Réduction d'endomorphismes (corrigé des indispensables).

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

1. Le polynôme caractéristique s'obtient facilement à partir de : $\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda.I_3)$, que l'on développe par exemple par rapport à sa deuxième colonne, ce qui donne : $\chi_f(\lambda) = -\lambda.(1-\lambda)^2$.
   f admet donc une valeur propre simple (0) et une valeur propre double (1).
   Le calcul des espaces propres se fait en résolvant : $A.X = \lambda.X$, avec les deux valeurs propres trouvées, et où X est une matrice colonne : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On trouve : $E_0(f) = \text{Vect}((1, 1, -2))$, et : $E_1(f) = \text{Vect}((1, 1, -1), (0, 1, 0))$.

2. a. Les deux applications u et v sont bien des applications de E dans E.
   En effet, l'image de tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme réel, et :
   $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P') \leq n - 1$, d'où : $\deg(u(P)) \leq n$, soit : $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   On a évidemment le même résultat pour v.
   Enfin, la linéarité de la dérivation des polynômes entraîne la linéarité de u et de v.
   b. Pour obtenir la matrice de u ou de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on calcule :
   $u(1) = 1$, et : $\forall 1 \leq k \leq n$, $u(X^k) = (1-k).X^k + k.X^{k-1}$.
   $v(1) = 0$, $v(X) = -2.X$, $\forall 2 \leq k \leq n$, $v(X^k) = k.(k+1).X^k - k.(k-1).X^{k-2}$.
   D'où : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix}$, et : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & -n.(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n.(n+1) \end{pmatrix}$.
   On en déduit χ_u et χ_v et comme les déterminants correspondants sont triangulaires, on obtient :
   $\chi_u(\lambda) = (-1)^{n+1}.\prod_{k=0}^{n}((1-k)-\lambda)$, et : $\chi_v(\lambda) = (-1)^{n+1}.\prod_{k=0}^{n}(k.(k+1)-\lambda)$.
   Les valeurs propres de u et de v sont évidemment les éléments diagonaux de leur matrice représentative, donc elles valent :
   - 1, 0, -1, …, - (n – 1), et sont toutes simples pour u,
   - k.(k + 1), pour : $0 \leq k \leq n$, et sont toutes simples pour v.

   Les (n + 1) valeurs proposées pour v sont bien distinctes puisque la fonction : $x \mapsto x.(x+1)$, est strictement croissante donc injective de $[0,+\infty)$ dans $[0,+\infty)$.
   c. Les valeurs propres de u étant toutes simples, les espaces propres de u sont tous de dimension 1.
   De même pour v.
   d. Ces endomorphismes admettant chacun (n + 1) valeurs propres distinctes dans un espace de dimension (n+1), ils sont tous deux diagonalisables.

3. a. Puisque χ_u est un polynôme à coefficients complexes, il admet au moins une racine (pourvu que la dimension de l'espace vectoriel ne soit pas nul), et u admet au moins une valeur propre.
   b. Puisque u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
   En particulier, si λ est la valeur propre de u précédente, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v.
   En effet : $\forall x \in E_\lambda(u)$, $v(u(x)) = \lambda.v(x) = u(v(x))$, et : $v(x) \in E_\lambda(u)$.
   Si on appelle v_λ l'endomorphisme induit par v dans $E_\lambda(u)$, et donc défini par : $\forall x \in E_\lambda(u)$, $v_\lambda(x) = v(x)$, alors v est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension au moins 1 et à ce titre, il admet au moins une valeur propre μ, ainsi qu'un vecteur propre y.
   Ce vecteur y vérifie donc : $v_\lambda(y) = \mu.y = v(y)$, et étant dans $E_\lambda(u)$, il vérifie aussi : $u(y) = \lambda.y$.
   Etant enfin non nul (comme vecteur propre de v_λ), il est bien vecteur propre commun à u et à v.

