

Réduction d'endomorphismes (corrigé niveau 3).

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

52. a. Il est clair que l'image d'une suite convergente est une suite convergente, puisque u opère sur ces suites un « décalage vers la gauche ».
De plus, la linéarité de u se vérifie sans peine.
Si on cherche les valeurs propres (et les vecteurs propres) de u , on cherche (x_n) convergente non nulle, et λ réel tels que : $u((x_n)) = \lambda \cdot (x_n)$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \lambda \cdot x_n$.
 (x_n) doit donc être géométrique, et valoir : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x_0 \cdot \lambda^n$.
Comme de plus, elle doit être convergente, on doit avoir : $-1 < \lambda \leq 1$.
Réciproquement, soit : $-1 < \lambda \leq 1$, et (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda^n$.
Alors (x_n) est non nulle (même si : $\lambda = 0$, pour laquelle : $(x_n) = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$), et :
 $u((x_n)) = \lambda \cdot (x_n)$.
Donc : $\text{Sp}(u) =]-1, +1]$, et : $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), E_\lambda(u) = \text{Vect}((\lambda^n))$, et est donc de dimension 1.
- b. v opère lui un décalage vers la droite.
C'est comme pour u un endomorphisme de E .
On cherche de même les vecteurs propres et valeurs propres de v , en posant :
 $(x_n) \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, tels que : $(y_n) = v((x_n)) = \lambda \cdot (x_n)$, soit : $y_0 = 0 = \lambda \cdot x_0$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = x_n = \lambda \cdot x_{n+1}$.
Distinguons alors deux cas :
- $\lambda \neq 0$, et dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$, puisque :
 $x_0 = 0$, puis : $0 = x_0 = \lambda \cdot x_1$, d'où : $x_1 = 0$, et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$.
Donc une valeur propre de v ne peut être non nulle.
 - $\lambda = 0$, et dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda \cdot x_{n+1} = 0$, donc : $(x_n) = 0$.
- Finalement, v n'a pas de valeur propre.

53. Soit : $E = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

Pour f élément de E , on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de $[-\pi, +\pi]$ dans \mathbb{R} définies par :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi], u(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x-t) \cdot f(t) \cdot dt, \text{ et : } v(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x-t) \cdot f(t) \cdot dt.$$

a. Notons tout d'abord que, pour x fixé, les fonctions sous les intégrales définissant $u(f)(x)$ et $v(f)(x)$ sont des fonctions de t définies et continues sur $[-\pi, +\pi]$, ce qui garantit l'existence de ces intégrales.

Puis on peut écrire : $\forall x \in [-\pi, +\pi]$,

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(x) \cdot \cos(t) + \sin(x) \cdot \sin(t)] \cdot f(t) \cdot dt = \cos(x) \cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t) \cdot f(t) \cdot dt \right) + \sin(x) \cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t) \cdot f(t) \cdot dt \right).$$

$$\text{De même : } \forall x \in [-\pi, +\pi], v(f)(x) = \sin(x) \cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t) \cdot f(t) \cdot dt \right) - \cos(x) \cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t) \cdot f(t) \cdot dt \right).$$

b. Sous la forme précédente, il est immédiat que $u(f)$ et $v(f)$ sont des fonctions définies et continues de $[-\pi, +\pi]$ dans \mathbb{R} , et ceci pour toute fonction f de E .

Comme la linéarité de u et de v est immédiate, ce sont bien des endomorphismes de E .

c. La forme établie en a montre que : $\forall f \in E, u(f) \in \text{Vect}(\sin, \cos)$, de même pour v .

Soit maintenant f un vecteur propre de u et λ une valeur propre associée.

On a donc : $u(f) = \lambda \cdot f = A \cdot \sin + B \cdot \cos$.

On distingue alors deux cas :

- si : $\lambda \neq 0$, alors f est combinaison linéaire de \sin et \cos , donc on peut poser : $f = a \cdot \sin + b \cdot \cos$.

$$\text{Mais alors : } \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t) \cdot f(t) \cdot dt = b \cdot \pi, \text{ et : } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t) \cdot f(t) \cdot dt = a \cdot \pi, \text{ d'où : } u(f) = b \cdot \pi \cdot \cos + a \cdot \pi \cdot \sin = \pi \cdot f.$$

Donc π est valeur propre de u (et c'est la seule non nulle) et l'espace propre associé est $\text{Vect}(\sin, \cos)$.

- si : $\lambda = 0$, alors (\sin, \cos) étant libre, on doit avoir : $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t) \cdot f(t) \cdot dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t) \cdot f(t) \cdot dt = 0$.

Réciproquement, si f vérifie cette double condition, alors : $u(f) = 0$.

Donc 0 est valeur propre de u (il suffit de prendre : $f = 1$, comme vecteur propre) et son espace propre

$$\text{associé est : } E_0(u) = \{f \in E, \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t) \cdot f(t) \cdot dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t) \cdot f(t) \cdot dt = 0\}.$$

Pour v on travaille de la même façon.

Mais pour : $\lambda \neq 0$, (avec les mêmes notations), on doit avoir : $v(f) = b \cdot \pi \cdot \sin - a \cdot \pi \cdot \cos = \lambda \cdot (a \cdot \sin + b \cdot \cos)$, soit : $\lambda \cdot a = b \cdot \pi, \lambda \cdot b = -a \cdot \pi$, et en multipliant la première par a , et en soustrayant la deuxième multipliée par b , on aboutit à : $\lambda \cdot (a^2 + b^2) = 0$, soit : $f = 0$.

Donc v n'a pas de valeur propre non nulle.

En revanche, 0 est encore valeur propre de v pour le même espace propre que u .

54. a. La fonction g obtenue à partir de f est clairement définie sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R}^* .

