Espaces probabilisés (Corrigé niveau 2).

Dénombrement.

24. a. • Si dans un ensemble Ω à n éléments, on veut dénombrer les parties à k éléments, fixons un élément ω de l'ensemble de départ.

Parmi les parties de Ω à k éléments il y a celles contenant ω et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$, ce qui correspond au nombre de façons de trouver (k – 1) éléments parmi (n – 1) (les éléments restants de Ω).

Mais il y a aussi celles qui ne contiennent par ω, soit $\binom{n-1}{k}$.

Ces deux ensembles de parties étant disjoints, on en déduit bien : $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

• Dans un ensemble Ω à n éléments, on veut constituer des équipes de k joueurs avec un capitaine.

On peut tout d'abord les constituer en choisissant k joueurs (soit $\binom{n}{k}$ équipes) et chaque équipe peut alors avoir k capitaines différents, soit en tout $k.\binom{n}{k}$ combinaisons équipe-capitaine.

On peut aussi commencer par choisir le capitaine (n choix possibles) puis compléter alors l'équipe avec (k – 1) joueurs (ou $\binom{n-1}{k-1}$ choix), soit finalement $n.\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons équipe-capitaine.

On en déduit bien, du fait des deux méthodes de dénombrement que : $n.\binom{n-1}{k-1}=k.\binom{n}{k}$.

• Si dans un ensemble à n éléments, on dénombre toutes les parties de cet ensemble, on trouve d'une part $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, en dénombrant toutes les parties à k éléments pour k variant de 0 à n, puis 2^n avec une arborescence, chaque étape permettant de décider si un élément (ceux-ci ayant été numérotés de 1 à n) est retenu pour constituer une partie ou pas.

De ces deux méthodes pour dénombrer les mêmes parties, on déduit bien : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

b. On peut alors écrire :

• si : n = 0, alors : $\sum_{k=0}^{n}k.\binom{n}{k}=0$,

• si : n ≥ 1, alors : $\sum_{k=0}^{n}k.\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k.\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n.\binom{n-1}{k-1}=n.\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}=n.2^{n-1}$,

cette dernière égalité étant encore valable pour : n = 0.

Ensembles dénombrables.

25. a. Puisque f est une bijection de ℕ dans $\mathscr{P}$(ℕ), A étant un élément de $\mathscr{P}$(ℕ) a un antécédent q par f.

Deux possibilités se présentent :

- q ∈ A, et dans ce cas, par définition de A, q ∉ f(q) = A,
- q ∉ A, mais alors de même : q ∈ f(q) = A.

Les deux hypothèses conduisent donc à une contradiction, et A ne peut avoir d'antécédent par f.

b. La conclusion est qu'il ne peut exister de bijection de ℕ dans $\mathscr{P}$(ℕ) et $\mathscr{P}$(ℕ) n'est donc pas dénombrable.

26. Soit : n ∈ ℕ*.

Alors l'ensemble des éléments x_k de la famille vérifiant : $|x_k|\le\frac{1}{n}$, est fini (et de cardinal inférieur à n.M).

En effet, s'il existait au moins $\lfloor n.M \rfloor + 1$ éléments de la famille plus grands que $\frac{1}{n}$, on pourrait constituer une famille finie J d'indices dans I (les indices correspondants aux éléments cités au-dessus) telle que :

$\sum_{i \in J} |x_i| \geq \frac{1}{n}.(\lfloor n.M \rfloor + 1) > \frac{1}{n}.n.M = M$.

Donc les ensembles : $A_n = \{k \in I, |x_k| \geq \frac{1}{n}\}$, sont des ensembles finis.

Comme de plus : $\forall$ i $\in$ I, $x_i \neq 0$, tout élément de I appartient à au moins l'un de ces ensembles.

Donc : $I \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, et I est au plus dénombrable puisque la réunion est elle-même au plus dénombrable.