4. a. Si u est injectif, alors pour tout entier k, u^k est aussi injectif.
   Par contraposée, si 0 est valeur propre de u^k pour une valeur k donnée, alors u^k n'est pas injectif et u ne l'est pas non plus, autrement dit 0 est valeur propre de u.
   b. 0 n'est pas valeur propre de u est équivalent à dire que u est injectif ou encore que u est bijectif puisque E est de dimension finie et c'est encore équivalent (pour la même raison) au fait que u est surjectif.

5. a. Si on calcule les produits proposés, on obtient :
   $M.T_1 = \begin{pmatrix} \lambda.I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.B - \lambda.I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$, et : $T_2.M = \begin{pmatrix} -\lambda.I_n & -A \\ 0 & B.A - I_p \end{pmatrix}$.
   Donc en calculant les déterminants de ces matrices, on en déduit (certaines sont triangulaires) :
   $\det(M).\det(T_1) = \det(M).(-1)^n = \det(A.B - \lambda.I_n) = \chi_{A.B}(\lambda).(-1)^n$, et :
   $\det(T_2).\det(M) = \det(M).(-1)^n.(-\lambda)^p = \det(B.A - \lambda.I_p).(-\lambda)^n = \chi_{B.A}(\lambda).(-\lambda)^n.(-1)^p$.
   D'où : $\chi_{B.A}(\lambda).\lambda^n = \det(M).(-\lambda)^p.(-1)^p = \chi_{A.B}(\lambda).\lambda^p$.
   b. Si A et B sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors : n = p, et l'anneau des polynômes étant intègre, on en déduit que : $\chi_{B.A}(\lambda).\lambda^n - \chi_{A.B}(\lambda).\lambda^n = 0 = \lambda^n.[\chi_{B.A}(\lambda) - \chi_{A.B}(\lambda)]$, soit : $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$.

6. a. Il suffit d'écrire :
   $\forall\ x \neq 0,\ \chi_{u^{-1}}(x) = \det(x.id_E - u^{-1}) = \det(u^{-1}).\det(x.u - id_E) = \det(u^{-1}).\det((-x).(\frac{1}{x}.id_E - u)$, et donc :
   $\chi_{u^{-1}}(x) = (-x)^n.\det(u^{-1}).\chi_u\left(\frac{1}{x}\right)$.
   b. Puisque u et u^{-1} sont des automorphismes de E, ils sont injectifs et 0 n'est valeur propre ni de l'un ni de l'autre.
   Donc : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\chi_{u^{-1}}(\lambda) = 0) \Leftrightarrow (\chi_u\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0)$.
   Les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u (avec la même multiplicité).

Diagonalisation, trigonalisation.

7. On notera u l'endomorphisme canoniquement associé à A (dans : E = $\mathbb{R}^3$ donc).
   Alors : $\chi_A(\lambda) = \chi_u(\lambda) = (-1)^3.\begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3.\begin{vmatrix} 11-\lambda & -5 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & -\lambda \\ 5 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda.(\lambda-1).(\lambda-16)$,
   en ajoutant la deuxième colonne à la troisième et en développant.
   La matrice A (et donc u) est diagonalisable puisqu'elle admet trois valeurs propres distinctes (simples) et est de taille 3×3, et par ailleurs ses espaces propres sont de dimension 1.
   En résolvant les systèmes : A.X = λ.X, pour : λ = 0, 1 et 16, on trouve les sous-espaces propres de A et de u qui sont :
   $E_0(u) = \ker(u - 0.id_E) = \ker(u) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$,
   $E_1(u) = \ker(u - 1.id_E) = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$,
   $E_{16}(u) = \ker(u - 16.id_E) = \mathrm{Vect}((2,-1,1))$.
   On peut alors poser P, matrice de passage dans $\mathbb{R}^3$ de la base canonique à la base de vecteurs propres qu'on vient de trouver, soit : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

8. a. On sait que B (comme v) admettant n valeurs propres distinctes et étant de taille n×n est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
   Soit X une matrice colonne non nulle, et : $\lambda \in \mathbb{C}$, tels que : B.X = λ.X.
   Alors : A.B.X = λ.A.X = B.A.X, autrement dit A.X est dans le sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ.
   Or ce sous-espace propre est de dimension 1 et X étant non nul sur cette droite en constitue une base.
   Donc : $\exists\ \mu \in \mathbb{C}$, A.X = μ.X, ce qui montre que X est vecteur propre de A.

b. Le résultat obtenu pour A et B se transpose bien sûr aux endomorphismes u et v.

