# Suites et séries de fonctions (corrigé des classiques).

**Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.**

18. a. Pour x fixé dans [0,1] :

- si : $x \in [0,1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers -1,
- si : x = 1, la suite $(u_n(1))$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0.

Il y a donc convergence simple de $(u_n)$ vers u, définie par : $\forall x \in [0,1[$, u(x) = -1, et : u(1) = 0.
Puisque toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur [0,1] et que u ne l'est pas, il ne peut pas y avoir convergence uniforme de $(u_n)$ sur [0,1].
On peut d'ailleurs remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - u| = \sup\limits_{[0,1[}|u_n - u| = 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}|u_n(x) - u(x)|$.

Il n'y a donc convergence uniforme de $(u_n)$, ni sur [0,1], ni sur [0,1[.

Pour : 0 < a < 1, en revanche : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,a]$, $|u_n(x) - u(x)| = \left|\dfrac{x^n - 1}{x^n + 1} + 1\right| = \left|\dfrac{2.x^n}{x^n + 1}\right| \le 2.a^n$.

On en déduit que : $\sup\limits_{[0,a]}|u_n - u| \le 2.a^n$ , et $(u_n)$ converge uniformément sur [0,a] vers u.

b. Pour x fixé dans [0,1], on a :

- si : x = 0, ou : x = 1, la suite $(u_n(x))$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0,
- si : $x \in ]0,1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers 0, du fait du théorème des croissances comparées.

Donc la suite $(u_n)$ converge simplement sur [0,1] vers la fonction nulle (notée u).
On peut ensuite, pour n fixé non nul, étudier les variations de $u_n$ et constater qu'elle reste négative et atteint un minimum en : $x = e^{-\frac{1}{n}}$, où elle vaut $-\dfrac{1}{e}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - u| = \dfrac{1}{e}$, et la suite ne converge pas uniformément sur [0,1].

En revanche, sur [0,a], avec : 0 < a < 1, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \ge n_0$, $a \le e^{-\frac{1}{n}}$, puisque la suite ($e^{-\frac{1}{n}}$) tend vers 1.
Donc : $\forall n \ge n_0$, $\sup\limits_{[0,a]}|u_n - u| = |u_n(a)|$, et la suite des sup tend vers 0.

Il y a donc convergence uniforme de $(u_n)$ sur [0,a].

19. Soit tout d'abord x fixé dans [0,1].

- si : x = 0, la suite $(u_n(0))$, est constante égale à 0 donc converge (vers 0),
- si : $x \in ]0,1]$, $\exists n_x \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge n_x$, $\dfrac{1}{n+1} \le x$, et la suite $(u_n(x))$ est constante nulle à partir du rang $n_x$, et

converge donc vers 0.
La suite $(u_n)$ converge donc simplement sur [0,1] vers la fonction nulle (notée u).
On peut ensuite remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - u| = \sup\limits_{[0,1]}|u_n| = \sup\limits_{[0,\frac{1}{n+1}]}|u_n|$.

Puis sur l'intervalle restant, la fonction $u_n$ est positive et atteint son maximum en $\dfrac{1}{2.(n+1)}$, où elle vaut

$\dfrac{(n+1)^{\alpha-2}}{4}$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - u| = \dfrac{(n+1)^{\alpha-2}}{4}$.

La suite converge donc uniformément sur [0,1] si et seulement si : $\alpha < 2$.
*Remarque :* quelque soit la valeur de $\alpha$, la suite converge uniformément sur [a,1], avec : 0 < a < 1.

20. a. Puisque la suite $(P_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, on peut affirmer que, pour : $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \ge N$, $\sup\limits_{R}|P_n - f| \le \varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $\forall$ n ≥ N, $\forall$ x ∈ ℝ, $|P_n(x) - P_N(x)| \leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \leq 2.\varepsilon = 1$.

Pour tout entier n, la fonction ($P_n - P_N$) étant alors polynomiale et bornée sur ℝ, elle est constante.

b. Notons alors : $\forall$ n ∈ ℕ, $P_n = P_N + a_n$, où : $a_n \in \mathbb{R}$.

La suite ($P_n(0)$) converge puisque ($P_n$) convergeant uniformément, elle converge simplement sur ℝ.

Donc de l'égalité : $\forall$ n ∈ ℕ, $a_n = P_n(0) - P_N(0)$, on en déduit que la suite ($a_n$) converge vers une limite qu'on peut noter $\alpha$.

On en déduit que : $\forall$ x ∈ ℝ, $\forall$ n ∈ ℕ, $P_n(x) = P_N(x) + a_n$, et en passant à la limite, on en déduit que :

$f(x) = P_N(x) + \alpha$,

autrement dit, f est une fonction polynomiale.

