Réduction d’endomorphismes.

Chap. 07 : cours complet.

1. Eléments propres d’un endomorphisme.

Définition 1.1 : valeur et vecteur propre d’un endomorphisme
Définition 1.2 : spectre d’un endomorphisme
Définition 1.3 : sous-espace propre d’un endomorphisme
Théorème 1.1 : liberté d’une famille de vecteurs propres
Théorème 1.2 : somme directe de sous-espaces propres

2. Polynôme caractéristique d’un endomorphisme en dimension finie.

Théorème 2.1 et définition 2.1 : polynôme caractéristique d’un endomorphisme en dimension finie
Théorème 2.2 : lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique
Théorème 2.3 : expression du polynôme caractéristique
Définition 2.2 : multiplicité d’une valeur propre
Théorème 2.4 : majoration du nombre de valeurs propres
Théorème 2.5 : somme et produit des racines du polynôme caractéristique d’un endomorphisme en dimension finie

3. Eléments propres et polynôme caractéristique d’une matrice carrée.

Définition 3.1 : valeur et vecteur propre d’une matrice carrée, spectre d’une matrice carrée
Théorème 3.1 : comparaison des spectres réels et complexes
Définition 3.2 : polynôme caractéristique d’une matrice carrée
Théorème 3.2 : lien entre valeurs propres d’un endomorphisme et d’une matrice

4. Diagonalisation des endomorphismes en dimension finie et des matrices carrées.

Définition 4.1 : endomorphisme diagonalisable en dimension finie
Définition 4.2 : matrice carrée diagonalisable
Théorème 4.1 : caractérisation des endomorphismes diagonalisables en dimension finie
Remarque : polynôme caractéristique scindé dans le cas d’un endomorphisme diagonalisable
Théorème 4.2 : interprétation de la diagonalisabilité en termes de vecteurs propres
Théorème 4.3 : cas d’un endomorphisme dont les valeurs propres sont simples
Théorème 4.4 : diagonalisabilité d’un endomorphisme en dimension finie en termes de dimensions
Théorème 4.5 : lien entre multiplicité d’une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé, endomorphismes diagonalisables en dimension finie en termes de multiplicités
Théorème 4.6 : puissances d’une matrice carrée diagonalisable
Remarque : utilisation du théorème 7.5 pour le calcul d’une puissance de matrice carrée à l’aide d’une division euclidienne
Théorème 4.7 : application à la résolution des suites récurrentes linéaires à coefficients constants

5. Trigonalisation des endomorphismes en dimension finie et des matrices carrées.

Définition 5.1 : endomorphisme trigonalisable en dimension finie
Définition 5.2 : matrice carrée trigonalisable
Théorème 5.1 *(admis)* : caractérisation des endomorphismes trigonalisables en dimension finie
Théorème 5.2 : trigonalisabilité des matrices carrées complexes
Théorème 5.3 : éléments diagonaux d’une matrice triangulaire ou diagonale semblable à une matrice carrée

6. Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme.

Définition 6.1 : sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme
Définition 6.2 : endomorphisme induit par un endomorphisme dans un sous-espace vectoriel stable
Théorème 6.1 : stabilité des sous-espaces propres par un endomorphisme commutant
Théorème 6.2 : caractérisation des vecteurs propres en termes de droite stable
Théorème 6.3 : traduction matricielle de la stabilité d’un sous-espace vectoriel

Théorème 6.4 : généralisation du théorème 6.4
Théorème 6.5 : caractérisation des matrices triangulaires supérieures en termes de sous-espaces stables

7. Polynômes d'endomorphisme, de matrice carrée.

Définition 7.1 et théorème 7.1 : polynôme d'un endomorphisme, polynôme d'une matrice carrée
Théorème 7.2 : stabilité des images et noyau de polynômes d'endomorphismes
Théorème 7.3 : correspondance polynôme – polynôme d'endomorphisme, de matrice carrée
Définition 7.2 et théorème 7.4 : polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée
Théorème 7.5 : valeurs propres et polynômes annulateurs
Théorème 7.6 *(admis)* : Cayley-Hamilton
Remarque : calcul de la puissance $k^{ème}$ d'une matrice carrée à l'aide d'un polynôme annulateur
Théorème 7.7 *(admis)* : caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur
Théorème 7.8 : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable

Réduction d'endomorphismes.

Chap. 07 : cours complet.

1. Eléments propres d'un endomorphisme.

Définition 1.1 : valeur et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que : $\lambda \in$ **K**, est une valeur propre de u si et seulement si : $\exists\ x \in E,\ x \neq 0,\ u(x) = \lambda.x$.

On dit que : $x \in E$, est vecteur propre de u si et seulement si : $x \neq 0$, et : $\exists\ \lambda \in$ **K**, $u(x) = \lambda.x$.

Définition 1.2 : spectre d'un endomorphisme

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$.

L'ensemble des valeurs propres de u (éventuellement vide) est appelé spectre de u et est noté $Sp(u)$.

Définition 1.3 : sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, et : $\lambda \in Sp(u)$.

Alors : $E_\lambda = \ker(u - \lambda.Id_E)$, est appelé sous–espace propre de E associé à λ.

C'est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de u associés à λ.

Théorème 1.1 : liberté d'une famille de vecteurs propres

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et soit : $u \in L(E)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de u et $x_1, \dots, x_n$, des vecteurs propres de u associés à ces différentes valeurs propres.

Alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans E.

Démonstration :

On procède par récurrence sur n.

Le résultat est immédiat pour : $n = 1$, puisqu'un vecteur propre est non nul.

Supposons-le vrai pour n donné, $n \geq 1$, et considérons $(x_1, \dots, x_{n+1})$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ de u.

Soit alors la combinaison linéaire : $\alpha_1.x_1 + \dots + \alpha_{n+1}.x_{n+1} = 0$ (L_1).

L'image par u de cette combinaison donne : $\alpha_1.\lambda_1.x_1 + \dots\ \alpha_{n+1}.\lambda_{n+1}.x_{n+1} = 0$ (L_2).

En calculant $[L_2 - \lambda_{n+1}.L_1]$, on obtient : $\alpha_1.(\lambda_1 - \lambda_{n+1}).x_1 + \dots + \alpha_n.(\lambda_n - \lambda_{n+1}).x_n = 0$.

Puisque les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de u, tous les coefficients de la dernière combinaison linéaire sont nuls, et les valeurs propres étant distinctes, on en déduit que : $\forall\ 1 \leq i \leq b,\ \alpha_i = 0$.