Soit alors : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de v, donc de u, et :

$\forall\ 1 \le i \le n$, $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{C}$, $v(e_i) = \lambda_i.e_i$, et : $\exists\ \mu_i \in \mathbb{C}$, $u(e_i) = \mu_i.e_i$.

Si on note alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à cette base $\mathscr{B}$, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = D_\mu \text{, et : } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v) = P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D_\lambda .$$

A et B sont bien diagonalisables par l'intermédiaire de la même matrice P.

c. Le problème posé dans cette question revient à savoir si on peut trouver un n-uplet de complexes qui vérifie : $A = \alpha_0.I_n + \alpha_1.B + \dots + \alpha_{n-1}.B^{n-1}$.

Si on multiplie à des deux côtés de l'égalité, à droite par P^{-1} et à gauche par P, ce problème est équivalent à trouver un n-uplet de complexes tel que : $D_\mu = \alpha_0.I_n + \alpha_1.D_\lambda + \dots + \alpha_{n-1}.D_\lambda^{n-1}$

Or toutes les matrices étant diagonales, cela se ramène à un système de n équations (les coefficients diagonaux) à n inconnues (les α_i), qui s'écrit : $\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0.1 + \alpha_1.\lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1}.\lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0.1 + \alpha_1.\lambda_n + \dots + \alpha_{n-1}.\lambda_n^{n-1} \end{cases}$.

Or on reconnaît un système de Cramer puisque le déterminant est un Vandermonde non nul.

Donc il existe bien un (unique) n-uplet : $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, tel que : $A = \alpha_0.I_n + \alpha_1.B + \dots + \alpha_{n-1}.B^{n-1}$.

9. Considérons les deux noyaux $\ker(u + id_E)$ et $\ker(u - id_E)$.
   - ils sont en somme directe puisque :
   $\forall\ x \in \ker(u - id_E) \cap \ker(u + id_E)$, $u(x) = x$, et : $u(x) = -x$, soit : $x = -x$, et donc : $x = 0$.
   - leur somme donne E.

   En effet, l'hypothèse faite montrer que : $\mathrm{Im}(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u + id_E) \subset E$, donc : $\mathrm{rg}(u - id_E) + \mathrm{rg}(u + id_E) \le n$.
   Donc : $\dim(\ker(u - id_E)) + \dim(\ker(u + id_E)) \ge n$, mais puisque : $\ker(u - id_E) \oplus \ker(u + id_E) \subset E$, la somme de leurs dimensions ne peut excéder n et est donc égale à n.
   Conclusion : $\ker(u - id_E) \oplus \ker(u + id_E) = E$.
   En réunissant une base de chacun de ces deux noyaux, on en déduit une base de E formée de vecteurs propres de u, et u est diagonalisable.
   Au vu de cette base, le spectre de u vaut {1}, {-1} ou {1,-1}, mais <u>u peut n'avoir qu'une seule valeur propre</u>.
   En effet, l'un des deux noyaux peut être réduit à {0} comme avec : $u = id_E$, pour lequel : $\ker(u + id_E) = \{0\}$.

10. On commence par calculer le polynôme caractéristique de ces matrices et après développement, on trouve : $\chi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, et : $\chi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.
    Notons que dans ce cas, les matrices ne peuvent être diagonalisables car sinon, A_1 par exemple serait semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur sa diagonale (donc I_3), et on aurait : $A_1 = P.I_3.P^{-1} = I_3$.
    On calcule ensuite les espaces propres de ces matrices, et après résolution des systèmes, on obtient :
    $E_{-1}(A_1) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, ce qui confirme que A_1 n'est pas diagonalisable, et : $E_2(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
    - En notant u_1 l'endomorphisme canoniquement associé à A_1, trigonaliser A_1 revient à trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u_1 est triangulaire supérieure.

