Réduction d'endomorphismes.

Exercices 2014-2015

Les indispensables.

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

1. A l'aide de son polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Soit : E = $\mathbb{R}_n[X]$, et u et v les endomorphismes de E définis par :
   $\forall$ P $\in$ E, u(P) = P – (X – 1).P', et : v(P) = $(X^2 - 1)$.P'' + 2.X.P'.
   a. Justifier que u et v sont bien des endomorphismes de E.
   b. A l'aide de la matrice de u et de v dans la base canonique de E, trouver les valeurs propres de ces endomorphismes (on ne cherchera pas les vecteurs propres).
   c. Quelle est la dimension des espaces propres de u et de v ?
   d. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

3. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie qui commutent.
   a. Justifier que u admet au moins une valeur propre.
   b. En déduire que u et v ont au moins un vecteur propre commun.

4. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   a. Montrer que : ($\exists$ k $\in$ $\mathbb{N}$*, 0 $\in$ Sp(u^k)) $\Rightarrow$ (0 $\in$ Sp(u)).
   b. Montrer que : (0 $\notin$ Sp(u)) $\Leftrightarrow$ (u surjectif).

5. Soient A et B des matrices respectivement dans $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) et $\mathcal{M}_{p,n}$(**K**).
   On définit les matrices par blocs : $M = \begin{pmatrix} \lambda.I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & -\lambda.I_p \end{pmatrix}$
   a. En étudiant les produits M.T_1 et T_2.M, montrer que : $\lambda^p.\chi_{A.B}(\lambda) = \lambda^n.\chi_{B.A}(\lambda)$.
   b. En déduire, si A et B sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n$(**K**), que : $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$.

6. Soit u un automorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   a. Etablir un lien, pour x non nul, entre $\chi_{u^{-1}}(x)$ et $\chi_u\left(\frac{1}{x}\right)$.
   b. Comparer de même Sp(u) et Sp(u^{-1}).

Diagonalisation, trigonalisation.

7. Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Soient A et B deux matrices carrées (n,n) à coefficients complexes, telles que : A.B = B.A.
   On suppose de plus que B admet n valeurs propres distinctes, et on notera u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et à B.
   a. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.
   b. Montrer à l'aide de u et de v que A et B diagonalisent par l'intermédiaire d'une même matrice P.
   c. Montrer que : $\exists$ $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, A = $\alpha_0.I_n + \alpha_1.B + \dots + \alpha_{n-1}.B^{n-1}$.

9. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
   On suppose que : Im(u – id_E) $\cap$ Im(u + id_E) = {0}.
   A l'aide du théorème du rang, montrer que u est diagonalisable et préciser dans la mesure du possible ses valeurs propres.

10. Trigonaliser les matrices : $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et : $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On pourra utiliser dans chaque cas l'endomorphisme canoniquement associé.

Utilisation de la diagonalisabilité.

11. Calculer A^n dans les cas suivants :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $Sp(A) = \{-2,3,5\}$.

Exprimer A^n en fonction de I_3, A et A^2, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}$.

13. Soient (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4.u_{n+1} - 3.u_n$, et : $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, pour : $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer qu'il existe une matrice carrée A, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n$.

b. Diagonaliser la matrice A, et en déduire la valeur de u_n pour tout entier n.

14. Etudier les trois suites récurrentes liées par les relations suivantes :

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 22 \\ z_0 = 22 \end{cases}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}.(2.x_n + y_n + z_n)$, $y_{n+1} = \frac{1}{3}.(x_n + y_n + z_n)$, $z_{n+1} = \frac{1}{4}.(x_n + y_n + 2.z_n)$.

15. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de A.

b. Déterminer les solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation : $M^2 = A$.

16. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice : $P \in Gl_2(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale réelle D telles que : $D = P^{-1}.A.P$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + M = A$ (E).

b. Montrer que $P^{-1}.M.P$ est diagonale.

c. Résoudre l'équation (E).