En 0, g a une limite finie, puisque si on note F une primitive de f sur \mathbb{R} (qui existe puisque f est continue sur \mathbb{R}), alors : $\forall x \neq 0, g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$, et : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = g(0)$.

Autrement dit, g est continue en 0, et donc sur \mathbb{R} .

Enfin, la linéarité de φ est immédiate :

$$\forall (f_1, f_2) \in E^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \neq 0, \varphi(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(t) \cdot dt, \text{ soit :}$$

$$\varphi(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)(x) = \lambda_1 \cdot \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f_1(t) \cdot dt + \lambda_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f_2(t) \cdot dt = (\lambda_1 \cdot \varphi(f_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(f_2))(x),$$

et cette égalité étant évidemment vraie aussi pour : $x = 0$, on en déduit la linéarité de φ .

b. Soit : $f \in E$, et : $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que : $\varphi(f) = \lambda \cdot f$.

En notant F la primitive de f sur \mathbb{R} s'annulant en 0, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \lambda \cdot f(x) \cdot x = F(x), \text{ soit encore : } \lambda \cdot x \cdot F'(x) = F(x),$$

et F est solution de l'équation différentielle : $\lambda \cdot x \cdot y' - y = 0$.

Si : $\lambda = 0$, alors : $F = 0$, et : $f = F' = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre de φ .

$$\text{Si : } \lambda \neq 0, \text{ alors sur } \mathbb{R}^{**}, F \text{ vaut : } \forall x > 0, F(x) = C \cdot |x|^{\frac{1}{\lambda}} = C \cdot x^{\frac{1}{\lambda}}.$$

$$\text{On en déduit que } f \text{ vaut, sur } \mathbb{R}^{**} : \forall x > 0, f(x) = F'(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot C \cdot x^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Mais comme f doit être continue sur \mathbb{R} , elle doit admettre une limite finie en 0, ce qui entraîne :

$$\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0, \text{ soit : } 1 \geq \lambda > 0.$$

Les seules valeurs propres possibles de u sont donc les réels de l'intervalle $]0, 1]$.

Réciproquement, pour un tel réel λ , on a vu (avec les notations précédentes) que :

$$\forall x > 0, f(x) = C_+ \cdot x^{\frac{1}{\lambda} - 1}, \text{ et : } \forall x < 0, f(x) = C_- \cdot |x|^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Distinguons alors deux cas :

- $\lambda = 1$, et f est constante à droite et à gauche de 0 : on doit prendre : $C_+ = C_- = f(0)$, et les fonctions constantes non nulles sont bien (comme on le vérifie) vecteurs propres de φ pour la valeur propre 1, l'espace propre associé étant de dimension 1,

- $0 < \lambda < 1$, et f tend à droite et à gauche vers 0 en 0, et ceci pour tout choix (indépendamment) de C_+ et C_- , autrement dit les vecteurs propres (comme on le vérifie) sont définis pour ces valeurs de λ par :

$$\forall x > 0, f(x) = C_+ \cdot x^{\frac{1}{\lambda} - 1},$$

$$\forall x < 0, f(x) = C_- \cdot |x|^{\frac{1}{\lambda} - 1},$$

$$f(0) = 0;$$

et forment un espace vectoriel de dimension 2.

55. a. Soit : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), X \neq 0, A \cdot B \cdot X = \lambda \cdot X$.

Alors : $B \cdot A \cdot B \cdot X = \lambda \cdot B \cdot X$, et si $B \cdot X$ est non nul, on vient de trouver un vecteur propre de $B \cdot A$ associé à λ .

Or on ne peut avoir : $B \cdot X = 0$, car sinon : $A \cdot B \cdot X = 0 = \lambda \cdot X$, avec : $\lambda \neq 0, X \neq 0$.

Conclusion : λ est bien valeur propre (non nulle) de $B \cdot A$.

L'implication inverse est évidemment vraie, A et B jouant des rôles symétriques.

b. Supposons maintenant que 0 est valeur propre de $A \cdot B$.

Alors $A \cdot B$ n'est pas inversible (puisque'il existe : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), X \neq 0, A \cdot B \cdot X = 0$), et : $\det(A \cdot B) = 0$.

Mais alors : $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B) = 0$, et $B \cdot A$ n'est pas non plus inversible.

Dans ce cas, 0 est aussi valeur propre de $B \cdot A$.

c. Toute valeur propre de $A \cdot B$ étant valeur propre de $B \cdot A$ (nulle ou pas), et cette implication étant aussi vraie dans l'autre sens puisque A et B jouent des rôles symétriques, on en déduit que :

$$\text{Sp}(A \cdot B) = \text{Sp}(B \cdot A).$$

Remarque : on ne dit rien ici des multiplicités.

56. a. Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé.

Alors : $\forall x \geq 0, u(f)(x) = f(x+1) = \lambda \cdot f(x)$.

Si on note L la limite (finie) de f en $+\infty$, on a donc : $L = \lambda \cdot L$, ou encore : $L \cdot (1 - \lambda) = 0$.

Donc, si : $L \neq 0$, alors : $\lambda = 1$.

b. Réciproquement, 1 est valeur propre de u si on peut trouver f non nulle et avec une limite finie en $+\infty$, telle que : $\forall x \geq 0, f(x+1) = f(x)$.

f est donc une fonction périodique de période 1.

Mais une telle fonction ne peut admettre une limite finie en $+\infty$ que si elle est constante.

On vérifie alors sans peine que 1 est valeur propre de u et son espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.

c. On sait qu'il existe une valeur x_0 telle que : $f(x_0) \neq 0$, et il est immédiat par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x+n) = \lambda^n \cdot f(x_0).$$

f étant supposée tendre vers 0 en $+\infty$, la suite $(f(x+n))$ tend aussi vers 0, donc : $|\lambda| < 1$.

d. Soit enfin λ tel que : $|\lambda| < 1$.