Enfin, en reprenant (L_1), puisque x_{n+1} est non nul, on termine avec : $\alpha_{n+1} = 0$, et la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est libre.

Théorème 1.2 : somme directe de sous-espaces propres

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de u.

Alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_n}(u)$ est directe.

Démonstration :

Montrons que tout élément de la somme se décompose de façon unique suivant cette somme.

Pour cela, soit : $x = x_1 + \dots + x_n \in E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_n}(u)$, mais se décomposant aussi en :

$x = x'_1 + \dots + x'_n$.

Alors : $(x_1 - x'_1) + \dots + (x_n - x'_n) = 0$.

Or si dans les n différences qui apparaissent (et qui sont chacune dans un sous-espace propre de u différent), il y en avait une non nulle, cela fournirait, en ne gardant dans l'égalité précédente que les différences non nulles, une combinaison linéaire nulle de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes, ce qui est impossible.

Toutes les différences sont donc nulles et : $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ x_i = x'_i$, et la décomposition de x est unique.

2. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Théorème 2.1 et définition 2.1 : polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors : $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda.id_E - u) = (-1)^n.\det(u - \lambda.id_E)$, est une fonction polynomiale en λ à coefficients dans **K**, et χ_u est appelé polynôme caractéristique de u.

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et A la matrice représentative de u dans $\mathscr{B}$, on a : $\chi_u(\lambda) = (-1)^n.\det(A - \lambda.I_n)$.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et A la matrice représentative de u dans $\mathscr{B}$.

L'endomorphisme $(u - \lambda.id_E)$ de E a pour matrice représentative $(A - \lambda.I_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, donc :

$\det(u - \lambda.id_E) = \det(A - \lambda.I_n)$.

Appelons $c_1, \ldots c_n$ les vecteurs de $\mathbf{K}^n$ qui ont pour coordonnées dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbf{K}^n$ les valeurs apparaissant en colonnes dans A, et $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de $\mathscr{C}$.

Alors : $\det(A - \lambda.I_n) = \det_{\mathscr{C}}(c_1 - \lambda.e_1, \ldots, c_n - \lambda.e_n)$.

On peut alors développer ce déterminant par n-linéarité et obtenir 2^n termes en tout.

Cette expression est alors polynomiale en λ à coefficients dans **K**.

De plus, et puisque le déterminant d'un endomorphisme en dimension finie ne dépend pas de la base dans laquelle on exprime sa matrice représentative, χ_u a donc une expression identique, quelque soit la base $\mathscr{B}$ de E que l'on choisisse pour représenter u.

Théorème 2.2 : lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Pour tout : $\lambda \in \mathbf{K}$, on a les équivalences : $(\lambda \in Sp(u)) \Leftrightarrow ((u - \lambda.id_E)$ non inversible$) \Leftrightarrow (\chi_u(\lambda) = 0)$.

En particulier, les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie sont les racines réelles de son polynôme caractéristique.

Démonstration :

On peut écrire, pour : $\lambda \in \mathbf{K}$:

$(\lambda \in Sp(u)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E, x \neq 0, u(x) = \lambda.x) \Leftrightarrow (\ker(u - \lambda.id_E) \neq \{0\}) \Leftrightarrow ((u - \lambda.id_E)$ non injective$)$.

Or E étant de dimension finie, on a ensuite : $((u - \lambda.id_E)$ non injective$) \Leftrightarrow ((u - \lambda.id_E)$ non bijective$)$, pour terminer avec : $((u - \lambda.id_E)$ non bijective$) \Leftrightarrow (\det(u - \lambda.id_E) = 0) \Leftrightarrow (\chi_u(\lambda) = 0)$.

Théorème 2.3 : expression du polynôme caractéristique

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors χ_u est de degré n et : $\chi_u(\lambda) = \lambda^n - tr(u).\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n.\det(u)$.

Démonstration :

On reprend une base $\mathscr{B}$ de E et l'expression obtenue dans la démonstration du théorème 2.1.

Après développement, on avait obtenu 2^n termes pour $\det(A - \lambda.I_n)$.

• Le terme constant correspond au choix de c_i à chaque étape du développement soit à $\det_{\mathscr{C}}(c_1, \ldots, c_n)$.
Dans l'expression de $\chi_u(\lambda)$, il vaut donc : $(-1)^n.\det(A) = (-1)^n.\det(u)$.

• Le terme de plus haut degré correspond au choix de $\lambda.e_i$ à chaque étape du développement, donc à un seul terme de degré n et à un coefficient égal à : $(-1)^n.\det_{\mathscr{C}}(e_1, \ldots, e_n)$.
Dans l'expression de $\chi_u(\lambda)$, il vaut donc : $(-1)^n.(-1)^n.\det(I_n) = 1$.

• Le terme de degré (n – 1) enfin correspond à choisir (n – 1) fois $\lambda.e_i$ à chaque étape du développement et une fois c_i, soit n combinaisons donnant finalement : $(-1)^{n-1}.\sum_{k=1}^{n} \det_C(e_1, \ldots, e_{k-1}, c_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

Chacun de ces déterminants vaut : $\det_C(e_1, \ldots, e_{k-1}, c_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{k-1,k} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{k,k} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{k+1,k} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{k,k}$.

Donc le coefficient de λ^{n-1} dans $\chi_u(\lambda)$ vaut : $(-1)^n.(-1)^{n-1}.[a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}] = -\,tr(A) = -\,tr(u)$.

Définition 2.2 : multiplicité d'une valeur propre

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, et : $\lambda \in Sp(u)$.
On appelle multiplicité de λ sa multiplicité comme racine de P_u.

Théorème 2.4 : majoration du nombre de valeurs propres

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'endomorphisme u admet au plus n valeurs propres (chacune comptée avec sa multiplicité).

Démonstration :

Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique, qui est de degré n.
Donc u admet au plus n valeurs propres (chacune comptée avec sa multiplicité), puisque χ_u admet au plus n racines.
On aurait pu aussi utiliser le premier théorème démontré dans ce chapitre.

Théorème 2.5 : somme et produit des racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, et A la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}$ de E.
Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines **dans $\mathbb{C}$** de P_u, chacune répétée avec sa multiplicité, on a :

$$tr(u) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ , et : } \det(u) = \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ .}$$

En particulier, si χ_u est scindé dans **K** (toutes ses racines sont dans **K**), alors les égalités précédentes sont valables pour les valeurs propres de u à la place des racines de χ_u.