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

17. Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que si P est le polynôme caractéristique de A, on a bien : $P(A) = 0$.

b. Déterminer le polynôme de plus bas degré normalisé vérifiant l'égalité précédente.

c. Que venez-vous alors de déterminer ?

18. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $A^4 = 7.A^3 - 12.A^2$.

a. Déterminer les seules valeurs propres complexes possibles de A.

b. En déduire que : $tr(A) \in \mathbb{N}$, et : $tr(A) \leq 4.n$.

19. Soit : $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension 3.
On suppose que : $f^4 = f^2$, et que 1 et -1 sont valeurs propres de f.
Montrer que f est diagonalisable.

20. Soit : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $M^2 + {}^tM = 2.I_n$.
a. Trouver un polynôme annulateur pour M.
b. En déduire que M est diagonalisable.

21. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et : $p \in \mathscr{L}(E)$, tel que p^2 soit un projecteur.
a. Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?
b. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si : $p^3 = p$.

22. Soit u un automorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que u^{-1} est un polynôme en u.

23. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que u admet une unique valeur propre λ.
a. Quel est le polynôme caractéristique de u ?
b. A quelle condition u est-il diagonalisable ?
c. Justifier que $(u - \lambda.id_E)$ est nilpotent.

Sous-espaces vectoriels stables.

24. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe : $x \in E$, tel que : $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
a. Montrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E, stable par u qui contienne x.
Enoncer une réciproque.
b. Justifier qu'il existe : $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, tel que : $u^n(x) = \alpha_0.x + \alpha_1.u(x) + \dots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x)$.
Montrer que : $u^n = \alpha_0.Id_E + \alpha_1.u + \dots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$.

25. Soit : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u dans F.
a. Justifier que u_F est diagonalisable.
Que peut-on dire des vecteurs propres de u_F ?
b. En déduire que F admet une base formée de vecteurs propres de u.
c. Déterminer tous les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

26. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n.
a. Soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous-espace propre associé.
Donner la matrice de u dans une base adaptée à E_λ et en déduire que la dimension de E_λ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ.
b. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

<u>Les classiques.</u>
Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

27. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$.

28. Soit : $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour : $f \in E$, on note : $u(f) = f'$.
Déterminer les éléments propres de u et montrer en particulier que tout sous-espace propre de u est de

dimension 1.

29. Matrices stochastiques.
 On dit qu'une matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est stochastique si elle vérifie les conditions :
 - $\forall\ 1 \le i,j \le n$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$,
 - $\forall\ 1 \le i \le n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

 Soit A une matrice stochastique.
 a. Montrer que 1 est valeur propre de A.
 b. On suppose que λ est une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre de A.
 On appelle i_0 un entier entre 1 et n, tel que : $\left|x_{i_0}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i\right|$.
 Justifier que i_0 existe, que : $\left|x_{i_0}\right| \ne 0$, puis que : $|\lambda| \le 1$.

30. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telles que : A.B – B.A = A.
 a. Calculer $A^k.B - B.A^k$, pour : $k \in \mathbb{N}$.
 b. On suppose que A n'est pas nilpotente.
 Montrer alors que l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ défini par : $M \mapsto M.B - B.M$, admet une infinité de valeurs propres.
 c. En déduire que A est nilpotente.

31. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $u(P) = (X + 1).(X - 3).P' - 2.X.P$.
 a. Est-ce bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?
 Soit λ un réel et P un polynôme.
 b. Montrer que : $u(P) = \lambda.P$, si et seulement si P est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
 c. Résoudre cette équation différentielle et trouver une condition sur λ pour qu'elle admette des solutions polynomiales.
 d. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
 e. Généraliser avec $\mathbb{R}_n[X]$.

32. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$, avec a_1, .., a_n des complexes deux à deux distincts, non nuls.
 a. En notant P le polynôme défini par : $P(X) = \chi_A(X)$, calculer $P(a_i)$, pour : $1 \le i \le n$.
 b. Justifier que P est un polynôme unitaire de degré n.
 c. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)}$.
 d. En déduire $\det(A)$ et $\det(A + I_n)$.