27. a. La suite (x_n) ainsi construite est clairement une suite d'entiers (puisque tous les $a_{p,n}$ sont des entiers), et cette suite ne peut être constante à la valeur 9 puisqu'elle ne prend, vu la définition, JAMAIS la valeur 9.
Donc elle correspond donc bien à un développement décimal illimité propre d'un réel : x $\in$ [0,1[.

b. Ce réel ne peut avoir d'antécédent par f.
En effet, s'il existait : p $\in$ ℕ, tel que : x = f(p), alors x aurait deux développements décimaux illimités propres, à savoir (x_n) d'une part, et $(a_{p,n})$ d'autre part.
Mais on aurait : $(x_n) = (a_{p,n})$, par unicité et en particulier : $x_p = a_{p,p}$.
Or par construction : $\forall$ k $\in$ ℕ, $x_k \neq a_{k,k}$.
Donc x n'a pas d'antécédent par f.

c. Conclusion : une telle bijection f entre ℕ et [0,1[n'existe pas et [0,1[n'est pas dénombrable.
Supposons maintenant que ℝ soit dénombrable, via une bijection f de ℝ dans ℕ.
Comme arctan est une bijection de ℝ dans $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$, et que $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ est en bijection avec]0,1[, par le biais de : $\forall$ x $\in$ $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$, $\varphi(x) = \frac{2.x}{\pi} + 1$, il existerait une bijection de]0,1[dans ℕ.
Comme il existe une bijection de ℕ dans ℕ*, il y aurait une bijection g de]0,1[dans ℕ*.
En posant enfin : $\forall$ x $\in$]0,1[, h(x) = g(x), et : h(0) = 0, on aurait ainsi une bijection de [0,1[dans ℕ.
Ce dernier point étant impossible, on en déduit que ℝ ne peut être dénombrable.

Tribus.

28. a. $\mathcal{A}$ contient tous les segments inclus dans [0,1] donc si]a,b[est un intervalle inclus dans [0,1], il existe un entier n (non nul) tel que : $0 \leq a - \frac{1}{n} < a < b < b + \frac{1}{n} \leq 1$.
$\mathcal{A}$ contient alors tous les segments $[a - \frac{1}{p}, b + \frac{1}{p}]$, avec : n ≤ p, et par définition d'une tribu, on en déduit que : $\bigcap_{n \leq p} [a - \frac{1}{p}, b + \frac{1}{p}]$ =]a,b[, est encore dans $\mathcal{A}$.
Soit maintenant : α $\in$ [0,1].
Si : 0 < α < 1, il existe de même un entier n tel que : $0 \leq \alpha - \frac{1}{n} < \alpha < \alpha + \frac{1}{n} \leq 1$.
De même qu'au-dessus, on en déduit que : $\bigcap_{n \leq p} [\alpha - \frac{1}{p}, \alpha + \frac{1}{p}]$ = {α}, est encore dans $\mathcal{A}$.
Dans le cas où : α = 0, on utilise les intervalles $[0, \frac{1}{p}]$, et $[1 - \frac{1}{p}, 1]$, pour : α = 1.

b. En utilisant la suite décroissante $([a - \frac{1}{p}, b + \frac{1}{p}])$, on a immédiatement :

$$P(]a,b[) = \lim_{p \to +\infty} P([a - \frac{1}{p}, b + \frac{1}{p}]) = \lim_{p \to +\infty} (b - a + \frac{2}{p}) = b - a.$$

De même (en adaptant pour les cas : α = 0, ou 1) :

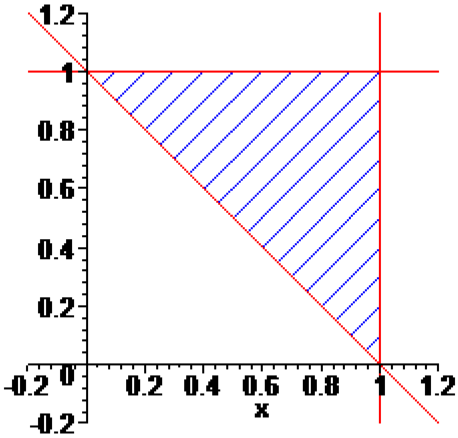
$P(\{\alpha\}) = \lim_{p\to+\infty} P([\alpha - \frac{1}{p}, \alpha + \frac{1}{p}]) = \lim_{p\to+\infty} (\frac{2}{p}) = 0$.