Démonstration :

En utilisant les relations entre coefficients et racines d'une équation polynomiale, on a immédiatement :

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = -\frac{-tr(u)}{1} = tr(u) = tr(A) \text{, et :}$$

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n = (-1)^n . \frac{(-1)^n . \det(u)}{1} = \det(u) = \det(A).$$

Et si χ_u est scindé, alors les racines de χ_u sont les valeurs propres de u.

3. Eléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Définition 3.1 : valeur et vecteur propre d'une matrice carrée, spectre d'une matrice carrée

Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On dit que : $\lambda \in \mathbf{K}$, est valeur propre de A si et seulement si : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), X \neq 0, A.X = \lambda.X$.
On dit que : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, est vecteur propre de A si et seulement si : $X \neq 0$, et : $\exists \lambda \in \mathbf{K}, A.X = \lambda.X$.
Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et est noté $Sp_{\mathbf{K}}(A)$ ou Sp(A) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
Une matrice réelle admet donc un spectre réel et un spectre complexe.

Théorème 3.1 : comparaison des spectres réels et complexes

Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le spectre réel de A est inclus dans son spectre complexe.

Démonstration :

Soit λ une valeur propre réelle de A. Alors : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0, A.X = \lambda.X$.
Or une telle matrice colonne réelle X est aussi une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et donc X étant non nulle, il existe une matrice colonne non nulle X, à coefficients complexes telle que : $A.X = \lambda.X$.
A ce titre, on a bien : $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Définition 3.2 : polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Le polynôme caractéristique de A est le polynôme défini par : $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda.I_n - A) = (-1)^n.\det(A - \lambda.I_n)$, et c'est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Théorème 3.2 : lien entre valeurs propres d'un endomorphisme et de sa matrice représentative

Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et u l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$, canoniquement associé à A.

Les valeurs propres de A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont les valeurs propres de u.

On a donc : $Sp_{\mathbf{K}}(A) = Sp(u)$.

Démonstration :

Soit A une valeur propre de A dans **K**.

Alors : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $X \neq 0$, $A.X = \lambda.X$.

Or si u est l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A, et si x est le vecteur de $\mathbf{K}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ sont données par X, A.X correspond aux coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ de u(x), et on a bien alors : $x \neq 0$, $u(x) = \lambda.x$.

Le vecteur x est alors vecteur propre de u et : $\lambda \in Sp(u)$.

Réciproquement, si λ est valeur propre de u, x un vecteur propre dans $\mathbf{K}^n$ associé à λ, la relation vectorielle : $u(x) = \lambda.x$, conduit à l'égalité matricielle : $A.X = \lambda.X$, et X étant une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nulle, λ est bien un élément de $Sp_{\mathbf{K}}(A)$.

Théorème 3.3 : spectre de deux matrices semblables

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Alors : $Sp(A) = Sp(B)$.

Démonstration :

On peut le montrer matriciellement ou en utilisant l'endomorphisme canoniquement associé à A.

En effet, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A (dans $\mathbf{K}^n$), alors : $Sp_{\mathbf{K}}(A) = Sp(u)$.

Mais : $\exists P \in Gl_n(\mathbf{K})$, $B = P^{-1}.A.P$, et si $\mathcal{B}$ représente la base canonique de $\mathbf{K}^n$, alors P correspond à la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{K}^n$, et B est alors la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}'$.

Or on a vu que : $Sp(u) = Sp_{\mathbf{K}}(B)$, puisque les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique, soit celui de A ou de B indifféremment.

Finalement : $Sp_{\mathbf{K}}(A) = Sp_{\mathbf{K}}(B)$.

rappel :

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases de $\mathbf{K}^n$.

4. Diagonalisation des endomorphismes en dimension finie et des matrices carrées.

Définition 4.1 : endomorphisme diagonalisable en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme u est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Définition 4.2 : matrice carrée diagonalisable

Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On dit que A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale, autrement dit : $\exists P \in Gl_n(\mathbf{K})$, $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, D diagonale, $D = P^{-1}.A.P$.

Théorème 4.1 : caractérisation des endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- u est diagonalisable,
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
- E est la somme directe des sous-espaces propres de u,
- la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}'$ quelconque de E est diagonalisable.

Démonstration :

Démontrons ces équivalences par quatre implications.

• i) $\Rightarrow$ ii).

Supposons donc u diagonalisable.

La base dans laquelle la matrice de u est diagonale est alors clairement une base de E formée de

vecteurs propres de u.
• ii) $\Rightarrow$ iii).
Si on considère une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u (qu'on suppose regroupés par valeurs propres), la matrice de u dans $\mathcal{B}$ s'écrit : A = mat(u,$\mathcal{B}$) = $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de u sont alors bien les α_i.
De plus (par exemple) l'espace propre de u associé à α_1 s'obtient en résolvant : u(x) = α_1.x, soit en résolvant le système matriciel : A.X = α_1.X.
Si α_1 est répété k fois dans A, ce système est équivalent à : $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$.
Donc : (x ∈ ker(α_1.id_E – u)) $\Leftrightarrow$ (x ∈ Vect(e_1, …, e_k)), et : ker(α_1.u – id_E) = Vect(e_1, …, e_k).
On obtient un résultat identique pour chaque valeur propre de u, et comme la base $\mathcal{B}$ est la réunion de bases des différents sous-espaces propres de u, la somme directe de ces sous-espaces propres de u est bien égale à E.
• iii) $\Rightarrow$ iv).
Reprenons la base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe précédente : chaque vecteur de cette base est alors vecteur propre de u et la matrice D représentative de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale.
Si on considère une autre base $\mathcal{B}$' de E et la matrice A représentative de u dans $\mathcal{B}$', alors : A = P^{-1}.D.P, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$'.
Les matrices A et D sont donc semblables, et A est diagonalisable.
• iv) $\Rightarrow$ i).
Si enfin la matrice A de u dans une base $\mathcal{B}$ de E est diagonalisable, il existe P, inversible, telle que :
D = P^{-1}.A.P, soit diagonale.
La matrice P s'interprète alors comme la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}$' de E (les vecteurs de $\mathcal{B}$' ont leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$ écrites en colonne dans P).
Enfin la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$' est D qui est diagonale et tout vecteur de $\mathcal{B}$' est vecteur propre de u.

Remarque :
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathcal{L}$(E).
Si u est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé sur **K** (pas de réciproque).

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de u et D la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$.
Alors : $\chi_u(\lambda) = (-1)^n.\det(D - \lambda.I_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - d_{i,i})$, qui est scindé dans **K**.