21. Il suffit d'écrire :

$\forall$ x ∈ I, $|u_n(\varphi(x)) - u(\varphi(x))| \leq \sup_{y\in J}|u_n(y) - u(y)| = \sup_J |u_n - u|$, d'où : $\sup_I |u_n o\varphi - uo\varphi| \leq= \sup_J |u_n - u|$.

Le théorème des gendarmes garantit alors que ($u_n o\varphi$) converge bien uniformément sur I vers $uo\varphi$.

22. Notons $M_f$ et $M_g$ des majorants de |f| et de |g| sur I.

Alors : $\forall$ n ∈ ℕ, $\forall$ x ∈ I, $|f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq |f_n(x).g_n(x) - f(x).g_n(x)| + |f(x).g_n(x) - f(x).g(x)|$.

D'où : $|f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)|$.

Puisque ($g_n$) converge uniformément sur I vers g, on sait que ($\sup_I |g_n - g|$) tend vers 0 donc est une suite bornée : notons M un majorant de cette suite.

Alors : $\forall$ n ∈ ℕ, $\forall$ x ∈ I, $|g_n(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \sup_I |g_n - g| + |g(x)| \leq M + M_g$.

D'où : $\forall$ n ∈ ℕ, $\forall$ x ∈ I, $|f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq (M + M_g).\sup_I |f_n - f| + M_f.\sup_I |g_n - g|$,

et donc : $\forall$ n ∈ ℕ, $\sup_I |f_n.g_n - f.g| \leq (M + M_g).\sup_I |f_n - f| + M_f.\sup_I |g_n - g|$.

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure à la convergence uniforme de ($f_n.g_n$) sur I vers f.g.

23. a. Pour x un réel fixé : $\exists$ $n_x$ ∈ ℕ, $\forall$ n ≥ $n_x$, x < n, et : $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$,

et un développement limité montre que cette suite tend vers $e^{-x}$.

Donc la suite ($f_n$) converge simplement sur ℝ vers f : x ↦ $e^{-x}$.

b. Soit maintenant un entier n fixé : n ≥ 2.

On peut tout d'abord remarquer que : $\forall$ x ∈ [0,n[, $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$, donc : $f_n(x) \leq e^{-x}$.

Puis : $\forall$ x ∈ [0,n[, $f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = u_n(x)$, et : $u_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$.

Sur [0,n[, on a : $(u_n'(x) = 0) \Leftrightarrow (-x = (n-1).\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right))$.

Posons alors : $\forall$ x ∈ [0,n[, $v_n(x) = x + (n-1).\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$, ce qui donne : $v_n'(x) = \frac{1-x}{n-x}$.

On constate que $v_n'$ est positive sur [0,1], nulle en 1 et négative sur [1,n[.

Donc $v_n$ s'annule en 0, est croissante sur [0,1], puis décroît sur [1,n[ (strictement) et tend vers $-\infty$ en n.

Donc $v_n$ s'annule une seule fois sur ]0,n[ en une valeur $\alpha_n$, et $u_n'$ s'annule une seule fois sur ]0,n[ en $\alpha_n$, qui vérifie : $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$.

$u_n$ est alors croissante sur [0,$\alpha_n$] (puisque : $f(0) - f_n(0) = 0$, et : $\forall$ x ∈ [0,n[, $f(x) - f_n(x) \geq 0$) et décroissante sur [$\alpha_n$,n[.

Finalement : $\forall$ x ∈ [0,n[, $0 \leq f(x) - f_n(x) = u_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_n}.\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)\right) = \frac{\alpha_n.e^{-\alpha_n}}{n}$.

Et comme la fonction : $x \mapsto x.e^{-x}$, est continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle en 0 et de limite nulle en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une valeur K, d'où on déduit que : $\forall$ x $\in$ [0,n[, $|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{K}{n}$.

Par ailleurs : $\forall$ x $\in$ [n,+∞), $|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$, et on déduit que :

$\forall$ n ≥ 2, $\sup\limits_{[0,+\infty)} |f_n - f| \leq \max(\dfrac{K}{n}, e^{-n}) \leq \dfrac{K}{n} + e^{-n}$.

En conclusion, la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

**Convergence simple, uniforme ou normale de séries de fonctions.**

24. a. Pour x fixé, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge.

Puisque : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n.(1+x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{(1+x)}.\dfrac{1}{n}$, la série n'est pas absolument convergente et il n'y a convergence normale de la série de fonctions sur aucun intervalle dans $\mathbb{R}^+$ (autre que {0}).