Diagonalisation, trigonalisation.

33. Soit, pour n entier, l'application u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, qui à A fait correspondre sa transposée.
 Etudier la diagonalisabilité de u.

34. Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 En distinguant trois cas, étudier si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

35. Trigonaliser les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

36. Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer avec des arguments simples (sans calculer le polynôme caractéristique) que A est diagonalisable.

37. Soit A une matrice de rang 1.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si : $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

38. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = e_i + \sum_{k=1}^{n} e_k$.

a. Donner la matrice de f dans la base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

b. Trouver deux valeurs propres « simples » de f et les sous-espaces propres associés.
En déduire les éléments propres de f.

c. f est-il diagonalisable ?
f est-il inversible ?

39. Pour : $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, on note A la matrice : $A_{2.n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2.n+1}(\mathbf{K})$.

Etudier si A est diagonalisable ou trigonalisable.

40. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit : $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note ϕ l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ définie par : $\forall\ g \in \mathscr{L}(E)$, $\phi(g) = f \circ g - g \circ f$.

Si f est diagonalisable, montrer à l'aide d'une base de E formée de vecteurs propres de f que ϕ est aussi diagonalisable.

Utilisation de la diagonalisabilité.

41. Soit l'équation : $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue : $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Si M est solution de cette équation, déterminer ses valeurs propres.

b. Trouver les solutions de l'équation initiale en utilisant un polynôme annulateur.

42. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$, admettant n valeurs propres distinctes.

On considère l'équation d'inconnue : $g \in \mathscr{L}(E)$, $g^2 = u$.

a. Préciser la dimension des espaces propres de u.

b. Montrer que si g est solution du problème, alors u et g commutent.

c. En déduire que dans ce cas, les vecteurs propres de u sont vecteurs propres de g.

d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation précédente.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

43. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $A^3 = A + I_n$.
Montrer que : $\det(A) > 0$.

44. On veut résoudre dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ l'équation : $X^5 = I_5$.
a. Montrer qu'une solution de cette équation est nécessairement diagonalisable.
b. Résoudre l'équation.

45. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_{i,j} = a_i.a_j$, où : $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Calculer A^2, et en déduire si A est diagonalisable (on distinguera deux cas).

46. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E.
On appelle Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à u fait correspondre pou.
a. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de Φ.
b. Est-il diagonalisable ?

47. (voir exercice 22) Soit u l'endomorphisme de **K**[X] qui à P associe P(2.X).
a. Justifier que u est un automorphisme de **K**[X], et déterminer ses valeurs propres.
b. Peut-on trouver : $Q \in$ **K**[X], tel que : $u^{-1} = Q(u)$?

48. Soient λ et μ deux complexes distincts non nuls, et soient M, A et B trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
$I_n = A + B$,
$M = \lambda.A + \mu.B$,
$M^2 = \lambda^2.A + \mu^2.B$.
a. En calculant $M^2 - (\lambda+\mu).M + \lambda.\mu.I_n$, montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
b. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
c. Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.

Sous-espaces vectoriels stables.

49. Soit p un projecteur d'un **K**-espace vectoriel E de dimension finie n.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par p.
a. Soit x un vecteur de F tel que : $x = x_i + x_k$, avec : $x_i \in \mathrm{Im}(p)$, $x_k \in \ker(p)$.
Montrer que x_i et x_k appartiennent à F.
b. En déduire que F s'écrit : $F = F_i \oplus F_k$, où : $F_i \subset \mathrm{Im}(p)$ et $F_k \subset \ker(p)$.
c. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de E stables par p.

50. Soient : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, tel que : $u^n = Id_{C^n}$, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par u et p un projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur E.
On pose : $q = \dfrac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.
a. Montrer que : $\mathrm{Im}(q) \subset E$, puis que : $\ker(q) \oplus E = \mathbb{C}^n$.
b. Montrer que q est le projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur E dans la direction ker(q).