Théorème 4.2 : interprétation de la diagonalisabilité d'une matrice en termes de vecteurs propres
Soit : A ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**), une matrice diagonalisable, et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Si : D = P^{-1}.A.P, où : P ∈ Gl_n(**K**), D ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**), diagonale, alors P peut s'interpréter comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ à une base de vecteurs propres de u.

Démonstration :
Si on noté $\mathcal{B}$' la famille (dans $\mathbb{R}^n$) donnée par les vecteurs colonnes de P, alors P étant inversible, $\mathcal{B}$' est une base de $\mathbb{R}^n$, et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$'.
De plus, la matrice de u dans $\mathcal{B}$' est D, et il est alors immédiat que chaque vecteur de $\mathcal{B}$' est vecteur propre de u (avec pour valeur propre associé l'élément diagonal de D associé).

Théorème 4.3 : cas d'un endomorphisme dont les valeurs propres sont simples
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathcal{L}$(E).

Si le polynôme caractéristique de u est scindé dans **K** et à racines simples, alors u est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Démonstration :

L'endomorphisme u admet donc n valeurs propres simples.
Chacune a un sous-espace propre de dimension au moins 1 (puisqu'il y a au moins pour chacune un vecteur propre (non nul) associé) et ces sous-espaces sont en somme directe.
Donc la somme de leurs dimensions valant n, chacun a une dimension au plus égale à 1.
Finalement, chaque dimension est égale à 1, et la somme directe est égale à E.
On en conclut que u est bien diagonalisable, avec n sous-espaces propres de dimension 1.

Théorème 4.4 : diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie en termes de dimensions

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathscr{L}$(E).
L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si : $\sum_{\lambda\in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$.

Démonstration :

Notons : F = $\underset{\lambda\in Sp(u)}{\oplus} E_\lambda(u)$, la somme (directe) des sous-espaces propres de u.

Alors : $\dim(F) = \sum_{\lambda\in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$, puisque la somme est directe, et : F ⊂ E.

Mais alors : (u diagonalisable) ⇔ (F = E) ⇔ (dim(F) = dim(E)) ⇔ ($n = \dim(F) = \sum_{\lambda\in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$).

Théorème 4.5 : lien entre multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé, endomorphismes diagonalisables en dimension finie en termes de multiplicités

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathscr{L}$(E).

- la dimension d'un sous-espace propre de u est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, soit : ∀ α ∈ Sp(u), $1 \leq \dim(E_\alpha(u)) \leq \mathrm{mult}(\alpha)$,
- une valeur propre simple conduit toujours à un sous-espace propre associé de dimension 1,
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur **K** et chaque sous-espace propre de u a pour dimension la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Démonstration :

- Notons α une valeur propre de u et $E_\alpha(u)$ le sous-espace propre associé.

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E adaptée à ce sous-espace propre, et : $p = \dim(E_\alpha(u)) \geq 1$.
La matrice de u dans cette base s'écrit :

$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha.I_p & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ = A, avec : B ∈ $\mathscr{M}_{p,n-p}$(**K**), et : C ∈ $\mathscr{M}_{n-p,n-p}$(**K**).

Puis : $\chi_u(\lambda) = (\lambda - \alpha)^p.\det(\lambda.I_{n-p} - C) = (\lambda - \alpha)^p.\chi_C(\lambda)$.
Donc α est racine de χ_u d'ordre au moins p, et p est inférieur à la multiplicité de α comme racine de χ_u.

- Si maintenant on considère une valeur propre simple α, alors : $1 \leq \dim(E_\alpha(u)) \leq 1$, et : $\dim(E_\alpha(u)) = 1$.
- Enfin, si u est diagonalisable, alors dans une base formée de vecteurs propres (donc formée de bases issues des espaces propres de u), la matrice de u est diagonale et en recalculant χ_u à partir de cette matrice, on constate que : ∀ α ∈ Sp(u), $\dim(E_\alpha(u)) = \mathrm{mult}(\alpha)$.

Réciproquement, si χ_u est scindé sur **K** et si : ∃ α ∈ Sp(u), telle que : $\dim(E_\alpha(u)) \leq \mathrm{mult}(\alpha) - 1$, alors :

$$\sum_{\lambda\in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E_\alpha(u)) + \sum_{\lambda\neq\alpha} \dim(E_\lambda(u)) \leq mult(\alpha) - 1 + \sum_{\lambda\neq\alpha} mult(\lambda) \leq n-1,$$

puisque la somme des multiplicités donne le degré de χ_u.
La somme des dimensions ne pouvant être égale à n, u ne peut être diagonalisable autrement dit, on vient de prouver par contraposée la réciproque de l'implication précédente donc cette même réciproque.

Théorème 4.6 : puissances d'une matrice carrée diagonalisable

Soit : A ∈ $\mathscr{M}_n$(**K**), diagonalisable, et : P ∈ Gl_n(**K**), D ∈ $\mathscr{M}_n$(**K**), D diagonale, telles que : $D = P^{-1}.A.P$.
Alors : ∀ k ∈ ℕ, $A^k = P.D^k.P^{-1}$.

Démonstration :

Pour : k = 0, avec la convention habituelle : $D^0 = A^0 = I_n$, l'égalité est vérifiée, et si elle est vérifiée pour un entier n donné, k ≥ 0, il est clair que : $A^{k+1} = A^k.A = P.D^k.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^{k+1}.P^{-1}$.

Remarque :

Voir remarque suivant le théorème 7.6 de Cayley-Hamilton permettant le calcul de A^k en utilisant une division euclidienne.

Théorème 4.7 : suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Soit (u_n) une suite telle que :

$\exists$ p ∈ ℕ*, $\exists$ $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$, $a_0 \neq 0$, $\forall$ n ∈ ℕ, $u_{n+p} = a_{p-1}.u_{n+p-1} + \ldots + a_0.u_n$.

La suite (X_n) définie par :

$\forall$ n ∈ ℕ, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$, vérifie alors : $\forall$ n ∈ ℕ, $X_{n+1} = A.X_n$, où : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$.

On peut alors calculer tous les termes de (X_n) et de (u_n) à l'aide de : $\forall$ n ∈ ℕ, $X_n = A^n.X_0$.

En particulier, les termes de la suite (u_n) ne dépendent donc que de n et de $u_0, \ldots, u_{p-1}$.

Démonstration :

Il suffit de développer l'égalité matricielle pour constater que (X_n) vérifie la relation proposée.

La suite du théorème est également immédiate.