    On choisit alors pour premiers vecteurs d'une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ les vecteurs (-1,0,1) et (2,1,0) et si on choisit un troisième vecteur, formant avec ces deux premiers une famille : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, libre, alors on obtient comme matrice représentative de u_1 une matrice du type : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.
    Puisque la trace de cette matrice doit valoir -3, on sait que le dernier coefficient diagonal vaudra -1 (c'est aussi la troisième racine de χ_{A_1}.
    On choisit ainsi : $e_1 = (-1,0,1)$, $e_2 = (2,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, qui forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ (déterminant non

nul), et : $u_1(e_3) = (-1,-1,-2) = - e_1 - e_2 - e_3$, d'où : $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si on pose : $P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors : $P_1^{-1}.A_1.P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on aurait pu chercher e_3 de telle sorte que la troisième colonne de cette matrice soit (0,1,1).

• Pour u_2, associé à A_2, on commence par poser : $e_1 = (1,1,0)$.

On cherche ensuite e_2 de telle sorte que :

$u_2(e_2) = 1.e_1 + 2.e_2$, ce qui conduit à un système dont une solution est par exemple : $e_2 = (1,0,1)$,

ou : $u_2(e_2) = \alpha.e_1 + 2.e_2$, soit : $(u_2 - 2.\text{id})(e_2) \in \ker(u_2 - 2.\text{id})$, ou encore : $e_2 \in \ker((u_2 - 2.\text{id})^2)$.

On pose enfin e_3 de telle sorte que la famille : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, soit libre, par exemple : $e_3 = (0,0,1)$, et :

$u_2(e_3) = (1,0,3) = e_2 + 2.e_3$.

En posant : $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors : $P_2^{-1}.A_2.P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Utilisation de la diagonalisabilité.

11. • Pour la première matrice, son polynôme caractéristique s'obtient facilement en ajoutant les quatre c colonnes du déterminant et : $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2.(4-\lambda)$.

On obtient ensuite les sous-espaces propres de A avec les systèmes habituels :

$E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et A est diagonalisable.

Puis on pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on a : $D = P^{-1}.A.P$.

Enfin : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} \end{pmatrix}$.

• Pour la troisième, on obtient : $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda).(2-\lambda)^3$, en ajoutant à chaque ligne la première.

Puis : $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, A est donc diagonalisable et on construit P et D.

Enfin : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} \end{pmatrix}$.

• Pour la deuxième, on obtient : $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda).(3-\lambda)^2$, mais : $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$.

A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur ℝ.
On construit alors une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ pour trigonaliser u, canoniquement associé à A, en posant : $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, et on cherche e_3 de telle sorte que : $u(e_3) = e_2 + 3.e_3$.
On trouve alors : $e_3 = (0, 0, 1)$.

On pose ensuite : $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, et : ∀ n ∈ ℕ, $A^n = P.T^n.P^{-1}$.

Enfin on obtient par récurrence : ∀ n ∈ ℕ, $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3^n & n.3^{n-1}\\0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$, puis : $A^n = \begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} & n.3^{n-1}\\\frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} & n.3^{n-1}\\0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$.

12. Puisque A admet trois valeurs propres distinctes et étant de taille 3×3, A est diagonalisable.

Soit alors : P ∈ $Gl_3(\mathbb{R})$, telle que : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} = D$.

On a alors : ∀ n ∈ ℕ, $A^n = P.D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\0 & 3^n & 0\\0 & 0 & 5^n\end{pmatrix}.P^{-1}$.

On se demande ensuite si on peut exprimer A^n en fonction de I_3, A, A^2, autrement dit s'il existe (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbb{R}^3$ tel que : $A^n = a_n.I_3 + b_n.A + c_n.A^2$.
Ceci revient à trouver un même triplet tel que : $D^n = a_n.I_3 + b_n.D + c_n.D^2$.

Mais ce dernier problème revient à se demander si le système : $\begin{cases}(-2)^n = a_n - 2.b_n + 4.c_n\\3^n = a_n + 3.b_n + 9.c_n\\5^n = a_n + 5.b_n + 25.c_n\end{cases}$, a une solution.

