

Séries entières.

Exercices 2014-2015

Les indispensables.

Calcul de rayons de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes à l'aide de la règle de d'Alembert :

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{(3.n)!}{(n!)^3 . n^n} . x^n$,

b. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^4 + n}{2^n + \sqrt{n!}} . x^n$,

c. $\sum_{n \geq 1} (\sqrt[3]{n})^{2.n} . x^n$,

d. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3.n}}{n^2 + 1}$,

e. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{4^n + n} . x^{4.n}$,

f. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2^n}}{3^n + 1}$.

2. Calculer le rayon de convergence des séries à l'aide d'équivalents :

a. $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) . x^n$,

b. $\sum_{n \geq 0} (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) . x^n$,

c. $\sum_{n \geq 0} \tan(\pi . \sqrt{n^2 + 3.n + 1}) . x^n$.

3. Soit la série entière $\sum (\cos(n)) . z^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut au moins 1.

b. Montrer que $(\cos(n))_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0.

c. En déduire le rayon de convergence de $\sum (\cos(n)) . z^n$.

d. Y a-t-il convergence au bord du disque de convergence ?

4. Soit $\sum a_n . z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que s'il existe : $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n . z_0^n$ soit semi-convergente, alors : $R = |z_0|$.

5. Soit $\sum a_n . z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit : $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Etudier le rayon de convergence de $\sum \lambda^n . a_n . z^n$.

Propriété de sommes de séries entières.

6. Soit la fonction S définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Montrer que le domaine de définition de S est $]-1, +1[$.

b. Montrer que S est continue sur \mathcal{D}_S .

c. Montrer que S est de classe C^∞ sur $]-1, +1[$.

d. Montrer que S est dérivable en -1 et préciser $S'(-1)$.

7. Soit la série entière : $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) . x^n$.

a. Déterminer son rayon de convergence et étudier la convergence en $\pm R$.

On note S la somme de cette série entière.

b. Montrer que S est continue sur son domaine de définition.

c. Transformer, pour : $0 \leq x < 1$ la quantité $(1-x) . S(x)$ en somme d'une série entière.

d. A l'aide de l'étude d'une convergence normale, montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) . S(x) = 0$.

8. Soit : $I(p, q) = \int_0^1 t^p . (1-t)^q . dt$, avec : $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

a. A l'aide d'intégrations par parties, calculer $I(p, q)$, pour tout : $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

b. Déterminer la nature de la série de terme général : $a_n = I(n, n)$.

c. Déterminer le domaine de définition de S définie par : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$.

9. Soit : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, une série entière de rayon de convergence 1 telle que de plus : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.

On suppose de plus que S est bornée sur $] -1, +1[$.

a. En utilisant des sommes partielles de la série entière, montrer que la série $\sum a_n$ converge.

b. Montrer que la fonction S admet une limite finie L en 1 par valeurs inférieures.

c. Montrer par double inégalité que : $L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Utilisation de séries entières.

10. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

- $f(0) = \frac{1}{2}$,

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

a. Montrer que f admet un développement en série entière en 0.

b. En déduire que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

c. Préciser le développement en série entière en 0 de sa primitive qui s'annule en 0.

11. a. Montrer que : $\forall a > 0$, la fonction : $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$, admet un développement en série de fonctions sur $[0, 1[$.

b. Montrer que cette série admet une primitive sous forme de série qui converge uniformément sur $[0, 1[$.

c. En déduire que : $\forall a > 0, \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n.a}$.

d. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2.n+1}$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3.n+1}$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

12. En utilisant une décomposition en éléments simples, montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0, en donnant l'intervalle sur lequel ce développement est valable :

a. $x \mapsto \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 1}$,

b. $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1}$, pour : $\theta \in \mathbb{R}$.

13. En commençant par dériver les fonctions proposées (après justification), montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0, en donnant l'intervalle sur lequel ce développement est valable :

a. $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$,

b. $x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \tan(\alpha)\right)$, avec : $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,

c. $x \mapsto \int_0^x \text{sh}(t^2).dt$.

14. A l'aide des formules de linéarisation, montrer que les fonctions \sin^3 et \cos^3 sont développables en série entière sur \mathbb{R} .