Soit alors une fonction affine sur $[0,1]$ telle que : $f(0) = 1, f(1) = \lambda$, et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, n+1[, f(x) = \lambda^n \cdot f(x-n).$$

Alors f est affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$ et se raccorde en toutes les valeurs entières.

On vérifie de plus que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x+1) = \lambda \cdot f(x)$,

et enfin, f a bien une limite finie nulle en $+\infty$, puisque : $\max_{x \in [n, n+1]} |f(x)| = |\lambda|^n \cdot \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Autrement dit, on a trouvé un vecteur propre associé à λ pour u dans E .

Finalement : $\text{Sp}(u) =]-1, +1]$.

57. a. Puisque u est de rang 2, $\ker(u)$ est de dimension $(n-2)$.

Soit : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E , telle que (e_3, \dots, e_n) soit une base de $\ker(u)$.

$$\text{Alors la matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ s'écrit : } \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & d & \vdots & & \vdots \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

b. On peut alors calculer : $\chi_u(\lambda) = \lambda^{n-2} \cdot (\lambda^2 - (a+d)\lambda + (a \cdot d - b \cdot c))$.

$$\text{De plus : } \text{mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} a^2 + b \cdot c & c \cdot (a+d) & 0 & \dots & 0 \\ b \cdot (a+d) & b \cdot c + d^2 & \vdots & & \vdots \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ et :}$$

$$\text{tr}(u^2) = a^2 + d^2 + 2 \cdot b \cdot c = (a+d)^2 - 2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c, \text{ donc : } a \cdot d - b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot [(\text{tr}(u))^2 - \text{tr}(u^2)].$$

$$\text{Finalement : } \chi_u(\lambda) = \lambda^{n-2} \cdot (\lambda^2 - \text{tr}(u) \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot ((\text{tr}(u))^2 - \text{tr}(u^2))).$$

Diagonalisation, trigonalisation.

58. a. A est trigonalisable dans \mathbb{C} , et A est semblable à T , qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de A , répétées avec leur multiplicité.

$$\text{De plus, si : } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors : } \forall k \in \mathbb{N}, T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

b. Pour démontrer cette équivalence, on travaille par double implication :

[\Leftarrow] Si : $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$, alors les valeurs propres de A et de B étant les mêmes (avec la même multiplicité), on a immédiatement : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$.

[\Rightarrow] Supposons maintenant que : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$.

Notons μ_1, \dots, μ_N les valeurs propres distinctes de A et de B, et $m_A(\mu)$ (ou $m_B(\mu)$) la multiplicité de μ comme valeur propre de A (ou de B), avec la convention que, si μ n'est pas valeur propre de A (ou de B), alors : $m_A(\mu) = 0$ (ou : $m_B(\mu) = 0$).

Vu ce qu'on suppose ici, on a donc : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^N (m_A(\mu_i) - m_B(\mu_i)) \cdot \mu_i^k = 0$.

Si on examine alors les N premières égalités, on constate qu'elles correspondent à un système linéaire dont est solution le N-uplet (x_1, \dots, x_N) avec : $\forall 1 \leq i \leq N, x_i = m_A(\mu_i) - m_B(\mu_i)$.

Or le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde où les μ_1, \dots, μ_N sont distincts deux à deux.

Donc ce déterminant étant non nul, le système a une solution unique qui est le N-uplet nul.

Par conséquent : $\forall 1 \leq i \leq N, x_i = 0$, soit : $m_A(\mu_i) = m_B(\mu_i)$.

Donc A et B ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

59. a. Le rang de A vaut 2 puisque les deux premières colonnes forment une famille libre et les suivantes sont égales à la première.

Donc 0 est valeur propre de A puisque A n'est pas inversible.

b. Puisque le noyau de A (ou de l'endomorphisme de \mathbb{C}^4 canoniquement associé à A) est de dimension 4, 0 est valeur propre de A d'ordre au moins 2 et χ_A est donc factorisable par λ^2 , d'où l'écriture proposée de ce polynôme μ

c. La trace de A étant la somme des racines de χ_A , on a évidemment : $a + b + 0 + 0 = k$, soit : $a + b = k$. Puis A est trigonalisable et sur la diagonale d'une matrice triangulaire T semblable à A, on trouve a, b, et 0 répété 1 fois.

Or A^2 a comme éléments diagonaux 1, $(3 + k^2)$, 1 et 1, et est semblable à T^2 qui a sur sa diagonale les carrés des éléments diagonaux de T.

Donc : $6 + k^2 = a^2 + b^2 + 0 + 0$, soit la deuxième égalité.

d. Le cas : $a = b$, conduit à : $2.a = k$, et : $6 + k^2 = 2.a^2$, soit : $12 + 2.k^2 = k^2$, soit : $k^2 = -12$, et : $k = \pm 2.i.\sqrt{3}$, valeurs pour lesquelles on a : $a = b = \pm i.\sqrt{3}$.

Pour : $k = 2.i.\varepsilon.\sqrt{3}$, avec : $\varepsilon = \pm 1$, A a donc :

- une valeur propre double 0 et un espace propre associé de dimension 2, d'une part,
- une deuxième valeur propre double $\varepsilon.i.\sqrt{3}$, pour laquelle l'espace propre associé est de dimension

1, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ i.\varepsilon.\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, comme on le vérifie en résolvant le système 4×4 : $A.X = \varepsilon.i.\sqrt{3}.X$.

e. Pour les deux valeurs de k précédentes, A n'est pas diagonalisable puisque la deuxième valeur propre (double) a un espace propre associé qui est de dimension 1.