Or ce système est de Cramer (son déterminant est un Vandermonde), d'où l'existence d'un (unique) triplet solution.
On peut alors le déterminer en résolvant le système, ce qui donne :

$a_n = \frac{3}{7}.(-2)^n + 3^n - \frac{3}{7}.5^n$, $b_n = -\frac{8}{35}.(-2)^n + \frac{3}{10}.3^n - \frac{1}{14}.5^n$, $c_n = \frac{1}{35}.(-2)^n - \frac{1}{10}.3^n + \frac{1}{14}.5^n$,

d'où : $A^n = \left[\frac{3}{7}.(-2)^n + 3^n - \frac{3}{7}.5^n\right].I_3 + \left[-\frac{8}{35}.(-2)^n + \frac{3}{10}.3^n - \frac{1}{14}.5^n\right].A + \left[\frac{1}{35}.(-2)^n - \frac{1}{10}.3^n + \frac{1}{14}.5^n\right].A^2$.

13. a. Il suffit ici d'identifier les termes d'une matrice pour qu'elle convienne (on ne demande pas d'unicité).

On constate que la matrice : $A = \begin{pmatrix}4 & -3\\1 & 0\end{pmatrix}$, répond au problème posé.

b. La matrice A a pour polynôme caractéristique : $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4.\lambda + 3$, et A admet deux valeurs propres simples qui sont 1 et 3.

Ses espaces propres sont de dimension 1 et valent : $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, et : $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$.

On peut donc écrire : $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.P^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $P^{-1} = -\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $A^n = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.P^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 & 3-3^{n+1} \\ 3^n-1 & 3-3^n \end{pmatrix}$, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $U_n = A^n.U_0$.

Avec la deuxième ligne de cette dernière égalité, on en conclut que :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}.(3^n-1).2 + \frac{1}{2}.(3-3^n).1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.3^n$.

14. On peut poser : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, pour constater que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n$.

On calcule alors : $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1).(\lambda-\frac{1}{4}).(\lambda-\frac{1}{12})$, en additionnant par exemple les trois colonnes de A.

A ayant trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et :

$E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{\frac{1}{4}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{\frac{1}{12}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Puis on écrit :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $U_n = A^n.U_0 = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix}.P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - \frac{11}{4^n} - \frac{3}{12^n} \\ 14 + \frac{8}{12^n} \\ 14 - \frac{11}{4^n} + \frac{3}{12^n} \end{pmatrix}$.

Finalement, les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent toutes trois vers 14.

15. a. On peut évidemment calculer son polynôme caractéristique et : $\chi_A(x) = (x-1).(x-3).(x+4)$.

Il n'y a pas de factorisation a priori du polynôme mais on constate que 1 est racine.

Puis les espaces propres valent : $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-4}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Donc en posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

b. Soit M vérifiant : $M^2 = A$, et soit : $M' = P^{-1}M.P$.

Alors : $M'^2 = D$, et : $M'.D = M'.M'^2 = M'^3 = M'^2.M' = D.M'$.

Mais si on pose : $M' = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix}$, alors : M'.D = D.M', entraîne : b' = c' = d' = f' = g' = h' = 0.

Autrement dit si M est solution, alors M' est diagonale, et vérifie : $M'^2 = D$.

Reste donc à résoudre : $\begin{pmatrix} a'^2 & 0 & 0 \\ 0 & e'^2 & 0 \\ 0 & 0 & i'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, ce qui conduit à 8 solutions pour M' dans

$\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de la forme $P.\Delta.P^{-1}$, avec : $\Delta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2.i \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, enfin, il n'y a pas de solution car si on développe les produits précédents, on constate que toutes les matrices obtenues comportent des coefficients complexes non réels.
Or une solution réelle étant aussi une solution complexe, toute solution réelle doit faire partie des solutions complexes trouvées précédemment, et il n'y en a pas.