Enfin, le fait que le critère spécial s'applique pour tout x garantit que :

$\forall$ n ≥ 1, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^+$, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \dfrac{x}{(n+1).(1+x)}\right) \leq \dfrac{x}{(n+1).(1+x)} \leq \dfrac{1}{n+1}$, et : $\sup\limits_{R^+} |R_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

b. Pour x fixé dans $\mathbb{R}^{+*}$,

- si : x = 1, la série diverge grossièrement, puisque : $\forall$ n ≥ 1, $u_n(1) = \dfrac{1}{2}$,
- si : x < 1, alors : $|u_n(x)| = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$, et la série converge,
- si : x > 1, alors : $|u_n(x)| = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$, et la série converge.

Donc il y a convergence simple sur ]0,1[ et sur ]1,+∞).

Puisque les fonctions sont positives, on a : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $0 \leq S(x) - S_n(x) = R_n(x)$, et : $u_{n+1}(x) \leq R_n(x)$.

Donc les limites de $u_{n+1}$ en 0 et 1 interdisent qu'il puisse y avoir convergence uniforme sur des intervalles ayant pour borne une de ces valeurs.

Sur : [a,b] $\subset$ ]0,1[, on a : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $\forall$ x $\in$ [a,b], $|u_n(x)| = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}} \leq \dfrac{1}{x^{-n}} = x^n \leq b^n$,

et sur : [a,+∞) $\subset$ ]1,+∞), on a : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $\forall$ x $\in$ [a,+∞), $|u_n(x)| = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}} \leq \dfrac{1}{x^n} \leq \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$.

On en déduit la convergence normale et uniforme de la série sur les intervalles proposés.

c. Il est clairement nécessaire d'avoir : $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1$, pour que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ puisse converger.

Donc on doit se restreindre à : x > 0.

Pour x fixé, x > 0, alors : $n^2.u_n(x) = n^4.\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|^n$, qui tend vers 0 (théorème des croissances comparées).

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge et la série de fonctions converge simplement sur ]0,+∞).

On remarque ensuite que la fonction : $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$, est strictement décroissante sur ]0,+∞).

Sur [a,b] $\subset$ ]0,+∞), on pose : $\alpha = \max\left(\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|, \left|\dfrac{1-b}{1+b}\right|\right)$, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ x $\in$ [a,b], $|u_n(x)| \leq n^2.\alpha^n$.

On en déduit que la série de fonctions converge normalement (donc uniformément) sur [a,b].

Puis, sur ]0,a] ou [a,+∞), il ne peut y avoir convergence normale car :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 0} |u_n(x)| = \lim\limits_{x\to +\infty} |u_n(x)| = n^2$, donc : $\sup\limits_{]0,a]} |u_n| \geq n^2$, et : $\sup\limits_{[a,+\infty)} |u_n| \geq n^2$.

Enfin, pour : x ∈ ]0,a], (0 < a ≤ 1), $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est à termes positifs et : ∀ n ∈ ℕ, $u_{n+1}(x) \leq S(x) - S_n(x)$.

Or : ∀ n ∈ ℕ, $\lim_{x\to 0} u_n(x) = n^2$, et si (S – $S_n$) est bornée sur ]0,a], alors : ∀ n ∈ ℕ, $(n+1)^2 \leq \sup_{]0,a]} |S - S_n|$.

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur ]0,a].

Soit enfin [a,+∞), avec : 1 ≤ a, et supposons qu'il y ait convergence uniforme de ($u_n$) sur [a,+∞).

Alors : ∀ n ∈ ℕ, |$S_n$ – S| est bornée sur [a,+∞), et ( $\sup_{[a,+\infty)} |S - S_n|$ ) tend vers 0.

Mais : ∀ n ∈ ℕ, $|u_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \leq |S_{n+1} - S| + |S - S_n| \leq \sup_{[a,+\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a,+\infty)} |S - S_{n+1}|$.

On aurait donc : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ [a,+∞), $|u_{n+1}(x)| \leq \sup_{[a,+\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a,+\infty)} |S - S_{n+1}|$, et en particulier :

∀ n ∈ ℕ, $\lim_{x\to+\infty} |u_n(x)| = n^2 \leq \sup_{[a,+\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a,+\infty)} |S - S_{n+1}|$,

ce qui est impossible puisque la suite majorante tend vers 0 quand n tend vers +∞.

Donc il n'y a pas convergence uniforme sur [a,+∞).

**Convergence et sommes de séries de fonctions.**

25. a. Soit x fixé dans ℝ.