51. Soit T l'endomorphisme de **K**[X] défini par : $P \mapsto P(1 - X)$.
a. Montrer que T est un automorphisme de **K**[X].
b. Déterminer les valeurs propres de T.

<u>Les plus.</u>
Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

52. Soit E l'espace vectoriel des suites convergentes réelles, et u l'application de E dans E qui, à une suite (x_n) fait correspondre (y_n), définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1}$.
a. Vérifier que : $u \in \mathcal{L}(E)$, et déterminer le spectre de u.
b. Faire de même pour v, défini par : $\forall\ (x_n) \in E$, $v((x_n)) = (y_n)$, avec : $y_0 = 0$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = x_n$.

53. Soit : $E = C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.
Pour f élément de E, on note u(f) et v(f) les applications de $[-\pi,+\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall$ x $\in$ [-π,+π], u(f)(x) = $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(x-t).f(t).dt$, et : v(f)(x) = $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(x-t).f(t).dt$.

a. Transformer l'écriture de u(f) et v(f) à l'aide d'une linéarisation des sinus et cosinus.
b. Vérifier que u et v sont bien des endomorphismes de E.
c. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de u et de v.

54. Soit : E = $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et φ l'application définie par : φ(f) = g, avec :

$\forall$ x $\in$ ℝ*, $g(x)=\frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt$,

g(0) = f(0).

a. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E.
b. Déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

55. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

a. Montrer à l'aide d'un vecteur propre que si λ est valeur propre non nulle de (A.B), alors λ est valeur propre de (B.A).
b. Montrer avec le déterminant que si 0 est valeur propre de (A.B), alors 0 est aussi valeur propre de (B.A).
c. En déduire que : Sp(A.B) = Sp(B.A).

56. Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ constitué des fonctions f admettant une limite finie en +∞.
On note u l'endomorphisme de E défini par : $\forall$ f $\in$ E, $\forall$ x ≥ 0, u(f)(x) = f(x + 1).

a. Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé.
Montrer que si f ne tend pas vers 0 en +∞, alors : λ = 1.
b. Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer l'espace propre associé.
c. On suppose à nouveau que λ est valeur propre de u et f est un vecteur propre associé.
Montrer que si f tend vers 0 en +∞, alors : |λ| < 1.
d. Réciproquement, montrer que pour : |λ| < 1, il est possible de définir une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ à l'aide de conditions sur [0,1] qui soit vecteur propre de u associé à λ.

57. Soit u un endomorphisme de rang 2 d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie.

a. Donner la matrice de u dans une base adaptée à ker(u).
b. En déduire χ_u en fonction de tr(u) et de tr(u^2).

Diagonalisation, trigonalisation.

58. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Exprimer tr(A^k) en fonction des valeurs propres de A, pour tout entier : k $\in$ ℕ.
b. Montrer que : ($\forall$ k $\in$ ℕ, tr(A^k) = tr(B^k)) ⇔ (Sp(A) = Sp(B), avec les mêmes multiplicités).

59. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par : $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&k&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, avec : k $\in$ ℂ.

a. Déterminer rg(A) et en déduire une valeur propre de A.
b. Montrer que le polynôme caractéristique de A peut se mettre sous la forme : $\chi_A(\lambda)=\lambda^2.(\lambda-a).(\lambda-b)$.
c. Montrer que a et b vérifie : $a+b=k$, $a^2+b^2=k^2+6$.
d. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on a : a = b ?
Préciser alors les vecteurs propres associés à cette valeur propre.
e. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la matrice est diagonalisable ?

60. Soit ϕ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par : $\forall$ M $\in$ $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ϕ(M) = M + tr(M).$I_n$.
Montrer que ϕ est diagonalisable.

61. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec : n ≥ 3.
On suppose que : tr(A) = 0, rg(A) = 2, $A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

62. Soit : $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et soit : $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A.{}^tA$, et en déduire le polynôme caractéristique de A.
b. Trouver les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité.
c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ (on pourra poser : $\omega = \sqrt{b^2+c^2+d^2}$).