16. a. La matrice A est diagonalisable.
En effet, son polynôme caractéristique est : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 6).(\lambda - 2)$, et a deux racines simples.
Les espaces propres de A sont : $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_6(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Donc en posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = D$.

b. Si M vérifie l'équation (E), alors : $(P^{-1}.M.P)^2 + (P^{-1}.M.P) = P^{-1}.(M^2 + M).P = P^{-1}.A.P = D$.
Avec : $M' = P^{-1}.M.P$, on constate que : $D.M' = (M'^2 + M').M' = M'^3 + M'^2 = M'.(M'^2 + M') = M'.D$.
Si maintenant on pose : $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cette dernière égalité s'écrit : $\begin{pmatrix} 6.a & 6.b \\ 2.c & 2.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.a & 2.b \\ 6.c & 2.d \end{pmatrix}$,
autrement dit, on a : $M' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, et M' est bien diagonale.

c. L'équation (E) avec la matrice M' devient : $\begin{pmatrix} a^2 + a & 0 \\ 0 & d^2 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, ce qui est équivalent à :
$(a,d) \in \{(1,2), (-2,2), (1,-3), (-2,-3)\}$.
Ces quatre solutions M' fournissent quatre solutions à l'équation (E), qui sont finalement :
$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

17. a. Tout d'abord en développant le déterminant, on constate que : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2.(\lambda - 1)$.
On a donc : $P = -X^3 + 7.X^2 - 15.X + 9$.
Si on calcule P(A), on constate que : $-A^3 + 7.A^2 - 15.A + 9.I_3 = 0$.

b. On sait que les valeurs propres de A sont des racines de tout polynôme annulateur de A qui doit donc être divisible par $(X - 1).(X - 3)$.
Par ailleurs, la matrice A n'est pas diagonalisable puisque l'espace propre associé à 3 est :
$E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, qui est de dimension 1 alors que 3 est valeur propre double.
Donc A ne peut annuler un polynôme scindé à racines simples.
Le polynôme que l'on cherche est donc $(X - 1)^2.(X - 3)$.

c. Le polynôme précédent est le polynôme minimal de A.

18. a. Puisqu'on dispose d'un polynôme annulateur pour A qui est : $P = X^4 - 7.X^3 + 12.X^2$, on sait que les valeurs propres de A sont nécessairement racines de P.
Donc ces valeurs propres (complexes) ne peuvent valoir que 0, 3 ou 4, puisque : $P = X^2.(X - 3).(X - 4)$.

b. Comme matrice complexe, A est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$) et une matrice triangulaire semblable à A comporte que sa diagonale les valeurs propres de A.
Donc tr(A) est une somme de n nombres valant 0, 3 ou 4, donc : $tr(A) \in \mathbb{N}$, et : $0 \leq tr(A) \leq 4.n$.

19. On dispose ici du polynôme annulateur : $P = X^4 - X^2 = X^2.(X - 1).(X + 1)$, pour f.
Les seules valeurs propres possibles pour f sont 0, 1 et -1.
Puisque 1 et -1 sont d'après l'énoncé supposées être des valeurs propres de f, deux cas se présentent :
- f admet 1, -1 **et** 0 comme valeurs propres.

Dans ce cas, f admet trois valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 3 et f est donc bien diagonalisable.
- f n'admet pas 0 comme valeur propre, et n'admet que 1 et -1.

Dans ce cas le noyau de f est réduit à {0}, f est donc bijectif et inversible et si on compose la première égalité par f^{-2}, on obtient : $f^2 = id_E$, ce qui fournit un autre polynôme annulateur pour f qui est $X^2 - 1$, et qui est cette fois scindé à racines simples.
Donc f dans ce deuxième cas est encore diagonalisable (c'est même une symétrie).

20. a. On peut remarquer que :
$M^2 - 2.I_n = -{}^tM$, donc : $(M^2 - 2.I_n)^2 = ({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = {}^t(2.I_n - {}^tM) = 2.I_n - M$, soit :
$M^4 - 4.M^2 + 4.I_n = 2.I_n - M$, ou : $M^4 - 4.M^2 + M + 2.I_n = 0$,
ce qui permet de proposer : $P = X^4 - 4.X^2 + X + 2$, comme polynôme annulateur pour M.
b. Puisqu'on peut factoriser P en : $P = (X - 1).(X + 2).(X^2 - X - 1)$, et puisque le polynôme de degré 2 a deux racines réelles simples qui sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, P est un polynôme annulateur, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ et M est diagonalisable.