Probabilité sur un ensemble fini.

29. Supposons qu'une probabilité P existe sur Ω et posons :
 $p = P(\{a\})$, $q = P(\{b\})$, $r = P(\{c\})$, avec : $p, q, r \geq 0$.
 Alors p, q, r, x et y vérifient le système :
 $p + q = x$,
 $q + r = y$,
 $p + q + r = 1$,
 On obtient alors : $q = x + y - 1$, $p = 1 - y$, $r = 1 - x$.
 Comme p, q et r doivent être positifs, cela impose : $\{x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.
 Réciproquement, supposons ce système de conditions vérifié pour x et y.
 On peut alors poser :
 - $P(\{a\}) = 1 - y$,
 - $P(\{b\}) = x + y - 1$,
 - $P(\{c\}) = 1 - x$.

 Toutes ces quantités sont positives et :
 $P(\{a,b,c\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) = 1$,
 ce qui montre qu'on vient ainsi de définir une probabilité P sur Ω.
 Enfin :
 - $P(\{a,b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = x$,
 - $P(\{b,c\}) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = y$,

 et P répond donc bien au problème.
 Finalement, les couples (x,y) solutions sont représentés ci-contre, dans la partie hachurée.



30. Cet exercice parle en fait de permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
 a. λ_1 est nul puisque le seul tirage possible est (1) où 1 est bien à la place 1.
 λ_2 vaut 1 puisque la seule permutation de (1, 2) qui ne laisse aucun nombre à sa place est la transposition (2, 1).
 λ_3 vaut 2 : parmi les 6 ordres possibles (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) et (3, 2, 1), seuls 2 évitent toute coïncidence (les numéros 4 et 5 dans la liste précédente).
 b. Pour : n = 4, si on cherche le nombre d'ordres comportant une seule coïncidence, on commence par remarquer comme peut les séparer en prenant comme critère la valeur où la coïncidence se produit.
 Il y a 4 valeurs où cette coïncidence peut se produire, et une fois cette valeur fixée, il ne faut plus qu'il y ait de coïncidence parmi les 3 jetons restants, soit λ_3 possibilités.
 On obtient donc : $4.\lambda_3 = 8$, possibilités. On se place dans le cas : n = 4.
 Le nombre d'ordres ensuite comportant 2 coïncidences est le même que le nombre de façon de choisir 2 jetons parmi 4 : en effet, une fois ces deux jetons choisis (qui vont créer les coïncidences), les deux autres n'ont plus qu'une seule possibilité : échanger leurs places.
 Donc le nombre d'ordres comportant deux coïncidences est de : $\binom{4}{2} = 6$.
 Enfin, un ordre ne peut comporter exactement 3 coïncidences (si 3 jetons sont en place, le 4^{eme} l'est aussi).
 Finalement le nombre d'ordres comportant au moins une coïncidence vaut : 8 + 6 + 1 (4 coïncidences), soit 15 ordres.
 On en déduit que : $\lambda_4 = 4! - 15 = 24 - 15 = 9$, 4! correspondant au nombre total d'ordres possibles.
 c. Ici encore, pour dénombrer les ordres cherchés, on les sépare en utilisant comme critère de tri la famille des i jetons où il y a coïncidence.
 Il y a $\binom{n}{i}$ façons de choisir les i jetons où il y a coïncidence, et une fois ces jetons choisis, chaque famille compte λ_{n-i} ordres, puisqu'il y en a autant que d'ordres sur ces (n – i) restants ne comportant plus aucune coïncidence.

