Déterminants.

Exercices 2011-2012

Exercices de base.

Calcul de déterminants.

1. Montrer que si α, β, γ sont des réels entre 0 et π, de somme π, alors : $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 & \cos(\beta) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ 1 & \cos(\gamma) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$.

2. Calculer : $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$, où : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, puis déterminer : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, D = 0\}$.

3. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}$, $(\lambda, a_0,\dots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.

4. Soient : $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $n \geq 2$. Calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a.b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a.b \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}, \text{ puis : } \Delta_n = \begin{vmatrix} 2.\cos(\alpha) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2.\cos(\alpha) \end{vmatrix}.$$

Déterminant de van der Monde.

5. Soit $(x_1, x_2,\dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ou $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \text{ puis : } P_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{vmatrix} \in \mathbf{K}[X].$$

a. Montrer que : $P_n \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
b. Dans le cas où les x_i sont distincts 2 à 2, donner une expression factorisée de $d\mathcal{P}_n$.
c. En déduire que : $\forall(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{K}^n$, $V_n(x_1,\dots,x_n) = (x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})$, puis $V_n(x_1,\dots,x_n)$.
d. Retrouver, directement à partir de l'expression de $V_n(x_1,\dots,x_n)$ la relation de récurrence précédente.

6. Soient $(x_1,\dots, x_n)$ des réels, et $f_1,\dots, f_{n-1}$, des polynômes normalisés de degrés respectifs 1, 2,…,(n-1).

Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, et en déduire la valeur du déterminant.

En déduire également la valeur de : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix}$, où : $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Systèmes linéaires.

7. Résoudre les systèmes :

$(S_1) \begin{cases} m.x + y + z & = & 1 \\ x + m.y + z & = & m \\ x + y + m.z & = & 1 \\ x + y + z & = & m \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$; $(S_2) \begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ a.x + b.y + c.z & = & d \\ a.(a-1).x + b.(b-1).y + c.(c-1).z & = & d.(d-1) \end{cases}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

8. Peut-on trouver des valeurs de m, pour lesquelles le système admet d'autres solutions que (0,0,0) ?

$\begin{cases} x - (m+1).y - z & = & 0 \\ m.x + 2.y - (3m+2).z & = & 0 \\ 2.x - 3.y + 3.z & = & 0 \end{cases}$.

9. Déterminer m pour que les trois plans de $\mathbb{C}^3$ d'équations :
   - x – 2.y + z = m.x,
   - 3.x – y – 2.z = m.y,
   - 3.x – 2.y – z = m.z,

   contiennent une même droite vectorielle.

Calcul de rang de matrice.

10. Déterminer le rang de : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis généraliser.

Déterminants et applications linéaires.

11. Soit : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice représentative dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

    Déterminer rg(A), et donner une CNS pour que : $(x,y,z,t) \in \mathrm{Im}(u)$.

Comatrice.

12. Soient : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & M & \\ 0 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$.

    Calculer Com(A).

Groupe symétrique. Décomposition de permutations.

13. Décomposer en produit de cycles, de transpositions :

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 9 & 3 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, puis : $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 1 & 5 & 2 & 8 & 3 & 6 & 7 & 9 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

En déduire σ_1^{2012}, puis σ_2^{2012}.

<u>Exercices plus.</u>

Formes multilinéaires.

14. Soient E un **K**-ev de dimension n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.
On définit Φ_u, de $A_n(E)$ (formes n-linéaires alternées sur E) dans lui-même, qui à f fait correspondre f_u, donnée par : $\forall(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $f_u(x_1,\dots,x_n) = f(u(x_1),\dots,u(x_n))$.
Montrer que Φ_u est nulle ou une homothétie de $A_n(E)$.
Donner une CNS pour avoir : $\Phi_u \neq 0$.

15. Soit E un **K**-ev de dimension n, soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit : $u \in \mathscr{L}(E)$.
Pour : $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on pose : $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n)$.
Montrer que f est n-linéaire alternée, puis que : $f = \mathrm{tr}(u).\det_{\mathscr{B}}$.

Calcul de déterminants.

16. Calculer le déterminant de la matrice A, avec : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $a_{i,j} = (i + j - 1)^2$.

17. On note, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice $n\times n$ dont le terme générique $a_{i,j}$ vaut : $S_k = \sum_{p=1}^{k} p$ où : $k = \min(i,j)$.
Préciser la matrice A et calculer son déterminant.

18. a. Soient a, $x_1,\dots,x_n$ (n+1) vecteurs du **K**-ev E, de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$.
Montrer que : $\det_B(a+x_1, a+x_2, \dots, a+x_n) = \det_B(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)$.
b. En déduire les déterminants : $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$, et : $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$, où a_i, b_i sont des scalaires.
c. Soient a, b, c dans **K**, $a \neq b$, J la matrice colonne : J = $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{vmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{vmatrix}$.
Montrer que det(D – x.J) est un polynôme en x de degré au plus 1 et à l'aide de x convenablement choisis, calculer D.
d. Que vaut D lorsque : a = b (on pourra utiliser un argument de continuité) ?

19. On pose : $P_n(\lambda) = \det(A_n - \lambda.I_n)$, où : $\lambda \in \mathbb{C}$, et : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a. Trouver une relation de récurrence liant P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, pour : $n \geq 3$.
b. Déterminer toutes les suites vérifiant la relation trouvée précédemment.
c. Résoudre l'équation : $P_n(\lambda) = 0$.

20. Soit : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a.b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a.b & a+b \end{vmatrix}$, et : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2.\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2.\cos(\theta) \end{vmatrix}$, avec : $(a,b,\theta) \in \mathbb{R}^3$.
Calculer D_n pour tout entier n et en déduire Δ_n.

21. Pour : $(p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note : $\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p+1}{p-1} & \vdots \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{p+1}(x) - \varphi_p(x) = (p+1)!.x^p$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi_p(n+1) = (p+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^p$.

c. En déduire la valeur de : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

22. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, telles que : $A.B - B.A = B$.
Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A.B^k = B^k.(A + k.I_n)$.
En déduire que : $\det(B) = 0$.
Que peut-on dire de $\mathrm{tr}(B)$?

Déterminants et applications linéaires.

23. Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, telle que : $f(X) = {}^tX$.
Calculer $\det(f)$.
Pouvait-on prévoir que ce déterminant serait non nul ?

Comatrice.

24. Soit : $A \in Gl_n(\mathbf{K})$.
Montrer que : $\mathrm{Com}(A) \in Gl_n(\mathbf{K})$, puis que : $(\mathrm{Com}(A))^{-1} = \mathrm{Com}(A^{-1})$.

25. (*) Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
a. Montrer que rg(A) est égal à la taille du plus grand déterminant extrait de A non nul.
b. En déduire l'étude de rg(Com(A)) en fonction de rg(A).
c. Calculer Com(Com(…(Com(A))…)), répété k fois.

Groupe symétrique. Décomposition de permutations.

26. Dans S_n, soient c_1 un p-cycle, et c_2 un q-cycle, à supports disjoints.
Montrer que : $(c_1 \circ c_2)^{p.q} = Id_{N_n}$.
En déduire que : $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma^{n!} = Id_{N_n}$.
Expliquer comment calculer le plus petit k_n dans $\mathbb{N}^*$, tel que : $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma^{k_n} = Id_{N_n}$.
Application : calculer k_{24}.

27. Montrer que toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions prises dans la liste (1 2), (2 3),…, (n 1).
On pourra commencer par exprimer toute transposition à partir de celles proposées, puis obtenir le résultat demandé, pour toute permutation.