21. a. p vérifie : $(p^2)^2 = p^2$, et donc admet comme polynôme annulateur : $P = X^4 - X^2 = X^2.(X - 1).(X + 1)$.
Donc les seules valeurs propres possibles de p sont 0, 1 et -1.
b. Travaillons par double implication.
- si p est diagonalisable, alors il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice D de p est diagonale, avec des éléments diagonaux égaux à 0, 1 ou -1.
Or ces trois réels vérifient : $\alpha^3 = \alpha$, donc la matrice D vérifie aussi : $D^3 = D$, et p vérifie : $p^3 = p$.
- si p vérifie : $p^3 = p$, alors il admet un nouveau polynôme annulateur : $X^3 - X = X.(X - 1).(X + 1)$, scindé à racines simples donc p est diagonalisable.

22. Puisque E est de dimension finie, χ_u existe et c'est un polynôme annulateur pour u, d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
De plus, u étant un automorphisme de E, det(u) est non nul.
Si enfin, on développe : $\chi_u(u) = 0$, on obtient : $u^n + ... + a_1.u + (-1)^n.\det(u).id_E = 0$, et donc :
$[u^{n-1} + ... + a_1.id_E]ou = -(-1)^n.\det(u).id_E$, soit finalement : $u^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det(u)}.[u^{n-1} + ... + a_1.id_E]$,
autrement dit u^{-1} est bien un polynôme en u.

23. a. Puisque λ est la seule valeur propre de u et qu'on travaille sur $\mathbb{C}$, on a toutes les racines de χ_u qui est scindé.
Donc en notant n la dimension de E, on a : $\chi_u = (X - \lambda)^n$.
b. Si u est diagonalisable, alors la matrice de u dans une base de E formée de vecteurs propres de u est $\lambda.I_n$, donc u vaut $\lambda.id_E$.
Réciproquement, l'endomorphisme $\lambda.id_E$ est bien diagonalisable.
En conclusion, u est diagonalisable si et seulement si : $u = \lambda.id_E$.
c. Enfin, le théorème de Cayley-Hamilton dit que : $\chi_u(u) = 0$, ce qui s'écrit : $(u - \lambda.id_E)^n = 0$, ou encore :
$(u - \lambda.id_E)^n = 0$, ce qui exprime bien que $(u - \lambda.id_E)$ est nilpotent.

Sous-espaces vectoriels stables.

24. a. E étant évidemment un sous-espace vectoriel de E, stable par u et contenant x, la question revient à montrer qu'il est le seul.
Soit donc F un tel sous-espace vectoriel de E.
Alors F contient aussi u(x), ainsi que toutes les images $u^k(x)$, et par linéarité toute combinaison linéaire de ces images.
Donc F contient une base de E, et : F = E.
On peut proposer pour réciproque : « si E est le seul sous-espace vectoriel de E, stable par u, contenant x, alors $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E ».

Pour information, cette réciproque se démontre par exemple en appelant p le plus grand entier : $p \geq 1$, tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ soit libre et en montrant que : $p = n$.
On suppose que : $p \neq n$, et donc : $p < n$, et on note : $F = \text{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$, qui constitue alors un sous-espace vectoriel de E, contenant x, stable par u, et strictement inclus dans E (car : $\dim(F) = p < n$), autrement dit, on met ainsi en évidence un autre sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.

b. L'existence du n-uplet : $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, tel que : $u^n(x) = \alpha_0.x + \alpha_1.u(x) + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x)$, est garantie par le fait que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
On note alors : $v = \alpha_0.Id_E + \alpha_1.u + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$.
il est immédiat que :
$\forall\ 0 \leq k \leq n-1$, $v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = u^k(\alpha_0.x + \alpha_1.u(x) + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x)) = u^{k+n}(x) = u^n(u^k(x))$.
Puisque les deux endomorphismes de E, u^n et v, associent l'un et l'autre la même image à tous les vecteurs d'une base de E, ils sont égaux, d'où : $u^n = v = \alpha_0.Id_E + \alpha_1.u + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$.