Finalement, le nombre d'ordres cherché est bien $\binom{n}{i}.\lambda_{n-i}$, et la probabilité vaut :

$$\frac{1}{n!}.\binom{n}{i}.\lambda_{n-i} = \frac{\lambda_{n-i}}{i!.(n-i)!}.$$

31. a. On peut partir de l'égalité : P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B).
On en déduit que : $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 1.7 - P(A\cup B) \geq 1.7 - 1 = 0.7$
Remarque : le premier résultat se démontre à l'aide d'une union disjointe.
b. La même démonstration, dans le cas général, donne le résultat demandé.
c. Montrons ce dernier résultat par récurrence :
• Il est vrai pour : n = 1, ou n = 2.
• Supposons le vrai pour un entier n donné, n ≥ 2, et soir : $(A_1, \ldots, A_{n+1}) \in \mathcal{A}^{n+1}$,.
Alors : $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}) = P((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \geq P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) + P(A_{n+1}) - 1$,
et avec l'hypothèse de récurrence :

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - n,$$

soit le résultat voulu au rang (n+1).

Probabilité sur un ensemble quelconque.

32. Notons : $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, ∀ n ∈ ℕ.
Alors : ∀ n ∈ ℕ, $A_n = \{n\} \cup A_{n+1}$, et cette union est disjointe.
Donc : ∀ n ∈ ℕ, $P(\{n\}) = P(A_n) - P(A_{n+1}) = \lambda.a_n - \lambda.a_{n+1} = \lambda.[a_n - a_{n+1}]$.
Il est donc nécessaire que λ soit positif (ou nul), et on définit alors une probabilité sur ℕ si et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda.(a_{n+1} - a_n) = 1.$$

Or la série considérée est télescopique et convergente puisque (a_n) converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda.(a_n - a_{n+1}) = \lambda.(a_0 - \lim_{n\to+\infty} a_n) = \lambda.a_0.$$

Enfin, la suite étant strictement décroissante et de limite nulle, tous ses termes sont strictement positifs.
Finalement, on définit une probabilité sur ℕ* si et seulement si : $\lambda = \frac{1}{a_0}$.

33. Si on considère la suite croissante d'événements définie par : ∀ n ∈ ℕ, $A_n = \mathbb{N}_n$, on sait que la suite $(P(A_n))$ est convergente.
Or cette suite est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} P(\{n\})$.
Etant convergente, cette série voit son terme général qui tend vers 0, d'où le résultat.

34. a. E_1 correspond à obtenir un 1 pour tous les lancers à partir du 4ième (inclus).
E_2 correspond à obtenir un 1 pour tous les lancers à partir du 4ième (inclus) et uniquement ceux-là.
E_3 correspond à obtenir un 1 au moins à partir du 4ième lancer (inclus).
b. L'événement considéré s'écrit : $E_n = \bigcup_{i>n} A_i$, sachant que la formulation est ambiguë (au-delà du nième lancer n'indique pas si on inclut le lancer n dans les possibilités).
c. Il est immédiat que : ∀ n ∈ ℕ, $C_{n+1} \subset C_n$, et donc que la suite est bien décroissante.
L'événement C est alors en français :
∀ n ∈ ℕ, « on obtient au moins un 1 au-delà du lancer n »,
autrement dit on obtient 1 pour une infinité de lancers.
d. On peut écrire directement : $B_n = \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$, et : $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$.

Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales.

35. a. Si l'on considère qu'avoir un garçon ou une fille constitue des événements équiprobables, alors l'univers considéré ici est : {(G,G), (G,F), (F,G), (F,F)}, muni de la probabilité uniforme, chaque couple étant formé de l'aîné et du cadet.
Cette première probabilité est une probabilité conditionnelle : probabilité que « un enfant est une fille » (soit {(G,F),(F,G)}) sachant que « l'un d'entre eux est un garçon » (soit {(G,G),(G,F),(F,G)}).
On trouve donc : $p_1 = \frac{2}{3}$.
Remarque : cela correspond bien à l'intersection de {(F,F), (F,G), (G,F)} et de {(G,G),(G,F),(F,G)}.
b. Même démarche : probabilité que « le deuxième enfant est une fille » (soit {(G,F)}) sachant que « l'aîné est un garçon » (soit {(G,G), (G,F)}) et on trouve : $p_1 = \frac{1}{2}$.
c. Ici, on a deux expériences aléatoires de suite : le sexe des enfants, puis l'enfant qui va ouvrir.
On peut alors considérer l'univers total : {(G,g,G), (G,g,g), (G,f,G), (G,f,f), (F,g,F), (F,g,g), (F,f,F), (F,f,f)}, chaque triplet étant formé de l'aîné, le cadet et celui qui va ouvrir.
On veut donc la probabilité de « l'autre enfant est une fille » sachant que « celui qui ouvre est un garçon ».
Cela correspond aux ensembles {(G,f,G), (F,g,g)} et : {(G,g,G), (G,g,g), (G,f,G), (F,g,g)}.
Soit : $p_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