15. Déterminer le rayon de convergence R puis la somme des séries entières suivantes à l'aide de combinaisons linéaires :

$$a. \sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1) \cdot x^n, \quad b. \sum_{n \geq 1} \left(n - \frac{1}{n} \right) \cdot x^n, \quad c. \sum_{n \geq 0} (n + (-1)^n) \cdot x^n.$$

16. Déterminer le rayon de convergence R puis la somme des séries entières suivantes à l'aide de décompositions en éléments simples :

$$a. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n + 4}{n + 1} \cdot x^n, \quad b. \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n - 1)} \cdot x^n.$$

17. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n - 1) \cdot 2^n}$.

Autour de l'exponentielle complexe.

18. Montrer que : $\forall (z, N) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}, \left| e^z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq e^{|z|} - \sum_{n=0}^N \frac{|z|^n}{n!}$.

19. Résoudre : $\sin(z) = 2$.

Les classiques.

Calcul de rayons de convergence.

20. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$a. \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n, \text{ où : } a_n = 1, \text{ si } n \text{ est pair, et : } a_n = 2^n, \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$b. \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n, \text{ où } a_n \text{ est la } n^{\text{ième}} \text{ décimale de } \sqrt{2}.$$

21. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$a. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2} \cdot z^n, \quad b. \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n^2}}{n!},$$

$$c. \sum_{n \geq 1} \frac{\sum_{k=1}^n \operatorname{sh}(k)}{n \cdot e^n} \cdot z^n, \quad d. \sum_{n \geq 1} \left(\arccos \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \cdot z^n,$$

$$e. \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1 + b^n} \cdot z^n, \text{ où : } (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}, \quad f. \sum_{n \geq 1} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^a} \cdot z^n, \text{ où : } a \in \mathbb{R}.$$

Produit de Cauchy.

22. a. Rappeler le développement en série entière de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, en rappelant son rayon de convergence.
 b. Donner la série entière correspondant au produit de la série précédente par elle-même.
 c. Vérifier ce résultat en dérivant la fonction initiale.

23. a. Donner le développement en série entière de : $x \mapsto \operatorname{sh}^2(x)$, en utilisant un produit de Cauchy.
 b. Retrouver ce résultat en utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique.

24. En utilisant deux écritures du développement en série entière de : $x \mapsto \sin^2(x)$, donner la valeur, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$, de : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

Propriété de sommes de séries entières.

25. Soit la série entière $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \cdot \ln(n) \cdot x^n$.

a. Calculer son rayon de convergence (on notera S sa somme).

b. Montrer : $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x^{n+1}$.

c. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

d. En utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2 \cdot n)! \cdot \sqrt{2 \cdot n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, (ou Stirling), calculer la limite de la question c.

26. Soit : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1.

On pose, pour : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, et pour : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cdot x^n$, de rayon de convergence noté R.

a. Montrer que si : $|x| < R$, alors S(x) converge.

b. Montrer que si : $|x| < 1$, la suite $(S_n \cdot x^n)$ est bornée.

c. En déduire la valeur de R.

d. Montrer que : $\forall |x| < 1$, $S(x) = (1-x) \cdot f(x)$.

27. Soit P un polynôme à coefficients réels, et f défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(P(x))$.

On suppose que les coefficients du DSE(0) de f sont tous positifs ou nuls, et que : $f'(x_0) = 0$, pour une valeur : $x_0 \geq 0$, telle que : $P'(x_0) = 0$.

Montrer que : $P''(x_0) \geq 0$.

Utilisation de séries entières.

28. a. Rappeler le développement en série entière de la fonction arctan en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

b. En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée que : $\int_0^1 \arctan(x) \cdot dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot n + 2)}$.

c. En déduire une valeur approchée rationnelle de l'intégrale à 10^{-3} près.

29. On note : $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

a. Montrer que S admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$ puis que S se prolonge par continuité en 1.

b. En déduire que : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2 \cdot n}{n}}{4^n \cdot (4 \cdot n + 1)}$ (on pourra utiliser la formule de Stirling).

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

30. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum P(n) \cdot z^n$.

b. Montrer que $(1, X, X \cdot (X-1), \dots, X \cdot (X-1) \dots (X-n+1), \dots)$ forme une base de $\mathbb{C}[X]$.

c. En déduire un algorithme permettant de calculer la somme de la série entière précédente pour tout polynôme P.

d. Appliquer cette méthode à : $\sum (n^2 + n + 1) \cdot x^n$, $\sum n^3 x^n$.

31. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(0) = 0$, et pour x non nul : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

a. Montrer que f est continue, C^1 puis C^∞ sur \mathbb{R} , et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

b. Etudier la série de Taylor de f en 0.

c. Qu'en déduit-on ?

32. a. Déterminer le rayon de convergence et la somme des série entières $\sum_{n \geq 0} \cos(n.\theta).x^n$, et $\sum_{n \geq 0} \sin(n.\theta).x^n$, pour : $\theta \in \mathbb{R}$.

b. En déduire le rayon de convergence des séries entières : $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.x^n$, et : $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n.\theta)}{n}.x^n$.

c. Soit z un complexe non nul, tel que : $z = \rho.e^{i.\theta}$, avec : $\rho > 0$, et : $\theta \in]-\pi, +\pi[$.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

Les plus.

Calcul de rayons de convergence.

33. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n \geq 0} \left(\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{\pi}{4} \right).z^n$,

b. $\sum_{n \geq 1} e^{-(\ln(n))^a}.z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,

c. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}}.z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,

d. $\sum_{n \geq 0} \left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2).dx \right).z^n$.

On pourra étudier, pour z réel, le problème de la convergence de ces séries en $\pm R$.

34. Déterminer le rayon de convergence des séries : $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{n^2 + 1}.z^n$, et : $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n + (-1)^n}}.z^n$.

Transformation d'Abel et application aux séries entières.

35. Pour (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on note : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_p = \sum_{k=1}^p v_k$.

a. Montrer que : $\forall p \geq 1$, $\sum_{k=1}^p u_k.v_k = u_p.\sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1} (u_k - u_{k+1}).\sigma_k$.

b. On suppose de plus que ces suites sont telles que :

- (u_n) est réelle, décroissante de limite 0,
- la suite (σ_p) est une suite bornée.

Montrer que la série de terme général $u_n.v_n$ converge.

c. Donner le rayon de convergence et l'étude au bord des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$,

b. $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos(n)}{n}.x^n$.

Propriétés de sommes de séries entières.

36. Soit la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{p+q=n} u_p.u_q$.

On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n$, et on suppose le rayon de convergence R de f non nul.

Soit alors x réel tel que : $|x| < R$.

a. Montrer que f(x) est racine d'une équation du 2nd degré, et en déduire que : $R \geq 1/4$.

A-t-on montré que : $R \neq 0$?

b. Montrer que les coefficients (v_n) du développement en série entière de : $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4.x}}{2.x}$, sur

$] -1/4, 1/4[$ vérifient la même relation de récurrence que (u_n) .

c. En déduire que pour tout n : $u_n = v_n$, et préciser u_n pour tout n, puis un équivalent de u_n en $+\infty$.

Utilisation de développements en série entière.

37. a. Montrer que pour tout x dans $] -1, 1[$, la fonction φ définie par : $t \mapsto \frac{\ln(1+x^2 \cdot \sin^2(t))}{\sin^2(t)}$ peut se prolonger

en une fonction continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Montrer alors que : $\forall x \in] -1, 1[$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2 \cdot \sin^2(t))}{\sin^2(t)} \cdot dt = \pi \cdot (\sqrt{1+x} - 1)$.

38. Résoudre l'équation d'inconnue x : $\sum_{n=0}^{+\infty} (3 \cdot n + 1)^2 \cdot x^n = 0$.

On pourra commencer par essayer de sommer la série entière, après étude habituelle de son rayon de convergence.

39. Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{x^x} \cdot dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

40. Soit (u_n) une suite telle que :

- $u_0 = u_1 = 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n + 1$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq n$.

On note : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot x^n$.

b. Donner un intervalle I (pas nécessairement l'intervalle maximal) sur lequel S est définie.

c. Trouver une relation, pour : $x \in I$, entre $S(x)$ et x , et en déduire une expression de $S(x)$ sous forme de fraction rationnelle.

d. En déduire la valeur de u_n pour tout entier n .

41. On note a_n le nombre de façon de payer n centimes d'euros à l'aide de pièces de 1, 2 et 5 centimes.

On note par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$.

a. Montrer que a_n est le nombre triplets d'entiers positifs solutions de l'équation : $n = n_1 + 2 \cdot n_2 + 5 \cdot n_5$.

b. Montrer que S est définie au moins sur $] -1, +1[$.

c. Montrer que S peut s'écrire comme le produit de Cauchy de 3 séries entières.

d. Reconnaître la fonction S et à l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer son développement en série entière.

e. En déduire la valeur de a_n pour tout entier n .