25. a. Il est immédiat que u (ou M) est diagonalisable car il admet trois valeurs propres simples et distinctes alors que c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3.
F étant stable par u, l'endomorphisme induit par u dans F, donc u_F, est aussi diagonalisable.
Les valeurs propres de u sont 1, 3 et 5, et ses vecteurs propres forment trois droites de $\mathbb{R}^3$.
Les valeurs propres de u_F étant également des valeurs propres (ou vecteurs propres) de u, elles ne peuvent valoir que 1, 3 ou 5 et ses vecteurs propres sont des vecteurs propres de u (appartenant à F).

b. Avec la remarque précédente, on en déduit que F admet une base formée de vecteurs propres de u_F, formée donc de vecteurs propres de u qui sont dans F.

c. Si on note e_1, e_3 et e_5 des vecteurs propres de u associés à 1, 3, 5, alors F contient une base formée de vecteurs colinéaires à certains trois vecteurs, donc une base formée à partir de ces trois vecteurs.
En effet, si F contient par exemple $\alpha.e_1$ (avec $\alpha \neq 0$), alors F contient $\frac{1}{\alpha}.\alpha.e_1$, donc e_1.
On peut alors lister les sous-espaces vectoriels F :
- $\dim(F) = 0$, alors : $F = \{0\}$,
- $\dim(F) = 1$, alors : $F = \text{Vect}(e_i)$, avec : $1 \leq i \leq 3$,
- $\dim(F) = 2$, alors : $F = \text{Vect}(e_i, e_j)$, avec : $1 \leq i < j \leq 3$,
- $\dim(F) = 3$, alors : $F = E$,

et on vérifie sans problème que ces : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$, sous-espaces vectoriels de E sont bien stables par u.
Remarque : si u n'a plus trois valeurs propres distinctes, il y a beaucoup plus de sous-espaces vectoriels de E stables par u (examiner par exemple une projection sur un plan ou l'identité).

26. a. Soit donc $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_λ (avec : $p = \dim(E_\lambda)$) complétée en une base de E $(e_1, \ldots, e_n)$.
La matrice de u dans cette base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure par blocs et s'écrit :
$\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} \lambda.I_p & A \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$, avec : $A \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, et : $B \in \mathscr{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.
On peut alors calculer : $\chi_u(x) = (-1)^n.\det(M - x.I_n) = (x - \lambda)^p.\det(x.I_{n-p} - B) = (x - \lambda)^p.\chi_B(x)$.
Donc λ est racine d'ordre au moins p de χ_u et m est inférieur à la multiplicité de λ comme racine de χ_u, ce qui s'écrit encore : $\dim(E_\lambda(u)) \leq \text{mult}(\lambda)$.

b. On peut (c'est plus lisible) travailler par double implication :
- si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, alors la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la somme des multiplicités donc égale à n, puisque le polynôme caractéristique de u est scindé sur **K**.

Dans ce cas, u est bien diagonalisable.
- supposons que l'un des sous-espaces propres ait une dimension strictement inférieure à la multiplicité de sa valeur propre.

Notons ce sous-espace propre E_1, sa valeur propre λ_1, et les autres valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$.
Alors : $\dim(E_1) \leq \text{mult}(\lambda_1) - 1$, et : $\forall\ 2 \leq k \leq m$, $\dim(E_k)) \leq \text{mult}(\lambda_k)$.
En sommant ces inégalités, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{m} \dim(E_k) \leq (mult(\lambda_1) - 1) + \sum_{k=2}^{m} mult(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{m} mult(\lambda_k) - 1 = n - 1,$$
et u ne peut être diagonalisable.
Par contraposée, on vient d'obtenir la réciproque de l'implication précédente, d'où finalement l'équivalence voulue.