36. a. Il suffit de dénombrer le nombre de mains correspondant à cette contrainte, toutes les mains étant considérées comme équiprobables.
Ces mains correspondent à 2 As (parmi 4) et 3 autres cartes (parmi les 48 restantes), soit :
$\binom{4}{2}.\binom{48}{3} = 6.\frac{48.47.46}{6} = 103776$, jeux possibles avec deux As.
Sachant qu'il y a en tout : $\binom{52}{5} = \frac{52.51.50.49.48}{120} = 2598960$, jeux possibles de 5 cartes, la probabilité cherchée est donc de : $\frac{103776}{2598960} \approx 0.04$.
b. La probabilité pour le jeu reçu comporte au moins un As se calcule comme souvent par passage au complémentaire, et elle vaut : $1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{48.47.46.45.44}{52.51.50.49.48} \approx 0.34$.
La probabilité (conditionnelle) cherchée vaut donc (environ) : $\frac{0.04}{0.34} \approx 0.117$.

37. a. Pour cette question, soit on utilise la formule des probabilités totales, soit on travaille par complémentaire ce qui donne ici : $1 - \frac{8}{10}.\frac{7}{9}.\frac{6}{8} = \frac{8}{15} \approx 0.53$.
Remarque : au lieu de travailler avec des probabilités, on aurait aussi pu faire un calcul direct par dénombrement.
b. La probabilité que la première boule tirée soit noire est : $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, puisque les boules tirées après la première peuvent être quelconques.
Donc la probabilité cherchée vaut : $\frac{1}{5}.\left(\frac{8}{15}\right)^{-1} = \frac{3}{8}$.
c. On dénombre pour cette question tous les cas favorables à savoir les combinaisons :
(B,B,N), (B,N,N), (N,B,N), soit : $8.7.2 + 8.2.1 + 2.8.1 = 144$,
et la probabilité cherchée est donc : $\frac{144}{10.9.8} = \frac{1}{5}$.

38. a. On utilise ici la formule des probabilités totales pour écrire :

$p_{n+1} = p.p_n + (1 – p).(1 – p_n)$,

traduisant le fait que si le message est correct au relais n, (probabilité p_n) il a une probabilité p de le rester, et s'il est incorrect (probabilité $(1 – p_n)$), il a une probabilité (1 – p) de redevenir correct.

b. La suite (p_n) est arithmético-géométrique et on commence par trouver a tel que :

$a = p.a + (1 – p).(1 – a)$, soit : $a = \frac{1}{2}$.

Puis en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p_n – a$, on constate que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = (2.p – 1).q_n$, soit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = (2.p-1)^{n-1}.q_1$, puis : $p_n = \frac{1}{2} + (2.p-1)^{n-1}.\frac{1}{2}$, puisque : $p_1 = 1$.

c. Puisque : $0 < p < 1$, $|2.p – 1| < 1$, et (p_n) tend vers $\frac{1}{2}$.

Ce résultat n'est pas étonnant car si chaque étape peut introduire une erreur, au bout d'un grand nombre de relais le message n'a plus aucune valeur et la probabilité qu'il soit identique au message initial est identique à celle qu'il soit l'opposé de ce message.

39. a. Notons les différents événements suivants, pour un match donné :

- E : « le pronostic est exact »,
- G : « l'Allemagne gagne le match »,
- V : « l'Allemagne perd le match », (V comme verloren)
- N : « il y a match nul ».

Pour un match de poule, la formule des probabilités totales donne :

$P(E) = P_G(E).P(G) + P_V(E).P(V) + P_N(E).P(N)$.