Remarque :

Lorsque : p = 2, on peut remarquer que si (u_n) vérifie : $\forall$ n ∈ ℕ, $u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n$, la matrice A associée vaut alors : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, et son polynôme caractéristique est : $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \alpha.\lambda - \beta$.

On retrouve ainsi l'équation caractéristique attachée à une suite récurrente linéaire double.

Lorsque cette équation admet deux racines distinctes (dans ℂ), A est diagonalisable et l'expression de (u_n) en fonction des deux suites (r_1^n) et (r_2^n) en découle immédiatement par le biais de A^n.

Lorsque cette équation admet une racine double dans ℂ, A n'est que trigonalisable (sinon elle serait déjà diagonale car semblable à une matrice de type $r.I_2$) et le calcul de A^n fait alors apparaître des termes en r^n et en $n.r^{n-1}$ (termes qu'on peut remplacer par $n.r^n$ en factorisant par r puisque 0 n'est pas racine de χ_A).

5. Trigonalisation des endomorphismes en dimension finie et des matrices carrées.

Définition 5.1 : endomorphisme trigonalisable en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathcal{L}$(E).

On dit que u est trigonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire supérieure.

Définition 5.2 : matrice carrée trigonalisable

Soit : A ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**).

On dit que A est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 5.1 : caractérisation des endomorphismes trigonalisables en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u ∈ $\mathcal{L}$(E).

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur **K**.

Démonstration (hors programme) :

- Le résultat est immédiat si : dim(E) = 1.
- Supposons-le vrai pour tout **K**-espace vectoriel de dimension : 1 ≤ k ≤ n, pour un entier : n ≥ 1.

Soit maintenant E un **K**-espace vectoriel de dimension (n+1) et : u ∈ $\mathcal{L}$(E).

Si on suppose χ_u scindé, alors : $\exists$ α ∈ **K**, $\chi_u(\alpha) = 0$.

Notons $E_\alpha(u)$ le sous-espace propre associé.

- si : $\dim(E_\alpha(u)) = n + 1$, alors : $u = \alpha.\mathrm{id}_E$, et u est diagonalisable donc trigonalisable.
- si : $\dim(E_\alpha(u)) \leq n$, puisque $E_\alpha(u)$ est de dimension au moins 1, soit E' un supplémentaire de $E_\alpha(u)$ dans E, qui vérifie donc : $E = E_\alpha(u) \oplus E'$, et : $1 \leq \dim(E') \leq n$.

Soit p le projecteur sur E' dans la direction $E_\alpha(u)$.
On peut ainsi définir une application linéaire u' sur E' par : $\forall x \in E'$, $u'(x) = p\circ u(x)$.
Soit enfin : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{n+1})$, une base de E adaptée à la décomposition en somme directe donnée au-dessus c'est-à-dire telle que $(e_1, \ldots, e_k)$ soit une base de $E_\alpha(u)$ et : $\mathscr{B}' = (e_{k+1}, \ldots, e_{n+1})$, est une base de E'.

La matrice de u dans cette base est la matrice par blocs : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} \alpha.I_k & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$,

où : $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u')$, puisque u' « enlève » dans u(x) la partie se trouvant dans $E_\alpha(u)$.

Donc : $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda.I_{n+1} - A) = \begin{vmatrix} (\lambda-\alpha).I_k & * \\ 0 & \lambda.I_{n+1-k} - A' \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)^k.\chi_{u'}(\lambda)$.

Puisque χ_u est scindé sur **K**, $\chi_{u'}$ l'est aussi.
Donc u' est trigonalisable et on peut trouver une base : $\mathscr{C}' = (e'_{k+1}, \ldots, e'_{n+1})$, de E' dans laquelle la matrice de u' est triangulaire supérieure.
On constate alors que la matrice de u dans la base : $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_k, e'_{k+1}, \ldots, e'_{n+1})$, de E est triangulaire supérieure également.
En effet :
- $\forall 1 \leq i \leq k$, $u(e_i) = \alpha.e_i$, et :
- $\forall k+1 \leq i \leq n+1$, $u(e'_i)$ se décompose en : $u(e'_i) = f_i + f'_i$, avec : $f_i \in E_\alpha(u)$, et : $f'_i \in E'$.

Donc : $p(u(e'_i)) = p(f_i) + p(f'_i) = f_i$, soit : $u'(e'_i) = f_i = a'_{k+1,i}.e'_{k+1} + \ldots + a'_{i,i}.e'_i$, soit enfin :

$u(e'_i) = (a'_{1,i}.e_1 + \ldots + a'_{k,i}.e_k) + (a'_{k+1,i}.e'_{k+1} + \ldots + a'_{i,i}.e'_i)$.

Ceci se traduit bien pour la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$ par le fait qu'elle est triangulaire supérieure.
• Et évidemment, on a ainsi terminé la démonstration par récurrence du théorème.

Théorème 5.2 : trigonalisabilité des matrices carrées complexes
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration :
Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.
Puisque χ_u est scindé dans $\mathbb{C}$, u est donc diagonalisable et A aussi.

Théorème 5.3 : éléments diagonaux d'une matrice triangulaire ou diagonale semblable à une matrice carrée donnée
Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, diagonalisable ou trigonalisable.
Si D est une matrice diagonale semblable à A (ou T une matrice triangulaire supérieure semblable à A), on trouve sur la diagonale de D (ou de T) les valeurs propres de A, chacune répétée avec sa multiplicité.

Démonstration :
Si A est diagonalisable out trigonalisable, et donc semblable à une matrice triangulaire supérieure ou diagonale, notée A', alors : $\forall P \in Gl_n(\mathbf{K})$, $A' = P^{-1}.A\,P$.

On a alors : $\chi_A = \chi_{A'}$, mais comme le polynôme caractéristique $\chi_{A'}$ de A' vaut : $\chi_{A'}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - a'_{i,i})$, les valeurs propres de A sont donc bien les éléments diagonaux de A'.

6. Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme.

Définition 6.1 : sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que F est stable par u (ou que u stabilise F) si et seulement si : $u(F) \subset F$, ou : $\forall x \in F$, $u(x) \in F$.

Définition 6.2 : endomorphisme induit par un endomorphisme dans un sous-espace vectoriel stable

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

L'endomorphisme $\hat{u}$ défini sur F par : $\forall x \in F$, $\hat{u}(x) = u(x)$, est appelé endomorphisme induit par u sur F.

Théorème 6.1 : stabilité des sous-espaces propres par un endomorphisme commutant

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, et : $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que : $u \circ v = v \circ u$.

Alors Im(u) et ker(u) sont stables par v.