- si : x = 0, la série est la série nulle et elle converge.
- si : x ≠ 0, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées, car :

∀ n ∈ ℕ*, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n.(1+x^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{C}{n}\right)$,

et la suite tend vers 0 et est bien décroissante puisque ln est croissant sur $\mathbb{R}^+$.

Donc la suite de fonctions converge finalement simplement sur ℝ.

La convergence normale n'est obtenue sur aucun intervalle, car elle entraînerait la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ pour des valeurs de x non nulles.

Or : ∀ x ∈ ℝ*, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n.(1+x^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{C}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$, ce qui interdit la convergence de $\sum_{n\geq 1} |u_n(x)|$.

Enfin, pour n fixé non nul, on a vu que pour tout réel x, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial donc :

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{(n+1).(1+x^2)}\right) \leq \frac{x^2}{(n+1).(1+x^2)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que : ∀ n ∈ ℕ*, $\sup_{R} |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$, et la convergence uniforme de la série sur ℝ.

b. On sait que la série de fonctions converge uniformément sur ℝ.

De plus, chaque fonction $u_n$ a une limite finie en +∞ qui vaut : $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = (-1)^n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Enfin, la série des limites est convergente (toujours avec le critère spécial des séries alternées).

Donc on peut écrire : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Si on revient à des sommes partielles, on peut écrire :

∀ N ≥ 1, $S_{2.N} = \sum_{n=1}^{2.N} (-1)^n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2.N} (-1)^n.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{2.k+1}{2.k}\right) - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{2.k}{2.k-1}\right)$,

soit : $S_{2.N} = 2.\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{2.k-1}{2.k}\right) + \ln(2.N+1) = 2.\ln\left(\frac{(2.N)!}{2^{2.N}.N!^2}.\sqrt{N}\right) + \ln(2) + o(1)$.

En reprenant les intégrales de Wallis, on avait : $I_{2.N} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2.N}(t).dt = \frac{(2.N)!}{2^{2.N}.N!^2}.\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4.N}}$.

On en déduit que : $\frac{(2.N)!}{2^{2.N}.N!^2}.\sqrt{N} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, puis que ($S_{2.N}$) tend vers $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$, soit la limite de S en +∞.

26. a. On commence par poser : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x > 0, $u_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$.

On peut ici essayer de démontrer la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout [a,+∞), avec : a > 0.

En effet : ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈ [a,+∞), $0 \le u_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \le \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a+k} \le \frac{1}{a}.\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a+k} \le \frac{1}{a}.\frac{1}{n!}$.

On en déduit bien la convergence normale de la série sur tout intervalle [a,+∞).
Donc S est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus, toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc la convergence normale sur tous les intervalles précédents garantit que S est continue sur ]0,+∞[.

b. Pour : x > 0, on a : ∀ n ∈ ℕ, $u_n(x+1) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+1+k} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x+k} = x.\prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{x+k} = x.u_{n+1}(x)$.

Donc, les séries étant toutes convergentes, on en déduit que :

∀ x > 0, $S(x+1) = x.\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = x.(S(x) - \frac{1}{x}) = x.S(x) - 1$.

c. Pour un équivalent en 0,on commence par écrire : ∀ x > 0, $S(x) = \frac{S(x+1)+1}{x}$.

Comme S est continue sur $\mathbb{R}^+$, S(x+1) tend vers S(1) quand x tend vers 0.

Or : $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1 - 1 = e - 1$, donc : $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{e}{x}$.

En +∞, on commence par écrire : $S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.S_1(x)$.

Il suffit alors de démontrer que la nouvelle fonction $S_1$ qui apparaît tend vers 0 en +∞.
Or cette nouvelle série converge normalement sur [1,+∞) (comme S), chaque fonction qui la constitue a une limite finie (nulle) en +∞, et la série de ces limites converge.

Donc : $\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = 0$, d'où : $S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.o(1)$, en +∞, et finalement : $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

27. a. On pose : ∀ n ≥ 2, ∀ x ∈ ℝ, $u_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2.x}{n^2 - x^2}$.

Pour : x ∈ ]-2,+2[, tous les termes $u_n(x)$ sont définis, pour : n ≥ 2.

- si : x = 0, la série $\sum_{n\ge2} u_n(0)$ est la série nulle et converge,
- si : x ≠ 0, alors : $|u_n(x)| = \frac{2.|x|}{n^2 - x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2.|x|}{n^2}$, et la série $\sum_{n\ge2} u_n(x)$ est absolument convergente.

La série de fonctions converge simplement sur ]-2,+2[ et φ est définie sur cet intervalle.