Pour toutes les autres valeurs, 0 est valeur propre double avec un espace propre associé de dimension 2, et les deux autres valeurs propres sont distinctes donc simples avec un espace propre associé pour chacune de dimension 1 : la matrice A est alors diagonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si : $k \neq \pm 2.i.\sqrt{3}$.

Remarque : pour k réel, la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans \mathbb{R} .

60. Soit M un vecteur propre de φ et λ sa valeur propre associée.

Alors : $\lambda.M = M + \text{tr}(M).I_n$, soit : $(\lambda - 1).M = \text{tr}(M).I_n$.

Distinguons alors deux cas :

- $\lambda = 1$, entraîne : $\text{tr}(M) = 0$.
- $\lambda \neq 1$, entraîne : M colinéaire à I_n .

Puisque les deux familles de matrices que l'on trouve sont dans des espaces respectivement de dimension 1 et $(n^2 - 1)$, on peut penser à une réciproque :

- $\forall M = \alpha \cdot I_n$, avec : $\alpha \in \mathbf{K}$, alors : $\phi(M) = \alpha \cdot I_n + n \cdot \alpha \cdot I_n = (n + 1) \cdot M$,
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si : $\text{tr}(M) = 0$, alors : $\phi(M) = M$.

En conclusion, ϕ est diagonalisable, puisqu'il admet deux valeurs propres, l'une qui vaut 1 est simple d'espace propre associé la droite $\text{Vect}(I_n)$, et l'autre qui vaut $(n + 1)$, qui est d'ordre $(n^2 - 1)$, puisque son espace propre associé est l'hyperplan formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices de trace nulle.

61. Puisque A est de rang 2, le théorème du rang appliqué à A (ou à son endomorphisme canoniquement associé) montre que 0 est valeur propre de multiplicité au moins $(n - 2)$.
 Puisque : $\text{tr}(A) = 0$, les deux dernière racines λ et μ de χ_A vérifient : $0 \cdot (n - 2) + \lambda + \mu = \text{tr}(A) = 0$, donc elles sont opposées.
 Si maintenant on suppose que : $\lambda = -\mu = 0$, alors χ_A admettrait comme seule racine la valeur 0.
 On aurait alors : $\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton montrerait que : $A^n = 0$ (on peut aussi dire que A serait semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, soit avec des 0 sur la diagonale, et cela entraîne aussi que : $A^n = 0$).
 Or A^n est supposée non nulle.
 Donc λ et μ sont non nulles et : $\lambda \neq \mu$, puisqu'elles sont opposées.
 Donc 0 est valeur propre d'ordre $(n - 2)$ avec un espace propre de dimension $(n - 2)$ et λ et μ sont des valeurs propres simples : A est diagonalisable.

62. Soit : $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et soit : $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

- a. Un calcul à la main donne : $A^t A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot I_4$
 Donc : $\det((A - \lambda \cdot I_4)^t (A - \lambda \cdot I_4)) = (\chi_A(\lambda))^2 = \det(((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot I_4)$,
 d'où : $(\chi_A(\lambda))^2 = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$,
 et puisque $\chi_A(\lambda)$ est de coefficient dominant égal à 1, on conclut que :
 $\chi_A(\lambda) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.
- b. Les racines de χ_A sont donc : $\lambda = a \pm i \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = a \pm i \cdot \omega$, avec la notation proposée.
 On distingue alors deux cas :
 • $b = c = d = 0$, et a est valeur propre de multiplicité 4,
 • $(b,c,d) \neq (0,0,0)$, et A a deux valeurs propres doubles qui sont $(a \pm i \cdot \omega)$.
- c. A nouveau avec deux cas :
 • $b = c = d = 0$, soit : $A = a \cdot I_4$, auquel cas A est diagonalisable puisque diagonale,
 • $(b,c,d) \neq (0,0,0)$.

Chaque valeur propre est double et en notant μ_ϵ ces valeurs propres avec : $\epsilon = \pm 1$, on a :

$$(A - \mu_\epsilon \cdot I_4) = \begin{pmatrix} -i \cdot \epsilon \cdot \omega & -b & -c & -d \\ b & -i \cdot \epsilon \cdot \omega & -d & c \\ c & d & -i \cdot \epsilon \cdot \omega & -b \\ d & -c & b & -i \cdot \epsilon \cdot \omega \end{pmatrix}, \text{ autrement dit la même matrice que A où on a}$$

remplacé par $-i \cdot \epsilon \cdot \omega$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ (on pourra poser : $\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$).

63. a. La linéarité de cette application est due à l'unicité du reste garantie par la division euclidienne.
 En effet, si P_1 et P_2 sont dans $\mathbf{K}_2[X]$, et si λ_1 et λ_2 sont des éléments de \mathbf{K} , alors :
 pour : $i = 1, 2, \exists (Q_i, R_i) \in \mathbf{K}_2[X]^2, X^3 \cdot P_i = A \cdot Q_i + R_i$, et : $\deg(R_i) \leq 2$, avec : $A = (X - \alpha) \cdot (X - \beta) \cdot (X - \gamma)$.
 Donc : $(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) \cdot X^3 = A \cdot (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) + (\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2)$, et comme : $\deg(\lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2) \leq 2$, on a ainsi le reste cherché soit : $u(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2 = \lambda_1 \cdot u(P_1) + \lambda_2 \cdot u(P_2)$.
- b. On peut choisir de travailler dans une base en lien avec la base de Lagrange associée aux valeurs α, β et γ .

On pose donc : $L_\alpha = (X - \gamma).(X - \beta)$, $L_\beta = (X - \alpha).(X - \gamma)$, $L_\gamma = (X - \alpha).(X - \beta)$.

Alors : $X^3.L_\alpha = A.Q + R$, où : $A = (X - \alpha).(X - \beta).(X - \gamma)$, $Q \in \mathbf{K}_2[X]$, $\deg(R) \leq 2$.

