Espaces vectoriels (et affines).

Chap. 04 : cours complet.

Définition 6.5 : matrice définie par blocs
Définition 6.6 : matrices triangulaires ou diagonales par blocs
Théorème 6.4 : somme et produit de matrices par blocs

7. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de changement de base (Sup).

Définition 7.1 : matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base
Définition 7.2 : matrice de changement de base (matrice de passage)
Théorème 7.1 : lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans différentes bases

8. Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases (Sup).

Définition 8.1 : matrice représentative d'une application linéaire dans des bases
Théorème 8.1 : isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$
Théorème 8.2 : traduction matricielle du lien entre un vecteur et son image par un morphisme
Définition 8.2 : application linéaire ou endomorphisme canoniquement associé à une matrice
Théorème 8.3 : matrice d'une composée
Théorème 8.4 : liens entre les matrices de passage pour trois bases de l'espace
Théorème 8.5 : lien entre les matrices d'un même endomorphisme dans différentes bases

9. Somme de sous-espaces vectoriels, sommes directes, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 9.1 et définition 9.1 : somme de sous-espaces vectoriels
Théorème 9.2 : autre définition d'une somme de sous-espaces vectoriels
Définition 9.2 : somme directe de deux ou de plusieurs sous-espaces vectoriels
Définition 9.3 : sous-espaces supplémentaires
Théorème 9.3 : existence d'un supplémentaire en dimension finie
Théorème 9.4 : des quatre dimensions ou formule de Grassmann
Définition 9.4 : décomposition en somme directe
Théorème 9.5 : propriété récursive des sommes directes
Théorème 9.6 : définition équivalente d'une décomposition en somme directe
Théorème 9.7 : caractérisation d'une décomposition en somme directe
Définition 9.5 : base d'un espace vectoriel adaptée à un sous-espace vectoriel, à une somme directe de sous-espaces vectoriels

10. Projecteurs.

Définition 10.1 : projecteurs associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires
Théorème 10.1 : propriétés pour des projecteurs associés
Théorème 10.2 : caractérisation des sous-espaces vectoriels définissant un projecteur
Définition 10.2 : famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe
Théorème 10.3 : généralisation du théorème 10.1

11. Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition 11.1 : polynômes de Lagrange
Théorème 11.1 : existence et unicité des bases de Lagrange

12. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

Définition 12.1 et théorème 12.1 : trace d'une matrice carrée
Théorème 12.2 : propriétés basiques de la trace des matrices
Théorème 12.3 et définition 12.2 : trace d'un endomorphisme
Théorème 12.4 : trace d'un projecteur

13. Dual d'un espace vectoriel.

Définition 13.1 : dual d'un espace
Théorème 13.1 : dimension du dual pour un espace de dimension finie
Définition 13.2 : hyperplan (en dimension finie)
Théorème 13.2 : noyau des formes linéaires non nulles
Théorème 13.3 et définition 13.3 : base duale d'une base en dimension finie
Théorème 13.4 et définition 13.4 : base préduale (ou anté-duale) d'une base de E*
Théorème 13.5 : équations d'un hyperplan

14. Structure affine canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Définition 14.1 (hors programme) : espace affine

Espaces vectoriels (et affines).

Chap. 04 : cours complet.

1. Espaces vectoriels réels ou complexes (Sup).

Définition 1.1 : K-espace vectoriel

Soit E un ensemble, **K** un corps (égal en général à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dit que (E,+,.) est un K-espace vectoriel ou espace vectoriel sur **K** si et seulement si :

- + est une loi de composition interne sur E : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y$ existe et : $x+y \in E$,
- + est associative : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- + possède un élément neutre dans E, en général noté 0 : $\forall x \in E$, $x + 0 = 0 + x = x$,
- tout élément de E admet un symétrique pour la loi + appelé opposé de x :
  $\forall x \in E, \exists x' \in E$, $(x' = -x)$, tel que : $x + x' = x' + x = 0$,

ce qui fait alors de (E,+) un groupe,

- + est commutative : $\forall (x,y) \in E^2$, $x + y = y + x$,

ce qui rend le groupe (E,+) commutatif ou abélien,
la loi . ayant de plus les propriétés suivantes :

- c'est une loi de composition externe sur E : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.x$ existe et : $\lambda.x \in E$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$,
- $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$,
- $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $(\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$,
- $\forall x \in E$, $1.x = x$.