Pour : n ≥ 2, ∀ x ∈ [0,1], on a de plus : $|u_n(x)| = \frac{2.|x|}{n^2 - x^2} \le \frac{2}{n^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

On en déduit que la série converge normalement sur [0,1].
Comme de plus, toutes les fonctions $u_n$ sont continues sur [0,1], φ est également continue sur [0,1].

b. La convergence normale établie précédemment sur [0,1] permet d'écrire :

$$\int_0^1 \varphi(x).dx = \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).dx.$$

Puis : ∀ n ≥ 2, $\int_0^1\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).dx = [-\ln(n-x) - \ln(n+x)]_0^1 = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Et la convergence de cette série télescopique donne finalement : $\int_0^1 \varphi(x).dx = 0 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

28. a. Pour tout x réel (ou complexe), on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

b. On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2.\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.\cos(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x),\ \text{avec : } \forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{(2.\cos(x))^n}{n!}.$$

c. La série de fonctions précédente converge simplement sur $[0,2.\pi]$.

Elle y converge également normalement puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,2.\pi],\ |u_n(x)| \leq \frac{2^n}{n!}$.

La série majorante converge car elle correspond au développement en série de $e^2$.

On peut donc écrire : $\int_0^{2.\pi} e^{2.\cos(x)}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2.\pi} \frac{(2.\cos(x))^n}{n!}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx$.

Puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = \int_0^{\pi} \cos(x)^n.dx + \int_{\pi}^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = (1+(-1)^n).\int_0^{\pi} \cos(x)^n.dx$.

Si donc n est impair, l'intégrale est nulle.

Posons alors : n = 2.p, p ∈ $\mathbb{N}$, et : $\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = 2.\int_0^{\pi} \cos(x)^{2.p}.dx = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2.p}.dx$.

On reconnaît une intégrale de Wallis, et :

$$\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = 4.\frac{(2.p)!}{2^{2.p}(p!)^2}.\frac{\pi}{2},\ \text{d'où : } \frac{2^n}{n!}.\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = \frac{2^{2.p}}{(2.p)!}.\frac{(2.p)!}{2^{2.p}(p!)^2}.2.\pi = \frac{2.\pi}{(p!)^2}.$$

Finalement : $\int_0^{2.\pi} e^{2.\cos(x)}.dx = \sum_{\substack{n=0 \\ n\ pair}}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n.dx = 2.\pi.\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p!)^2}$.

29. La fonction ζ alternée.

On commence par poser : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Pour x réel strictement positif fixé la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge (le terme général est alterné et décroît en valeur absolue vers 0).

De plus :

$$\forall a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,+\infty),\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a},\ \text{d'où : } \sup_{[a,+\infty)} |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Donc la série converge uniformément sur [a,+∞) et toutes les fonctions $u_n$ étant continues sur ]0,+∞), on en déduit la continuité de $\zeta_2$ sur ]0,+∞).

Toutes les fonctions $u_n$ sont de plus de classe $C^1$ sur ]0,+∞), et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}.\ln(n)}{n^x}$.

Considérons alors la fonction $\psi_x$ de t, pour x fixé, définie par : $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$, de dérivée : $\psi_x'(t) = \frac{1 - x.\ln(t)}{t^{x+1}}$.

$\psi_x$ est croissante sur $]0,\frac{1}{x}[$, décroissante sur $]\frac{1}{x},+\infty)$.

Soit maintenant : a > 0.

Alors : $\forall x \in [a,+\infty)$, la fonction $\psi_x$ est positive est décroissante sur $]\frac{1}{x},+\infty)$, donc sur $]\frac{1}{a},+\infty)$.

Par conséquent : $\forall n \geq N = E\left(\frac{1}{a}\right) + 1$, $\forall x \in [a,+\infty)$, la suite $(|u_n'(x)|)_{n\geq N}$ est décroissante et la série $\sum_{n\geq N} u_n'(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

Donc : $\forall$ n ≥ N, $\forall$ x $\in$ [a,+∞), $|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n'(x)\right| \leq |u_{n+1}'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{(n+1)^a}$, où on a noté $r_n$ le reste d'ordre n de cette série alternée.

Enfin : $\forall$ n ≥ N, $\sup_{[a,+\infty)} |r_n| =\leq \frac{\ln(n)}{(n+1)^a}$, et il y a convergence uniforme de la série des dérivées sur [a,+∞).

On en déduit que $\zeta_2$ est de classe $C^1$ sur ]0,+∞), et : $\forall$ x > 0, $\zeta_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}.\ln(n)}{n^x}$.