Calcul de sommes de séries entières.

42. Déterminer le rayon de convergence R et la somme des séries entières :

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{(-1)^n}}{n} \cdot x^n$,

b. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{(2 \cdot n)!}$,

c. $\sum_{n \geq 1} \frac{4 \cdot n + 1}{n^2 + n - 2} \cdot x^n$.

Autour des fonctions sinus et cosinus et de l'exponentielle complexe.

43. Dans cet exercice, on va supposer inconnues les fonctions sinus et cosinus.

On note : $C(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!}$, et : $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!}$.

a. Montrer que le rayon de convergence de ces séries est $+\infty$, et que pour tout t , $C(t) + i \cdot S(t)$ est un complexe de module 1.

b. Montrer que C et S sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et relier C' et S' à C et S .

c. Préciser $C(0)$ et $S(0)$.

d. Montrer que C est positive sur un voisinage de 0, et que : $C(2) < 0$; on note : $\alpha = \inf\{x > 0, C(x) = 0\}$.

e. Montrer que : $\alpha \neq 0$, $C(\alpha) = 0$ (attention, c'est une borne inf !) et en déduire que : $S(\alpha) = 1$.

f. Calculer $C(2 \cdot \alpha)$ (on posera : $\pi = 2 \cdot \alpha$; attention c'est une définition !) puis montrer que les fonctions C et S sont $2 \cdot \pi$ -périodiques, tracer leur tableau de variations sur $[0, 2 \cdot \pi]$, et retrouver leurs propriétés

élémentaires.

- g. Montrer enfin que pour tout complexe z de module 1, il existe un unique θ dans $[0, 2\pi[$, tel que :
 $z = C(\theta) + i.S(\theta)$

Développements en série entière.

44. Pour les fonctions suivantes, montrer qu'elles sont développables en série entière autour de 0, préciser ce développement et donner le rayon de convergence des séries obtenues :

- a. à l'aide d'une équation différentielle : $e^{a \cdot \arcsin(x)}$, pour : $a \in \mathbb{R}$,

b. en développant la fonction sous l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \cdot \sin^2(t)) \cdot dt$.

45. Soit f une fonction de classe C^∞ de $] -a, +a[$ dans \mathbb{R} , avec : $a > 0$, et telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -a, +a[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

- a. Justifier que toutes les dérivées de la fonction f sont croissantes sur $] -a, +a[$.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r < a, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 (1-u)^n \cdot f^{(n+1)}(x \cdot u) \cdot du$.

c. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall 0 < r < a, (|x| < r) \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \right| \leq \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} \cdot f(r)$.

d. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $] -a, +a[$.

e. Montrer que la fonction tangente est telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(n)} = P_n(\tan)$,

où \tan est un polynôme de parité égale à celle de $n+1$, à coefficients positifs.

f. En déduire que tangente est développable en série entière sur $[0, \pi/2[$.

g. Conclure à l'aide d'un argument de parité que tangente est développable en série entière sur $] -\pi/2, +\pi/2[$.

46. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} sh(a^n \cdot x)$, où : $0 < a < 1$.

a. Montrer que f est effectivement définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b. Etudier si f est développable en série entière en 0.

c. Si oui, préciser ce développement.

47. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+x)}$.

a. Montrer que S est définie au moins sur $] -1, +1[$.

b. Montrer que : $\forall x \in] -1, +1[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{n^{k+2}} \right)$.

On pose : $\forall x \in] -1, +1[, \sigma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{n^{k+2}} \right)$, et : $\forall N \in \mathbb{N}^*, S_N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k \cdot x^k}{n^{k+2}} \right)$.

c. Justifier que : $\forall x \in] -1, +1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, S_N(x)$ est la somme partielle d'ordre N de $S(x)$.

d. Montrer que $\sigma(x)$ converge pour tout x dans $] -1, +1[$, puis à l'aide d'une comparaison série-intégrale que :

$$\forall x \in] -1, +1[, \forall N \in \mathbb{N}^*, |\sigma(x) - S_N(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{(k+1) \cdot N^{k+1}}.$$

e. En utilisant une série de fonctions, en déduire que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = \sigma(x)$.

f. Conclure que S est développable en série entière sur $] -1, +1[$ et préciser ce développement.