Or : $P_G(E) = P_V(E) = \frac{1}{2}$, en admettant que le choix de Paulot est fait au hasard, et : $P_N(E) = 0$, puisqu'il ne peut pas prédire un match nul.

Donc si de plus, on admet que les trois résultats possibles du match sont équiprobables (sans préjuger donc des talents de l'Allemagne ou de ses adversaires), alors : $P(E) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

b. Pour un match sans nullité possible, on obtient en revanche, avec le même raisonnement : $P(E) = \frac{1}{2}$.

c. La probabilité demandée, en admettant l'indépendance des différentes prédictions est donc de :

$P = \left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{27.16} = \frac{1}{432} \approx 0.0023$.

Quel talent, ce Paulot !

40. a. On a immédiatement : $a_1 = 0$.

De plus : $A_2 = P_1 \cap P_2$, et par indépendance des lancers : $P(A_2) = P(P_1).P(P_2) = \frac{4}{9}$.

De même, on a : $A_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3$, et : $P(A_3) = P(F_1).P(P_2).P(P_3) = \frac{4}{27}$.

b. Le système proposé est bien un système complet d'événements puisque :

- ils sont incompatibles deux à deux,
- la réunion de ces trois événements correspond à tous les cas possibles.

Donc : $P(A_{n+2}) = P(F_1 \cap A_{n+2}) + P((P_1 \cap P_2) \cap A_{n+2}) + P((P_1 \cap F_2) \cap A_{n+2})$.

Puis : $P(F_1 \cap A_{n+2}) = P(F_1).P_{F_1}(A_{n+2})$.

Or si F_1 est réalisé, obtenir A_{n+2} correspond à obtenir deux piles consécutifs au bout des (n+1) lancers suivant le premier, soit encore au bout de (n+1) lancers, d'où : $P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1}) = a_{n+1}$.

Par ailleurs on a aussi : $P((P_1 \cap P_2) \cap A_{n+2}) = P(P_1 \cap P_2).P_{P_1 \cap P_2}(A_{n+2})$.

Mais on ne peut plus obtenir **pour la première fois** deux Pile consécutifs au $(n+2)^{\text{ième}}$ lancer si ça a déjà été le cas au deuxième (soit : P_1 et P_2 réalisés), donc : $P_{P_1 \cap P_2}(A_{n+2}) = 0$.

Enfin : $P((P_1 \cap F_2) \cap A_{n+2}) = P(P_1 \cap F_2).P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2})$.

Et obtenir A_{n+2} alors qu'on a obtenu Pile puis Face pour les deux premiers lancers est équivalent à obtenir deux Pile consécutifs au bout de n lancers, soit : $P_{P_1\cap F_2}(A_{n+2}) = P(A_n) = a_n$.

Finalement : $a_{n+2} = \frac{1}{3}.a_{n+1} + 0.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.a_n = \frac{1}{3}.a_{n+1} + \frac{2}{9}.a_n$.

c. La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire double d'équation caractéristique : $r^2 = \frac{1}{3}.r + \frac{2}{9}$.

Les racines de cette équation sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$, et : $\exists$ (α,β) ∈ $\mathbb{R}^2$, ∀ n ∈ ℕ, $a_n = \alpha.\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta.\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On détermine α et β à l'aide de a_1 et a_2, et on trouve : ∀ n ∈ ℕ, $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4.\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Enfin : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4.\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 4.\left(-\frac{1}{3}\right)^2.\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9}.\frac{3}{4} = 1$.

Et comme les événements (A_n, n ∈ ℕ*) sont deux à deux incompatibles, on a :

$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$,

autrement dit l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est presque sûr et on obtient presque sûrement au moins une fois deux Pile consécutifs.

41. a. La fleur existe donc sa descendance n'est jamais éteinte et : $u_0 = 0$.