En évaluant en γ et β , on en déduit que : $R(\gamma) = R(\beta) = 0$, donc : $\exists C \in \mathbf{K}$, $R = C.(X - \gamma).(X - \beta)$.

Enfin : $\alpha^3.L_\gamma(\alpha) = R(\alpha)$, et : $C = \alpha^3$, et on a des résultats similaires pour L_α et L_β .

On a donc obtenu que : $u(L_\alpha) = \alpha^3.L_\alpha$, de même pour les deux autres polynômes.

Autrement dit la famille proposée est une base de $\mathbf{K}_2[X]$, formée de vecteurs propres de u , et u est bien diagonalisable.

64. On connaît des endomorphismes facilement diagonalisables : ceux qui, dans un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension n , admettent n valeurs propres distinctes.

Et on sait facilement calculer les valeurs propres de tels endomorphismes lorsque leur matrice représentative est triangulaire.

L'idée est donc de partir de : $u \in \mathcal{L}(E)$, de choisir une base \mathcal{B} de E , de noter : $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, et de montrer que A est la somme de deux matrices triangulaires à éléments diagonaux distincts deux à deux.

On note pour cela : $M = \max_{1 \leq i < j \leq n} |a_{i,i} - a_{j,j}|$, puis T et T' les matrices respectivement triangulaire supérieure

et triangulaire inférieure définies par :

- $\forall 1 \leq i < j \leq n$, $t_{i,j} = a_{i,j}$,
 $\forall 1 \leq j < i \leq n$, $t_{i,j} = 0$,
 $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{i,i} = a_{i,i} + i.(M + 1)$, et :
- $\forall 1 \leq i < j \leq n$, $t'_{i,j} = 0$,
 $\forall 1 \leq j < i \leq n$, $t'_{i,j} = a_{i,j}$,
 $\forall 1 \leq i \leq n$, $t'_{i,i} = a_{i,i} - i.(M + 1)$.

Il est immédiat que : $T + T' = A$.

D'autre part, si : $\exists 1 \leq i < j \leq n$, $t_{i,i} = t_{j,j}$, alors : $|a_{i,i} - a_{j,j}| = |i - j|. (M + 1) > M$, ce qui est impossible.

Donc les éléments diagonaux de T sont distincts deux à deux, de même pour T' .

Donc T et T' admettent chacune n valeurs propres distinctes, égales à leur éléments diagonaux, et sont donc toutes deux diagonalisables.

Si enfin, on note v et v' les endomorphismes de E ayant T et T' pour matrice représentative dans \mathcal{B} , alors : $u = v + v'$, v et v' étant diagonalisables.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

65. On appelle u l'endomorphisme canoniquement associé à A (donc dans \mathbb{R}^3).

On cherche alors une base de \mathbb{R}^3 telle que la matrice proposée représente u dans cette nouvelle base.

Pour la trouver, on peut travailler comme par analyse-synthèse.

Pour cela, si on note : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors : $e_1 \in \ker(u)$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = -e_2$, et : $e_2 \in \ker(u^2 + \text{id}_E)$.

Or : $\ker(u^2 + \text{id}_E) \neq \{0\}$, sinon $(u^2 + \text{id}_E)$ serait inversible, $(A^2 + I_3)$ aussi, et l'égalité : $A.(A^2 + I_3) = 0$, conduirait à : $A = 0$ (en multipliant par $(A^2 + I_3)^{-1}$).

Donc on peut trouver : $e_2 \in \ker(u^2 + \text{id}_E)$, $e_2 \neq 0$.

On pose alors : $e_3 = u(e_2)$, qui est aussi non nul puisque : $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$.

Enfin, A étant de taille 3×3 , a un polynôme caractéristique réel de degré 3, qui admet donc au moins une racine réelle.

Or cette racine (valeur propre de A) doit être racine du polynôme annulateur : $P = X^3 + X$, qui lui n'admet que 0 comme racine réelle.

Donc 0 est valeur propre de A et on peut trouver : $e_1 \in \mathbb{R}^3$, $e_1 \neq 0$, $u(e_1) = 0$.

Montrons enfin que la famille ainsi construite convient.

Soit donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs : $\alpha_1.e_1 + \alpha_2.e_2 + \alpha_3.e_3 = 0$.

Alors en prenant deux fois l'image par u , on obtient : $\alpha_2.e_3 - \alpha_3.e_2 = 0$, et : $-\alpha_2.e_2 - \alpha_3.e_3 = 0$.

En multipliant la première égalité par α_3 , la deuxième par α_2 et en ajoutant, on obtient : $(\alpha_3^2 + \alpha_2^2).e_3 = 0$.

Puisque e_3 est non nul, on en déduit que : $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, et en revenant à l'égalité de départ : $\alpha_1 = 0$.

La famille est donc libre et constitue une base de \mathbb{R}^3 .

Enfin, la matrice de u dans cette base (notée \mathcal{B}) est bien : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : si on appelle P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} , elle permet d'écrire :

$A = P.B.P^{-1}$, et A est bien semblable à B .

66. On dispose d'un polynôme annulateur scindé à racines simples dans \mathbb{C} , qui est : $X^p - 1$.

Donc A est diagonalisable comme matrice à coefficients complexes, et ses valeurs propres sont des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité.

D'autre part, χ_A est à coefficients réels (puisque A est une matrice réelle), donc ses racines sont réelles ou complexes conjuguées.

Si χ_A a des racines réelles, elles ne peuvent donc valoir que ± 1 , et A est semblable à une matrice diagonale D comportant sur sa diagonale ± 1 .

Or dans ce cas : $D^2 = I_2$, donc : $A^2 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

Si χ_A n'a pas de racines réelles, alors elles sont complexes conjuguées et valent $e^{\pm i\theta}$, pour une valeur : $\theta \in \mathbb{R}$, avec : $\theta \neq 0 (\pi)$.