Les éléments de E sont appelés « vecteurs » et ceux de **K** « scalaires ».

Définition 1.2 : K-algèbre

Un ensemble $(E,+,*,.)$ est une **K**-algèbre si et seulement si :

- (E,+,.) est un **K**-espace vectoriel,
- $*$ est distributive par rapport à +,
- $\forall (x,y) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.(x*y) = x*(\lambda.y) = (\lambda.x)*y$.

Si la loi $*$ est associative, commutative ou unitaire, on dit de même que l'algèbre est associative, commutative, unitaire.

Théorème 1.1 : exemples

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (suivant les cas), dits espaces vectoriels de référence.

- les ensembles de n-uplets de réels ou de complexes : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$,
- les ensembles de fonctions définies sur I (éventuellement $\mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un **K**-espace vectoriel (E,+,.) : $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(I,E)$,
- les ensembles de polynômes à coefficients réels ou complexes : $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$,
- les ensembles de suites réelles ou complexes : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
- les ensembles de matrices carrées ou rectangles à coefficients réels ou complexes : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Les ensembles suivants sont des **K**-algèbres :

- $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$,
- $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration :

Une fois définies les lois dans ces ensembles, la démonstration du fait que ce sont bien des **K**-espaces vectoriels ou des **K**-algèbres est immédiate.
On précise donc les lois :

- dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
  $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n)$.
- dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(I,E)$: $\forall (f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $E)$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  $(f + g)$ est la fonction de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou E, telle que : $\forall x \in I$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
  $\lambda.f$ est la fonction de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou E, telle que : $\forall x \in I$, $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$,

et pour $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$, $(f\times g)$ est la fonction de I dans **K**, telle que : $\forall x \in I$, $(f\times g)(x) = f(x).g(x)$,
l'élément unité pour la loi $\times$ étant alors la fonction 1 telle que : $\forall x \in I$, $1(x) = 1$.
C'est alors une **K**-algèbre commutative (la loi $\times$ est commutative).

- dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{K}_n[X]$: $\forall P = a_p.X^p + \dots + a_0$, $Q = b_q.X^q + \dots + b_0$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  pour : $N = \max(p,q)$, $P + Q = (a_N + b_N).X^N + \dots + (a_0 + b_0)$,
  $\lambda.P = (\lambda.a_p).X^p + \dots + (\lambda.a_0)$,

  et pour $\mathbf{K}[X]$, le produit $\times$ est défini par : $(P.Q) = \sum_{k=0}^{p+q}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}\right).X^k$,
  l'élément unité étant le polynôme constant égal à 1.
  C'est alors une **K**-algèbre commutative.
- dans $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$: $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
  $\lambda.(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda.a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$: $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,n}+b_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{1,1} & \cdots & \lambda.a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda.a_{n,1} & \cdots & \lambda.a_{n,n} \end{pmatrix},$$

et pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le produit $\times$ est défini par : $A\times B = C$, avec : $\forall 1 \le i,j \le n$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}$,
l'élément unité étant la matrice I_n.
C'est alors une **K**-algèbre commutative pour : $n = 1$, non commutative pour : $n \ge 2$.

Définition 1.3 : combinaison linéaire de vecteurs

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) de vecteurs de E.
Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur de E qui s'écrit : $\sum_{i\in I}\lambda_i.x_i$, où les λ_i sont des scalaires qui sont tous nuls, sauf au plus un nombre fini d'entre eux.
En particulier, si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie de vecteurs de E, une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de E qui s'écrit : $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.x_i$, où les λ_i sont n scalaires.

Définition 1.4 : sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel, et F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F,+,.)$ est un **K**-espace vectoriel (donc pour les mêmes lois que celles de E, ou plus précisément pour les lois induites dans F par celles de E).

Théorème 1.2 : caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et F un ensemble.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F est inclus dans E,
- F est non vide,
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $(\lambda.x + \mu.y) \in F$.

Démonstration :

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est bien inclus dans E, il contient l'élément neutre pour l'addition (puisque (F,+) est un groupe), c'est-à-dire le vecteur nul, et F est non vide. Enfin, les lois + et . sont respectivement des lois de composition interne et externe, dont la stabilité de F par combinaison linéaire en découle.