Plus généralement, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Démonstration :

• Soit : $x \in \ker(u)$.

Alors : $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, et : $v(x) \in \ker(u)$.

Donc ker(u) est bien stable par v.

• Soit: $y \in \text{Im}(u)$, et: $x \in E$, $y = u(x)$.

Alors : $v(y) = v(u(x)) = u(v(x))$, qui est bien un élément de Im(u), et Im(u) est stable par v.

• Soit : $\lambda \in \text{Sp}(u)$, et : $x \in E_\lambda(u)$.

Alors : $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda.x) = \lambda.v(x)$, et : $v(x) \in E_\lambda(u)$.

Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est bien stable par v.

Théorème 6.2 : caractérisation des vecteurs propres en termes de droite stable

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout x non nul dans E, la droite Vect(x) est stable si et seulement si x est vecteur propre de u.

Démonstration :

• Supposons que x soit vecteur propre de u (pour la valeur propre λ).

Alors : $\forall x' = \alpha.x \in \text{Vect}(x)$, $u(x') = u(\alpha.x) = \alpha.u(x) = \alpha.\lambda.x$, et : $x' \in \text{Vect}(x)$, qui est bien stable par u.

• Supposons Vect(x) stable par u.

Alors : $u(x) \in \text{Vect}(x)$, et comme {x} constitue une base de Vect(x) : $\exists \alpha \in$ **K**, $u(x) = \alpha.x$, ce qui traduit bien le fait que x est vecteur propre de u (pour la valeur α).

Théorème 6.3 : traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.

Il y a équivalence entre :

• F est stable par u,

• dans toute base $\mathcal{B}_0$ de E adaptée à F, $\text{mat}(u,\mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Démonstration :

Travaillons par double implication.

• [$\Rightarrow$].

Supposons F stable par u, et considérons une base $\mathcal{B}_0$ de E adaptée à F, s'écrivant : $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$.

Alors tout vecteur e de $\mathcal{B}_F$ est tel que u(e) s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_F$.

Il est alors clair que la matrice de u dans $\mathcal{B}_0$ est de la forme annoncée.

• [$\Leftarrow$].

Si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$ (du type $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$) est de la forme proposée, tout vecteur de $\mathcal{B}_F$ a une image par u qui s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_F$.

Par linéarité, tout vecteur de F a aussi une image par u qui s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_F$, et F est bien stable par u.

Théorème 6.4 : généralisation du théorème 6.3

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie tel que : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre :

• $\forall 1 \leq i \leq p$, E_i est stable par u,

• dans toute base $\mathscr{B}_0$ adaptée à : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$, $\mathrm{mat}(u,\mathscr{B}_0) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$.

En particulier dans ce cas, le déterminant de u est le produit des déterminants des p endomorphismes induits par u dans les sous-espaces vectoriels E_i.

Démonstration :

La démonstration est identique à la démonstration précédente, en travaillant cette fois sur chaque sous-espace vectoriel.
Comme par ailleurs, la matrice est diagonale par blocs, le déterminant de $\mathrm{mat}(u,\mathscr{B})$ est égal au produit des déterminants des matrices diagonales.
Or chaque u induit dans chaque sous-espace E_j vectoriel un endomorphisme dont la matrice dans la base de E_j qui a conduit à la base $\mathscr{B}_0$ adaptée à la décomposition, est égale à A_j, donc dont le déterminant vaut $\det(A_j)$, d'où le résultat annoncé.

Théorème 6.5 : caractérisation des matrices triangulaires supérieures en termes de sous-espaces stables

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
Il y a équivalence entre :
- $\forall\ 1 \leq k \leq n$, u stabilise $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$,
- la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.

Démonstration :

Là encore, travaillons par double implication.
• [$\Rightarrow$].
Si u stabilise chaque sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, alors :
$u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et : $\exists\ (a_{1,k}, \ldots, a_{k,k}) \in \mathbf{K}^k$, $u(e_k) = a_{1,k}.e_1 + \ldots + a_{k,k}.e_k$,
et il est alors clair que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.
• [$\Leftarrow$].
Si maintenant la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure, alors :
$\forall\ 1 \leq k \leq n$, $u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, donc :
$\forall\ 1 \leq j \leq k \leq n$, $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et donc :
$\forall\ x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, $u(x) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, par combinaison linéaire.
Finalement, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par u.

7. Polynômes d'endomorphisme, de matrice carrrée.

Définition 7.1 et théorème 7.1 : polynôme d'un endomorphisme, polynôme d'une matrice carrée

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, et : $P = \sum_{k=0}^{N} a_k.X^k \in \mathbf{K}[X]$.

Si A est la matrice représentative de u dans une base $\mathscr{B}$ de E, P(A) est la matrice représentative de P(u) dans cette même base $\mathscr{B}$.

Démonstration :

Puisque les matrices représentatives d'une composée ou d'une combinaison linéaire d'endomorphismes de E sont respectivement le produit ou la combinaison linéaire des matrices représentatives de ces mêmes endomorphismes, le résultat en découle.

Théorème 7.2 : stabilité des images et noyau de polynômes d'un endomorphisme par cet endomorphisme

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, et : $P \in \mathbf{K}[X]$.
Les sous-espaces vectoriels Im(P(u)) et ker(P(u)) sont stables par u.

Démonstration :

P(u) et u sont des endomorphismes de E qui commutent, du fait de la linéarité de u.

En effet, en notant : P = $\sum_{k=0}^{N} a_k.X^k$, on a : P(u) = $a_N.u^N + \ldots + a_1.u + a_0.id_E$, et :

$\forall$ x $\in$ E, P(u)ou(x) = $a_N.u^N(u(x)) + \ldots + a_1.u(u(x)) + a_0.u(x) = u(a_N.u^N(x) + \ldots + a_1.u(x) + a_0.x)$ = uoP(u)(x).
Donc Im(P(u)) et ker(P(u)) sont stables par u.

Théorème 7.3 : correspondance polynôme – polynôme d'endomorphisme, de matrice carrée

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et : u $\in \mathscr{L}$(E).

- $\forall$ (P,Q) $\in$ **K**[X]^2, $\forall$ (λ,μ) $\in$ **K**^{2}, (λP + μ.Q)(u) = λ.P(u) + μ.Q(u),
- $\forall$ (P,Q) $\in$ **K**[X]^2, (P.Q)(u) = P(u)oQ(u).

En particulier, si : P = $\lambda.\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)$, alors : P(u) = $\lambda.\prod_{k=1}^{N}(u-\alpha_k.Id_E) = \lambda.(u-\alpha_1.Id_E)\circ\ldots\circ(u-\alpha_N.Id_E)$.