Mais la somme de ces valeurs propres vaut $\text{tr}(A)$, et également : $2.\cos(\theta)$.

Enfin, A étant à coefficients entiers, $\text{tr}(A)$ est entier, et comme : $\theta \neq 0 (\pi)$, on doit avoir : $2.\cos(\theta) \in \{-1, 0, 1\}$.

• si : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, alors : $\theta = \pm \frac{\pi}{3} (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}$.

On a alors : $D^6 = I_2$, donc : $A^6 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

• si : $\cos(\theta) = 0$, alors : $\theta = \pm \frac{\pi}{2} (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, puis : $D^4 = A^4 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

• si : $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$, alors : $\theta = \pm \frac{2\pi}{3} (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$, d'où :

$D^3 = I_2$, donc : $A^3 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

Finalement, dans tous les cas : $A^{12} = I_2$.

67. a. On peut remarquer que : ${}^t M^2 = I_n - M$, donc : $\det(M - I_n) = (-1)^n . (\det(M))^2$.

Il est alors évident que : $(1 \notin \text{Sp}(M)) \Leftrightarrow (\det(M - I_n) \neq 0) \Leftrightarrow (\det(M) \neq 0) \Leftrightarrow (M \text{ inversible})$.

b. De plus : ${}^t M^2 = I_n - M$, entraîne : $I_n - M = (M^2 - I_n)^2 = (I_n - M).(I_n + M).(I_n - M^2)$, et donc :

$$(I_n - M).(I_n + M).(I_n - M^2) - I_n = 0 = (I_n - M).(-M^3 - M^2 + M).$$

On a donc le polynôme : $P = (X - 1).X.(X^2 + X - 1)$, qui est annulateur pour M , scindé à racines simples et donc M est diagonalisable.

68. $P'(0)$ étant non nul, on peut écrire : $P = a_1.X + \dots + a_n.X^n$, avec : $a_1 \neq 0$.

Donc : $a_1.u + \dots + a_n.u^n = 0$, et en divisant par a_1 on peut écrire : $u = \alpha_2.u^2 + \dots + \alpha_n.u^n$.

Alors :

- $\forall x \in \ker(u)$, $u(x) = 0$, et donc : $u^2(x) = 0$, d'où : $x \in \ker(u^2)$,
- $\forall x \in \ker(u^2)$, $u^2(x) = 0$, donc : $\forall k \geq 2$, $u^k(x) = 0$, et à l'aide de l'égalité précédente : $u(x) = 0$.

Donc : $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Soit : $x \in E$.

Alors : $u(x) = \alpha_2.u^2(x) + \dots + \alpha_n.u^n(x) = u^2(\alpha_2.x + \dots + \alpha_n.u^{n-2}(x))$, et : $[x - (\alpha_2.x + \dots + \alpha_n.u^{n-2}(x))] \in \ker(u)$.

Si donc on pose ce dernier vecteur égal à x_k , et : $x_i = (\alpha_2.x + \dots + \alpha_n.u^{n-2}(x))$, alors :

- $x_k \in \ker(u)$,
- $x_i \in \text{Im}(u)$,
- $x_k + x_i = x$.

On a donc : $\text{Im}(u) + \ker(u) = E$.

Montrons maintenant que la somme est directe, et pour cela, soit : $y \in \text{Im}(u) \cap \ker(u)$.

Alors : $\exists x \in E$, $y = u(x)$, et : $u(y) = 0 = u^2(x)$, donc : $x \in \ker(u^2)$, d'où : $x \in \ker(u)$, et : $u(x) = y = 0$.

On a donc bien : $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

autrement dit Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que P est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que : $P(u) = 0$, $P'(0) \neq 0$.

Montrer que : $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

69. a. On commence par calculer B^k , pour : $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur \mathbb{N} , en prouvant que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B^k = \begin{pmatrix} A^k & k.A^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Vu les propriétés sur les polynômes de matrices, on en déduit que si : $P = \sum_{k=0}^N a_k . X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors :

$$P(B) = \sum_{k=0}^N a_k . B^k = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \begin{pmatrix} A^k & k.A^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N a_k . A^k & \sum_{k=1}^N a_k . k . A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^N a_k . A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

b. Si B est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans \mathbb{R} pour B.

On a alors : $0 = P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$, donc : $P(A) = A.P'(A) = 0$.

Donc A est diagonalisable.

De plus, soit λ une valeur propre de A.

Puisque $X.P'$ est également annulateur pour A, λ est racine de P et de $X.P'$, et : $\lambda.P'(\lambda) = 0$.

Mais P et P' n'ayant aucune racine en commun, donc : $P'(\lambda) \neq 0$, et : $\lambda = 0$.

Autrement dit A est diagonalisable et sa seule valeur propre est 0 : A est nulle.

Réciproquement, il est immédiat que si A est nulle, B est diagonalisable.

70. a. Dans cette question, u étant inversible, 0 n'est pas valeur propre de u ni de u^2 , u^2 étant aussi inversible.

- Si u est diagonalisable, alors dans une base de E formée de vecteurs propres de u, la matrice représentative de u est une matrice diagonale D.

Il est alors évident que la matrice de u^2 est D^2 donc u^2 est bien diagonalisable.

- Supposons maintenant u^2 diagonalisable, et considérons le polynôme : $P = \prod_{\lambda \in Sp(u^2)} (X - \lambda)$, qui est

scindé à racines simples et annulateur pour u^2 .

C'est en effet le polynôme minimal de u^2 et il est bien annulateur de u^2 .

On pose alors : $Q = \prod_{\lambda \in Sp(u)} [(X - \sqrt{\lambda}).(X + \sqrt{\lambda})]$, et Q est scindé à racines simples car les valeurs

propres de u^2 sont non nulles.