63. Soient α, β, γ des scalaires deux à deux distincts, et : $E = \mathbf{K}_2[X]$.
a. Montrer que l'application u qui à P dans E fait correspondre le reste de la division euclidienne de $(X^3.P)$ par $(X - \alpha).(X - \beta).(X - \gamma)$ est un endomorphisme de E.
b. En utilisant une base bien choisie de E, étudier la diagonalisabilité de u.

64. Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur **K** peut s'écrire comme somme de deux endomorphismes diagonalisables.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

65. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $A \neq 0$, $A^3 + A = 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

66. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que : $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $A^p = I_2$, et : $\det(A) = 1$.
Montrer que : $A^{12} = I_2$.

67. Soit : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $M^2 + {}^tM = I_n$.
a. Montrer que M est inversible si et seulement si : $1 \notin Sp(M)$.
b. Montrer que M est diagonalisable.

68. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension quelconque, et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que P est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que : $P(u) = 0$, $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$.
Montrer que : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

69. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
a. A l'aide des polynômes X^k, avec : $k \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
b. En déduire les matrices A telles que B soit diagonalisable.

70. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
a. On suppose que : $u \in Gl(E)$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est.
b. Généralisation. Soit : $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que : $P'(u) \in Gl(E)$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si P(u) l'est.

71. a. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ne contenant aucune matrice inversible.
Montrer que H contient toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
b. A l'aide des matrices de la base canonique, en déduire que tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible, et donc est tel que : $H \cap Gl_n(\mathbf{K}) \neq \emptyset$.

Sous-espaces vectoriels stables.

72. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme de E.
a. Montrer que si f est diagonalisable, tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un

supplémentaire dans E stable par f.

b. En raisonnant par récurrence, montrer la réciproque de l'implication précédente.

73. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$, diagonalisable.
On note C_u l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.
 a. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
 b. Montrer que : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $(g \in C_u) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in Sp(u), E_\lambda(u)$ stable par g).
 c. On note, pour : $\lambda \in Sp(u)$, m_λ la multiplicité de λ comme valeur propre de u.
 Déduire de la question b que : $\dim(C_u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda^2$.
 d. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes.
 Montrer que $(id_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est une base de C_u.

74. Théorème de Cayley-Hamilton.
Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E stable par u, û l'endomorphisme induit par u dans F, et χ_u et $\chi_{\hat{u}}$ les polynômes caractéristiques de u et û.
 a. Montrer que $\chi_{\hat{u}}$ divise χ_u.
 Pour la suite, E est un **K**-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$, et : $x \in E$, $x \neq 0$.
 b. Montrer l'existence de : $p \leq n$, tel que :
 - $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E,
 - $u^p(x) \in F_x$ où : $F_x = \text{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.
 c. Montrer alors que F_x est stable par u.
 On note û l'endomorphisme induit par u dans F_x.
 d. Calculer $\chi_{\hat{u}}$ en utilisant une base 'naturelle' de F_x.
 e. En déduire que : $\chi_{\hat{u}}(u)(x) = 0$, puis en déduire que : $\chi_u(u)(x) = 0$.
 f. Conclure par le théorème de Cayley-Hamilton.

75. Théorème : « dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E et son polynôme minimal ont les mêmes racines. »
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
 a. Montrer qu'il existe au moins un polynôme normalisé annulateur pour u.
 b. Montrer qu'il existe un unique polynôme normalisé annulateur pour u et de plus bas degré qu'on appellera polynôme minimal de u et qu'on notera μ_u.
 c. Montrer que si λ est valeur propre de u alors λ est racine de μ_u (on pourra utiliser un vecteur propre associé à λ).
 d. Soit α une racine du polynôme minimal μ_u de u et on suppose que α n'est pas valeur propre de u.
 Que peut-on dire alors de l'endomorphisme $(u - \alpha.id_E)$?
 En déduire un polynôme annulateur pour u, non nul, de degré strictement inférieur à celui de μ_u.
 e. Conclure.