Les mêmes résultats sont vrais pour les polynômes de matrices carrées.

Démonstration :

- Soient : (λ,μ) $\in$ **K**^{2}, et P et Q deux éléments de **K**[X], avec :

P = $\sum_{k=0}^{N} a_k.X^k$, et : Q = $\sum_{k=0}^{N} b_k.X^k$, où : N = max(deg(P),deg(Q)), et la convention :

$\forall$ deg(P) < k, $a_k = 0$, et : $\forall$ deg(Q) < k, $b_k = 0$.

Alors : $(\lambda.P+\mu.Q)(u) = \left(\sum_{k=0}^{N}(\lambda.a_k+\mu.b_k).X^k\right)(u) = \sum_{k=0}^{N}(\lambda.a_k+\mu.b_k).u^k = \lambda.P(u)+\mu.Q(u)$.

- D'autre part, toujours avec les conventions : $\forall$ deg(P) < k, $a_k = 0$, et : $\forall$ deg(Q) < k, $b_k = 0$, on a :

$$(P.Q)(u) = \left(\sum_{k=0}^{2.N}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}\right).X^k\right)(u) = \left(\sum_{k=0}^{2.N}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}\right).u^k\right).$$

Mais puisque u est linéaire, on peut écrire : $\forall$ 0 $\leq$ i $\leq$ n, $u^i \circ \left(\sum_{j=0}^{N} b_j.u^j\right) = \sum_{j=0}^{N} b_j.u^{i+j}$, et donc :

$$P(u)\circ Q(u) = \left(\sum_{i=0}^{N} a_i.u^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{N} b_j.u^j\right) = \sum_{i=0}^{N} a_i.\left(\sum_{j=0}^{N} b_j.u^{i+j}\right) = \sum_{k=0}^{2.N}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i.b_{k-i}\right).u^k ,$$

en réarrangeant les termes de la somme obtenue (ce qui donne la deuxième égalité).
On en déduit l'égalité voulue.

- Enfin, si : P = 1, alors : P(u) = id_E, et plus généralement :

si : P = $\lambda.\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)$, alors : P(u) = $\lambda.\prod_{k=1}^{N}(u-\alpha_k.Id_E) = \lambda.(u-\alpha_1.Id_E)\circ\ldots\circ(u-\alpha_N.Id_E)$.

Définition 7.2 et théorème 7.4 : polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et : u $\in \mathscr{L}$(E).
On appelle polynôme annulateur de u un polynôme P de **K**[X] tel que : P(u) = 0.
Si : A $\in \mathscr{M}_n$(**K**), on appelle polynôme annulateur de A un polynôme P de **K**[X], tel que : P(A) = 0.
Si E est de dimension finie et si A représente u dans une base $\mathscr{B}$ de E, alors P est annulateur de u si et seulement si P est annulateur de A.
De plus, tout endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration :

Si E est de dimension finie et si A représente u dans une base $\mathscr{B}$ de E, alors pour tout polynôme P, P(A) est la matrice représentative de P(u) dans $\mathscr{B}$, d'où l'équivalence proposée.
De plus, si E est de dimension n, alors la famille (id_E, u, …, u^{n^2}) est de cardinal (n^2 + 1) donc est liée dans $\mathscr{L}$(E).
Donc : $\exists$ (a_0, a_1, …, a_{n^2}) $\in$ **K**$^{n^2}$, non tous nuls, tels que : $a_0.id_E + a_1.u + \ldots + a_{n^2}.u^{n^2} = 0$.
Le polynôme : P = $a_0 + a_1.X + \ldots + a_{n^2}.X^{n^2}$, est alors non nul, annulateur de u.

Théorème 7.5 : valeurs propres et polynômes annulateurs

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et : u $\in \mathscr{L}$(E).

Pour tout polynôme P de **K**[X], et toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de P(u).
En particulier, si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P, autrement dit les racines d'un endomorphisme sont toujours racines de tout polynôme annulateur de cet endomorphisme.

Démonstration :

Soit donc x un vecteur propre de u associé à λ.
Puisque : $u(x) = \lambda.x$, il est immédiat par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k.x$, et donc :
$\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda).x$,
autrement dit, puisque x est non nul, $P(\lambda)$ est bien valeur propre de P(u).
En particulier, si P est un polynôme annulateur de u, la seule valeur propre de P(u) étant 0 (c'est l'endomorphisme nul), on en déduit que pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ vaut 0 et λ est racine de P.

Théorème 7.6 : de Cayley-Hamilton

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Démonstration (hors programme) :

Soit : $x \in E$.
Notons par ailleurs χ_u le polynôme caractéristique de u.
Si x est nul, alors : $\chi_u(u)(x) = 0$, puisque $P_u(u)$ est un endomorphisme de E.
Supposons maintenant x non nul.
• il y a des entiers k tels que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ soit libre.
En effet, pour : k = 1, la famille {x} est libre, étant donné que x est non nul.
De plus, les familles de type précédent ne peuvent comporter plus de n vecteurs, car : dim(E) = n.
Il existe donc un plus grand entier p tel que $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ soit libre.
• notons : $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.
La famille $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ est évidemment une base de F, puisqu'elle est libre par construction et génératrice de F par définition de F.
De plus, F est stable par u.
En effet, tous les vecteurs parmi $x, u(x), \dots, u^{p-2}(x)$ ont évidemment une image par u dans F.
Puis $\{x, u(x), \dots, u^p(x)\}$ est liée (par définition de p) et donc :
$\exists (a_0, \dots, a_p) \in \mathbf{K}^{p+1}$, non tous nuls, tel que : $a_0.x + \dots + a_p.u^p(x) = 0$.
Or si a_p était nul, tous les autres le seraient aussi du fait de la liberté de la famille $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$.
Donc a_p est non nul et $u^p(x)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de u, $u(x), \dots, u^{p-1}(x)$, et donc appartient à F.
Il est alors clair que tout vecteur de F (comme combinaison linéaire des vecteurs de la base précédente) a aussi son image par u dans F.
• notons û l'endomorphisme induit par u dans F.