Puis : $Q(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u^2)} [(u - \sqrt{\lambda}.id_E).(u + \sqrt{\lambda}.id_E)] = \prod_{\lambda \in Sp(u^2)} (u^2 - \lambda.id_E) = P(u^2) = 0$,

et Q est annulateur pour u, scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

b. • On a toujours l'implication : (u diagonalisable) \Rightarrow (P(u) diagonalisable), à l'aide d'une base de E formée de vecteurs propres de u.

- Réciproquement, si P(u) est diagonalisable, notons A un polynôme annulateur scindé à racines simples pour P(u), avec : $A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$.

Alors le polynôme : $Q = (P - \lambda_1) \dots (P - \lambda_p)$, est annulateur pour P(u) (comme précédemment).

Mais les différents facteurs $(P - \lambda_k)$ n'ont pas de racine commune.

En effet, si c'était le cas, on aurait : $P(\alpha) - \lambda_i = 0 = P(\alpha) - \lambda_k$, avec : $i \neq k$, soit : $\lambda_i = \lambda_k$, ce qu'on a exclu.

Enfin, supposons que l'un de ces facteurs $(P - \lambda_i)$ ait une racine double α .

Alors on aurait : $P(\alpha) - \lambda_i = 0 = (P - \lambda_i)'(\alpha) = P'(\alpha)$.

Or $P'(\alpha)$ est valeur propre de $P'(u)$, ce qui entraînerait que 0 est valeur propre de $P'(u)$, ce qui est impossible puisqu'on suppose ici que : $P'(u) \in GL(E)$.

Conclusion : le polynôme Q est annulateur pour u, scindé sur \mathbb{C} et à racines simples, donc u est bien diagonalisable.

71. a. Puisque H ne contient pas de matrice inversible, on a : $I_n \notin H$, et : $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Soit maintenant A une matrice nilpotente.

Alors : $\exists \alpha \in \mathbf{K}, \exists M \in H, A = \alpha.I_n + M$.

La matrice M n'étant pas inversible, il existe : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}), X \neq 0, M.X = 0$, soit : $A.X = \alpha.X$.

Autrement dit X est vecteur propre de A associé à la valeur propre α .

Mais A étant nilpotente, elle a pour seule valeur propre possible 0 donc : $\alpha = 0$, et : $A = M \in H$.

b. Si H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, supposons qu'il ne contienne pas de matrice inversible.

Alors il contient les matrices $E_{i,i+1}$, pour : $1 \leq i \leq n - 1$, et la matrice $E_{n,1}$.

En effet, elles sont toutes nilpotentes (d'ordre 2 car leur carré est nul).

H étant stable par combinaison linéaire, H contient alors leur somme qui vaut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ et qui est inversible.}$$

Donc H doit contenir au moins une matrice inversible, et : $H \cap \text{GL}_n(\mathbf{K}) \neq \emptyset$.

Sous-espaces vectoriels stables.

72. a. Supposons donc que F soit un sous-espace vectoriel de E stable par F , et que f est diagonalisable.

Notons \mathcal{B} une base de E formée de vecteurs propres de f .

L'endomorphisme f' induit par f dans F est aussi diagonalisable (et ses vecteurs propres sont des vecteurs propres de F).

Considérons alors une base \mathcal{B}_F de F formée de vecteurs propres de f .

On peut alors compléter \mathcal{B}_F en une base de E à l'aide de vecteurs de \mathcal{B} , en : $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$, avec : $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Si maintenant on pose : $G = \text{Vect}(\mathcal{B}')$, alors G est clairement stable par f (car ayant une base formée de vecteurs propres de f) et : $F \oplus G = E$.

b. Si : $\dim(E) = 1$, le résultat est immédiat puisque tout endomorphisme de E est diagonalisable.

Supposons le résultat établi pour tout \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à un entier :

$n \geq 1$, donné, et soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $(n+1)$, et : $f \in \mathcal{L}(E)$, ayant la propriété annoncée.

Soit λ une valeur propre de f , et $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé.

Ce sous-espace de E est clairement stable par f .

- Si : $E_\lambda(f) = E$, alors f est « diagonalisé ».

- Sinon, $E_\lambda(f)$ admet un supplémentaire G dans E , stable par f , avec : $\dim(G) \leq n$, et on peut appliquer à G et à l'endomorphisme f_G induit par f dans G l'hypothèse de récurrence.

f_G étant diagonalisable, on peut former une base de G à l'aide de vecteurs propres de f_G donc de f , qu'on complète à l'aide d'une base de $E_\lambda(f)$ en une base de E , formée donc de vecteurs propres de f . f est donc bien diagonalisable, ce qui termine la récurrence.

73. a. Il est immédiat que C_u est inclus dans $\mathcal{L}(E)$, non vide car contenant 0 et stable par combinaison linéaire, du fait de la linéarité de u .

b. L'implication $[\Rightarrow]$ est un théorème.

Supposons que tout sous-espace propre de u est stable par g .

Alors : $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \forall x \in E_\lambda(u), uog(x) = \lambda \cdot g(x)$, car : $g(x) \in E_\lambda(u)$, et : $gou(x) = g(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot g(x)$.

Donc pour ces vecteurs, on a bien : $uog(x) = gou(x)$.

Mais comme on peut former une base de E à l'aide de vecteurs propres de u , on en déduit que l'égalité précédente est vraie pour une base de E , donc que : $uog = gou$.

c. Puisque u est diagonalisable, on sait que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda.$$

Considérons alors l'application φ définie de C_u dans $\mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))$, où on a noté $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

les valeurs propres distinctes de u , qui à g dans C_u fait correspondre le p -uplet de ses restrictions dans les sous-espaces propres de u .