De même, la lignée s'éteint à l'instant 1 si la fleur n'a pas eu de descendance, donc : $u_1 = q$.

b. Il est clair que si la lignée est éteinte à l'instant n, elle l'est encore à l'instant (n+1), donc :

∀ n ∈ ℕ, $U_n \subset U_{n+1}$, et : $u_n \le u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante et étant majorée par 1, elle converge vers une limite L.

c. On utilise un système complet d'événements à savoir ici :

A_0 : « la fleur F_0 n'a aucune descendance »,

A_2 : « la fleur F_0 a deux descendances ».

Alors, pour un entier n donnée, la formule des probabilités totales donne :

$P(U_{n+1}) = P(A_0).P_{A_0}(U_{n+1}) + P(A_2).P_{A_2}(U_{n+1})$.

Or si la fleur F_0 n'a pas de descendance, alors sa lignée est éteinte à l'instant 1 donc aussi à l'instant (n+1), et : $P_{A_0}(U_{n+1}) = 1$.

Et si la fleur F_0 a deux descendances, alors la lignée (de F_0) est éteinte à l'instant (n+1) si les lignées respectives des deux fleurs de l'instant 1 sont éteintes à l'instant (n+1).

Mais pour ces fleurs F_1 et F_2, l'instant (n+1) de la fleur F_0 est leur instant n, soit :

P(« la lignée de la fleur F_1 (ou F_2) est éteinte à l'instant (n+1) ») = $P(U_n) = u_n$.

Enfin, par indépendance des événements liés aux fleurs F_1 et F_2, on a donc : $P_{A_2}(U_{n+1}) = u_n.u_n = u_n^2$.

Finalement : ∀ n ∈ ℕ, $u_{n+1} = q.1 + p.u_n^2 = 1 - p + p.u_n^2$.

d. Notons alors f la fonction définie par : ∀ x ∈ ℝ, $f(x) = 1 - p + p.x^2$.

Cette fonction est continue sur ℝ, donc (u_n) convergeant, sa limite L vérifie : $f(L) = L$, d'où :

$p.L^2 - L + 1 - p = 0$, soit encore : $L = 1$, ou : $L = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1$.

On distingue alors deux cas :

- si : $p \le \frac{1}{2}$, alors : $\frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1 \ge 1$, et la seule limite possible (dans [0,1]) est alors : $L = 1$, donc (u_n) converge vers 1.
- si : $p > \frac{1}{2}$, alors les deux valeurs trouvées sont des limites possibles.

Mais : $u_0 \in \left[0, \frac{q}{p}\right]$, puisque : $u_0 = 0$, et un tableau de variations montre immédiatement que :

$f\left(\left[0, \frac{q}{p}\right]\right) = \left[q, \frac{q}{p}\right] \subset \left[0, \frac{q}{p}\right]$.

Puisque $\left[0, \frac{q}{p}\right]$ est un intervalle stable par f, tous les termes de (u_n) sont dans cet intervalle et sa limite aussi, et donc : $L = \frac{q}{p}$, puisque : $\frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1 < 2 - 1 = 1$.

On constate que dans les deux cas, la limite L est bien : $L = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)$.

Notons maintenant U l'événement : « la lignée s'éteint ».

Alors la suite (U_n) est une suite croissante d'événements et : $U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n$, d'où : $P(U) = \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = L$.

Dans le premier cas, la lignée a donc une probabilité 1 de s'éteindre et donc elle s'éteint presque sûrement.
Dans le deuxième cas, la lignée a toujours une probabilité non nulle de s'éteindre, sauf si : $p = 1$, seul cas où la lignée survit presque sûrement.
On est même alors dans une situation où la lignée survit de façon certaine puisqu'à chaque étape, la µ fleur se reproduit.