La matrice de û dans la base précédente de F est : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}$, où la dernière colonne correspond aux coordonnées de $u^p(x)$ dans la base $\{x, \dots, u^{p-1}(x)\}$.
Le polynôme caractéristique de û est alors : $\chi_{\hat{u}}(\lambda) = [\lambda^p - \alpha_{p-1}.\lambda^{p-1} - \dots - \alpha_0]$, comme on le montre en développant par exemple le déterminant correspondant par rapport à la dernière colonne.
Et dans ce cas : $\chi_{\hat{u}}(u)(x) = [u^p(x) - \alpha_{p-1}.u^{p-1}(x) - \dots - \alpha_0.x] = 0$.
• considérons enfin une base $\mathscr{B}$ obtenue en complétant la base précédente de F en une base de E.

La matrice de u dans cette base est alors : $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, puisque F est stable par u.

Le polynôme caractéristique de u est alors : $\chi_u(\lambda) = \chi_{\hat{u}}(\lambda).\det(\lambda.I_{n-p} - B) = \chi_{\hat{u}}(\lambda).Q(\lambda)$.
Donc : $\chi_u(u) = \chi_{\hat{u}}(u) o Q(u) = Q(u) o \chi_{\hat{u}}(u)$.
On constate alors que : $\chi_u(u)(x) = Q(u)[\chi_{\hat{u}}(u)(x)] = Q(u)(0) = 0$.
• Finalement, on a montré que : $\forall x \in E$, $\chi_u(u)(x) = 0$, soit : $\chi_u(u) = 0$.

Remarque :

Si : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors on peut obtenir A^k, pour tout entier k à l'aide d'une division euclidienne.

En effet : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists (Q_k,R_k) \in \mathbf{K}[X]^2, X^k = \chi_A.Q_k + R_k$, $\deg(R_k) \leq n - 1$, et :

$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = R_k(A)$.

Démonstration :

Pour : $k \in \mathbb{N}$, il suffit d'effectuer la division euclidienne de X^k par χ_A qui garantit que :

$\exists ! (Q_k,R_k) \in \mathbf{K}[X]^2, X^k = \chi_A.Q_k + R_k$, avec : $\deg(R_k) < n$,

et : $A^k = \chi_A(A).Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$, du fait du théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 7.7 : caractérisation de la diagonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans **K**.

De même, u est diagonalisable si et seulement si : $P = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$, est un polynôme annulateur de u.

Démonstration (hors programme) :

[⇒]

Supposons u diagonalisable.

Notons D sa matrice dans une base de E formée de vecteurs propres de u.

Alors D comporte sur sa diagonale les valeurs propres de u, répétées avec leur multiplicité.

Or, pour tout polynôme P de **K**[X], P(D) est la matrice diagonale qui comporte sur sa diagonale les éléments $P(d_{i,i})$, où $d_{i,i}$ sont les éléments diagonaux de D soit les valeurs propres de u.

Donc si on prend pour P le polynôme $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$, alors : $P(D) = 0$, et : $P(u) = 0$.

P est bien annulateur pour u (et c'est un polynôme scindé à racines simples dans **K**).

[⇐]

Commençons par démontrer le résultat suivant :

« si un polynôme P de **K**[X] s'écrit : $P = (X - \alpha).Q$, tel que α ne soit pas racine de Q, alors :

$\ker(P(u)) = \ker(u - \alpha.id_E) \oplus \ker(Q(u))$ ».

• Soit : $x \in \ker(u - \alpha.id_E) \cap \ker(Q(u))$.

Alors : $u(x) = \alpha.x$, donc : $Q(u)(x) = Q(\alpha).x$, en reprenant le principe de la démonstration du théorème 7.5.

Or α n'est pas racine de Q donc : $x = 0$, et les deux noyaux sont en somme directe.

D'autre part, puisque α n'est pas racine de Q, les polynômes Q et $(X - \alpha)$ sont premiers entre eux.

Donc : $\exists (A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$, $A.(X - \alpha) + B.Q = 1$ (égalité de Bézout), et : $A(u)o(u - \alpha.id_E) + B(u)oQ(u) = id_E$.

• Soit alors : $x \in \ker(P(u))$.

Alors : $x = y + z$, avec : $y = A(u)((u - \alpha.id_E)(x))$, et : $z = B(u)(Q(u)(x))$.

Dans ce cas : $Q(u)(y) = A(u)(Q(u)((u - \alpha.id_E)(x))) = A(u)(P(u)(x)) = A(u)(0) = 0$, soit : $y \in \ker(Q(u))$,

et : $(u - \alpha.id_E)(z) = (u - \alpha.id_E)(B(u)(Q(u)(x))) = B(u)(P(u)(x)) = B(u)(0) = 0$, soit : $z \in \ker(u - \alpha.id_E)$.

Donc : $x \in \ker(u - \alpha.id_E) \oplus \ker(Q(u))$, soit : $\ker(P(u)) \subset \ker(u - \alpha.id_E) \oplus \ker(Q(u))$.

• Soit enfin : $y \in \ker(Q(u))$, et : $z \in \ker(u - \alpha.id_E)$.

Alors : $P(u)(y) = (u - \alpha.id_E)(Q(u)(y) = (u - \alpha.id_E)(0) = 0$, et : $y \in \ker(P(u))$, de même pour z.

Donc : $\ker(u - \alpha.id_E) \oplus \ker(Q(u)) \subset \ker(P(u))$, soit finalement l'égalité.

On a donc bien montré le résultat annoncé.

Supposons maintenant que u admette un polynôme P annulateur scindé à racines simples dans **K**.

Si P n'est pas normalisé, on le divise par son coefficient dominant et on peut alors supposer que :

$P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$, où les λ_i sont distincts deux à deux.

Alors : $P(u) = 0$, et : $\ker(P(u)) = E$.

Puisque les valeurs λ_i sont distinctes deux à deux, par récurrence on constate que :

$\ker(P(u)) = E = \ker(u - \lambda_1.id_E) \oplus \ldots \oplus \ker(u - \lambda_k.id_E)$.

Enfin, si on considère une base de E adaptée à cette somme directe, c'est une base formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Théorème 7.8 : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et û l'endomorphisme induit par u dans F.
Si u est diagonalisable, û est aussi diagonalisable.

Démonstration :

Puisque u est diagonalisable, il existe un polynôme P de **K**[X], scindé à racines simples dans **K**, tel que : P(u) = 0.

Or cela se traduit par : $\forall x \in E$, P(u)(x) = 0.

Mais on constate alors que : $\forall x \in F$, P(u)(x) = 0, et comme : $\forall x \in F$, u(x) = û(x), on en déduit que : $\forall x \in F$, P(û)(x) = 0, et finalement : P(û) = 0.

On vient donc de mettre en évidence un polynôme annulateur de û, scindé à racines simples dans **K**, et û est donc diagonalisable.