Cette application est bien définie du fait de la question b.

De plus, elle est clairement linéaire.

Enfin, elle est bijective, car si on se donne g_1, \dots, g_p des endomorphismes de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$, il existe un unique g qui admet ces endomorphismes comme restrictions, défini par :

$$\forall \mathcal{B}_k, \text{ base de } E_{\lambda_k}(u), \text{ l'image de tout vecteur } e \text{ de cette base par } g \text{ vaut : } g(e) = g_k(e).$$

Le seul antécédent possible (celui qu'on vient de trouver) commute de plus avec u puisqu'il stabilise tous les sous-espaces propres de u .

Comme φ est donc un isomorphisme, on en déduit que :

$$\dim(C_u) = \dim(\mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) + \dots + \dim(\mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_{\lambda}^2.$$

d. La relation précédente montre que : $\dim(C_u) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

De plus, les n endomorphismes proposés commutent avec u donc sont dans C_u .

Enfin, si : $\alpha_0 \cdot \text{id}_E + \dots + \alpha_{n-1} \cdot u^{n-1} = 0$, cela fournit un polynôme annulateur pour u qui est :

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X + \dots + \alpha_{n-1} \cdot X^{n-1}.$$

Or ce polynôme doit admettre comme racines les n valeurs propres distinctes de u : cela n'est possible que si P est nul (car : $\deg(P) \leq n - 1$).

Donc : $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, la famille est libre et c'est bien une base de C_u .

74. a. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p stable par u.

La matrice de u dans une base : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$, de E adaptée à F est de la forme :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = M, \text{ où } A \text{ est en fait la matrice dans } \mathcal{B}_F \text{ de } \hat{u}, \text{ endomorphisme induit par } u \text{ dans } F.$$

$$\text{Alors : } \chi_u(\lambda) = (-1)^n \cdot \det(M - \lambda \cdot I_n) = (-1)^p \cdot \det(A - \lambda \cdot I_p) \cdot (-1)^{n-p} \cdot \det(C - \lambda \cdot I_{n-p}) = \chi_{\hat{u}}(\lambda) \cdot \chi_C(\lambda),$$

et donc $\chi_{\hat{u}}$ divise bien χ_u .

b. Il y a des entiers k tels que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ soit libre.

En effet, pour : $k = 1$, la famille $\{x\}$ est libre, étant donné que x est non nul.

De plus, les familles de type précédent ne peuvent comporter plus de n vecteurs, car : $\dim(E) = n$.

Il existe donc un plus grand entier p tel que $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ soit libre.

Puis $\{x, u(x), \dots, u^p(x)\}$ est liée (par définition de p) et donc :

$$\exists (a_0, \dots, a_p) \in \mathbf{K}^{p+1}, \text{ non tous nuls, tel que : } a_0 \cdot x + \dots + a_p \cdot u^p(x) = 0.$$

Or si a_p était nul, tous les autres le serait aussi de fait de la liberté de la famille $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$.

Donc a_p est non nul et $u^p(x)$ est combinaison linéaire de $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$, donc appartient à F_x .

c. Tous les vecteurs parmi $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$ ont évidemment une image par u dans F_x .

Il est alors clair que tout vecteur de F_x a son image par u dans F_x , et F_x est stable par u.

d. La matrice de \hat{u} dans la base précédente de F_x est : $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}$, où la dernière colonne

correspond aux coordonnées de $u^p(x)$ dans la base $\{x, \dots, u^{p-1}(x)\}$.

Le polynôme caractéristique de \hat{u} est alors : $\chi_{\hat{u}}(\lambda) = [[\lambda^p - \alpha_{p-1} \cdot \lambda^{p-1} - \dots - \alpha_0]$, comme on le montre en développant par exemple le déterminant correspondant par rapport à la dernière colonne.

e. Et dans ce cas : $\chi_{\hat{u}}(u)(x) = [u^p(x) - \alpha_{p-1} \cdot u^{p-1}(x) - \dots - \alpha_0 \cdot x] = 0$.

Enfin, $\chi_{\hat{u}}$ divise χ_u avec par exemple : $\chi_u = Q \cdot \chi_{\hat{u}}$, donc : $\chi_u(u)(x) = Q(u) \circ \chi_{\hat{u}}(u)(x) = Q(u)(0) = 0$.

f. On a montré que : $\forall x \in E, x \neq 0, \chi_u(u)(x) = 0$.

Comme il est évident de plus que : $\chi_u(u)(0) = 0$, on l'a montré pour tout vecteur de E.

Donc : $\chi_u = 0$.

75. a. Puisque le polynôme minimal de u est annulateur pour u, toute valeur propre de u (donc en particulier λ) est racine de polynôme.

b. Si α une racine du polynôme minimal μ_u alors on peut écrire : $\mu_u = (X - \alpha) \cdot Q$, avec : $\deg(Q) < \deg(\mu_u)$.

Si α n'est pas valeur propre de u, alors $(u - \alpha \cdot \text{id}_E)$ est inversible.

Donc avec l'égalité : $\mu_u(u) = (u - \alpha \cdot \text{id}_E) \circ Q(u) = 0$, on en déduit, en composant par $(u - \alpha \cdot \text{id}_E)^{-1}$ que :

$Q(u) = 0$, ce qui fournit un polynôme (non nul) de degré strictement inférieur à celui de μ_u , annulateur pour u, ce qui est impossible.

Donc $(u - \alpha \cdot \text{id}_E)$ n'est pas inversible, d'où : $\det(u - \alpha \cdot \text{id}_E) = 0$, et : $\chi_u(\alpha) = 0$.

c. En a, on a montré que toute valeur propre de u est racine du polynôme minimal, et en b, que toute racine de μ_u est valeur propre de u.

Conclusion : χ_u et μ_u ont les mêmes racines.