C^∞ sur ℝ*.

De plus, on peut montrer que : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ*, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3.n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P_n est un polynôme à coefficients réels.
Le résultat est en effet vrai pour : n = 0 (avec : $P_0 = 1$), et si on le suppose vrai pour un entier n donné, alors : ∀ x ∈ ℝ*,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)..x^{3.n} - P_n(x).3.n.x^{3.n-1}}{x^{6.n}} + \frac{2.P_n(x)}{x^{3.n+3}} \right).e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{P_n'(x)..x^3 - 3.n.P_n(x).x^2 + 2.P_n(x)}{x^{3.n+3}}.e^{-\frac{1}{x^2}},$$

soit le résultat voulu pour n+1, avec le polynôme : $P_{n+1}(x) = P_n'(x)..x^3 - 3.n.P_n(x).x^2 + 2.P_n(x)$.
Il est alors clair que : ∀ n ∈ ℕ, $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^{3.n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \right) .P_n(0) = 0$, avec le théorème des croissances comparées.
Donc f est dérivable en 0 à tout ordre (avec le théorème de dérivabilité par limite de la dérivée) et :
∀ n ∈ ℕ, $f^{(n)}(0) = 0$,
et toutes les dérivées de f sont continues en 0.
Finalement f est de classe C^∞ sur ℝ.

b. On vient de constater que toutes les dérivées de f s'annulent en 0, donc la série de Taylor de f en 0 est la série entière nulle.

c. f est de classe C^∞ sur ℝ, sa série de Taylor a un rayon de convergence infini, mais elle est nulle alors que f n'est nulle qu'en 0.
Autrement dit f ne coïncide avec sa série de Taylor qu'en 0 et f n'est donc pas développable en série entière en 0.

32. a. Pour la première série entière, on remarque que :
- ∀ θ ∈ ℝ, ∀ n ∈ ℕ, $|\cos(n.\theta)| \le 1$, donc : $R_c \ge 1$,
- ∀ θ ∈ ℝ, (cos(n.θ)) ne tend pas vers 0, d'où divergence de la série en 1, et : $R_c \le 1$.

Donc : $R_c = 1$.
Pour la deuxième série entière, le résultat est le même sauf pour : θ = 0 (π), car la suite (sin(n.θ)) converge si et seulement si : θ = 0 (π).
Donc :
- θ = 0 (π), la série entière est la série nulle, et : $R_s = +\infty$,
- θ ≠ 0 (π), et : $R_s = 1$.

b. Les séries numériques $\sum_{n \ge 0} \cos(n.\theta).x^n$, $\sum_{n \ge 1} \cos(n.\theta).x^n$ et $\sum_{n \ge 1} \cos(n.\theta).x^{n-1}$ convergent pour les mêmes valeurs de x (immédiat en mettant au besoin à part la valeur : x = 0).
Donc la troisième série entière a un rayon de convergence égal à 1, comme toutes les séries entières, primitives de cette série entière, en particulier $\sum_{n \ge 1} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.x^n$.
Le rayon de convergence de cette nouvelle série entière est donc encore égal à 1.
Pour la série entière en sinus, on a le même résultat, avec la même distinction de cas que dans la question a, à savoir :
- si : θ = 0 (π), la série entière est la série nulle et son rayon de convergence est infini,
- si : θ ≠ 0 (π), la série entière, comme primitive, a un rayon de convergence égal à 1.

c. On va donc travailler pour : $|z| < 1$, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.\rho^n + i.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n.\theta)}{n}.\rho^n$.
Or : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n = \frac{x.e^{i.\theta}}{1 - x.e^{i.\theta}} = \frac{x.e^{i.\theta} - x^2}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}$, d'où :
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n.\theta).x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n \right) = \frac{x.\cos(\theta) - x^2}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}$, et :
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n.\theta).x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x.e^{i.\theta})^n \right) = \frac{x.\sin(\theta)}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}$.

Puis : ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n.\theta).x^{n-1} = \frac{\cos(\theta) - x}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}$, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n.\theta).x^{n-1} = \frac{\sin(\theta)}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}$.

Il suffit alors d'intégrer ces deux expressions pour obtenir le résultat voulu, et pour cela :

$\int \frac{\cos(\theta) - x}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}.dx = -\frac{1}{2}.\int \frac{2.x - 2.\cos(\theta)}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}.dx = -\frac{1}{2}.\ln(1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2) + C$, et :

$\int \frac{\sin(\theta)}{1 - 2.x.\cos(\theta) + x^2}.dx = \int \frac{\sin(\theta)}{(x - \cos(\theta)) + \sin^2(\theta)}.dx = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C'$, ceci pour : θ ≠ 0.

On calcule enfin C et C' à l'aide des valeurs des séries entières en 0 (qui valent 0 dans les deux cas) et : $C = 0$, et : $C' = \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$, C' peut se simplifier, suivant l'intervalle où se trouve θ.

Finalement :

- si : θ ≠ 0 (π), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\frac{1}{2}.\ln(1 - 2.\rho.\cos(\theta) + \rho^2) + i.\left(\arctan\left(\frac{\rho - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right)$,
- si : θ = 0 (π), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1 - \rho) = -\ln(1 - z)$, puisqu'alors z est réel.