42. a. On peut écrire : $G_n = \overline{G_1} \cap \ldots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n$, et donc par la formule des probabilités composées :

$$P(G_n) = P(\overline{G_1}).P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})\ldots P_{\overline{G_1}\cap\ldots\cap\overline{G_{n-2}}}(\overline{G_{n-1}}).P_{\overline{G_1}\cap\ldots\cap\overline{G_{n-1}}}(G_n) = q_1\ldots q_{n-1}.p_n = q_1\ldots q_{n-1} - q_1\ldots q_{n-1}.q_n .$$

b. La suite (Q_n) est positive et décroissante car on a : $\forall$ n $\in$ ℕ, $0 \leq q_n \leq 1$.
Donc (Q_n) converge.

c. Puisque : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $P(G_n) = q_1\ldots q_{n-1} - q_1\ldots q_{n-1}.q_n = Q_{n-1} - Q_n$, on en déduit que :

$\forall$ n $\in$ ℕ*, $\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = 1 - Q_n$, comme somme télescopique.

Donc la série $\sum_{n\geq1} P(G_n)$ converge et a pour somme $(1-a)$.

De plus, les événements (G_n, n $\in$ ℕ*) sont deux à deux incompatibles et l'événement qu'on va noter T : « le jeu se termine », est tel que : $T = \bigcup_{n\geq1} G_n$.

Donc : $P(T) = P\left(\bigcup_{n\geq1} G_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = 1 - a$.

Par conséquent :
- si : $a \neq 0$, le jeu a une probabilité non nulle de ne pas se terminer,
- si : $a = 0$, le jeu se termine avec la probabilité 1.

d. Si la suite (p_n) est constante, alors : $\forall$ n $\in$ ℕ, $Q_n = (1-p)^n$, et puisque : $0 < |1-p| < 1$, la suite (Q_n) tend vers 0 et le jeu a une probabilité 1 de se terminer.

Dans le deuxième cas, on a : $\forall$ n $\in$ ℕ, $q_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n.(n+2)}{(n+1)^2}$.

Donc : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $Q_n = n!.\frac{(n+2)!}{2}.\frac{1}{(n+1)!^2} = \frac{n+2}{2.(n+1)}$, comme on le constate par récurrence et (Q_n) tend vers $\frac{1}{2}$: le jeu se termine donc avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Formule de Bayes.

43. a. Si on a obtenu Pile au lancer de pièces, l'urne contient alors k boules blanches et 1 boule noire avant le $k^{\text{ième}}$ lancer (puisqu'on ne rajoute que des boules blanches dans ce cas), et l'inverse si on a obtenue Face, à savoir k boules noires et 1 boule blanche.
D'autre part, les événements P : « obtenir Pile », et F : « obtenir Face », constituent un système complet d'événements (P, F).
Notons B_k l'événement : « obtenir une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage », sachant que ceux-ci sont indépendants.
Donc : $P(B_k) = P_{\overline{F}}(B_k).P(\overline{F}) + P_F(B_k).P(F) = \frac{k}{k+1}.\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b. On utilise ici la formule de Bayes qui donne : $P_{B_k}(\overline{F}) = \frac{P_{\overline{F}}(B_k).P(\overline{F})}{P(B_k)} = \frac{k}{k+1}.\frac{1}{2}.\frac{2}{1} = \frac{k}{k+1}$.
C'est assez cohérent, car si on a obtenue Face au lancer de pièce, il y a très peu de chances de tirer alors la seule boule blanche lors du $k^{\text{ième}}$ tirage lorsque k est grand.
Donc tirer une boule blanche lors de ce $k^{\text{ième}}$ tirage peut laisser penser qu'on a obtenu Pile au lancer de pièce.

c. L'événement dont on veut la probabilité est : $B_1 \cap \ldots \cap B_k$.
On peut encore écrire, à l'aide du système complet d'événements précédent :
$P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = P_{\overline{F}}(B_1 \cap \ldots \cap B_k).P(\overline{F}) + P_F(B_1 \cap \ldots \cap B_k).P(F)$.
Or les tirages se font avec remise et sont a priori indépendants, donc :
$P_{\overline{F}}(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = P_{\overline{F}}(B_1) \ldots P_{\overline{F}}(B_k) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} \ldots \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$, et de même :
$P_F(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = P_F(B_1) \ldots P_F(B_k) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} \ldots \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$.
Donc : $P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = \frac{1}{k+1}.\frac{1}{2} + \frac{1}{(k+1)!}.\frac{1}{2} = \frac{1+k!}{2.(k+1)!}$.