• Réciproquement, si F vérifie les conditions proposées, alors :
- la loi + est interne dans F : $\forall (x,y) \in F^2$, pour : $\lambda = \mu = 1$, $1.x + 1.y = x + y \in F$,
- la loi + étant associative et commutative dans E, elle le reste dans F,
- F contient 0, puisque, étant non vide : $\exists x \in F$, et : $1.x - 1.x = 0 \in F$,
- tout élément de F a son symétrique dans F car : $\forall x \in F$, $0.0 + (-1).x = -x \in F$,
- la loi . est une loi de composition externe dans F puisque : $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $0.0 + \lambda.x = \lambda.x \in F$,
- les quatre dernières propriétés étant vraies dans E, elles restent vraies dans F.

Théorème 1.3 et définition 1.5 : espace vectoriel produit

Soient (E+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels (où l'on note de la même façon dans E et F les lois de composition internes et externes).
Alors les lois + et . définies par :
- $\forall ((x,y), (x',y')) \in (E\times F)^2$, $(x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')$,
- $\forall (x,y) \in E\times F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.(x,y) = (\lambda.x,\lambda.y)$,

font de E×F un **K**-espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit de E et de F.

Démonstration :

Avec les lois ainsi définies, on vérifie que les résultats vrais dans E et dans F entraînent les mêmes pour les nouvelles lois dans E×F.
En particulier, l'élément nul dans E×F est (0,0) et l'opposé d'un élément (x,y) de E×F est (-x,-y).

2. Combinaisons linéaires et familles (Sup).

Définition 2.1 : famille libre de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
On dit que (x_i) est une famille libre si et seulement si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est nécessairement à coefficients nuls.
En particulier, si la famille (x_i) est finie de la forme $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, la famille est libre si et seulement si :
$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$.

Définition 2.2 : famille liée de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
La famille (x_i) est dite liée si et seulement si elle n'est pas libre.
En particulier, si la famille (x_i) est finie de la forme $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, la famille est liée si et seulement si :
$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0)$.

Théorème 2.1 : caractérisation des familles liées

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
La famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille (on ne sait pas a priori lequel) peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration :

• Si la famille est liée, il existe une combinaison linéaire faisant intervenir un nombre fini de vecteurs de la famille, nulle et à coefficients non tous nuls, soit : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0$.
Puisque l'un des coefficient est non nul, on peut supposer que c'est λ_1 et alors : $x_1 = \sum_{k=2}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_1}.x_k$, et on a bien un des vecteurs de la famille s'écrivant comme combinaison linéaire des autres.
• Si maintenant, l'un d'entre eux s'écrit comme combinaison linéaire des autres, par exemple :
$x_1 = \mu_2.x_2 + \ldots + \mu_n.x_n$, alors : $1.x_1 - \mu_2.x_2 - \ldots - \mu_n.x_n = 0$.
On vient bien d'obtenir une combinaison linéaire des vecteurs de la famille, nulle et à coefficients non tous nuls (à cause du coefficient 1).

Théorème 2.2 : cas où l'un des vecteurs de la famille est nul

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
Si la famille comporte le vecteur nul ou deux fois le même vecteur, la famille est liée.

Démonstration :

• Si la famille comporte le vecteur nul : $x_1 = 0$, par exemple, alors : $1.x_1 = 0$, soit une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille : la famille est liée.

• Si la famille comporte deux fois le même vecteur, par exemple : $x_1 = x_k$, avec : $k \neq 1$, alors on a à nouveau une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille avec : $1.x_1 - 1.x_k = 0$.

Définition 2.3 : rang d'une famille de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de la famille, lorsqu'il existe, le plus grand nombre de vecteurs de la famille constituant une famille libre de vecteurs de E, et on le note $\text{rg}((x_i))$.
Le rang d'une famille finie de n vecteurs existe donc toujours et est toujours inférieur ou égal à n.

Définition 2.4 : sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et A une famille de vecteurs de E.
On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par la famille A l'ensemble noté Vect(A) des combinaisons linéaires de vecteurs de A, soit :
$\text{Vect}(A) = \{x \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in A^p, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p, x = \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_p.x_p\}$.
En particulier, si : $A = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, on a : $\text{Vect}(A) = \{x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_p.x_p\}$.

Théorème 2.3 : caractérisation d'un sous-espace vectoriel engendré

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.
Vect(A) est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, c'est-à-dire :
$\forall$ G, sous-espace vectoriel de E, $(A \subset G) \Rightarrow (\text{Vect}(A) \subset G)$.

Démonstration :

Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant A.
Alors G étant stable par combinaison linéaire, il contient toute combinaison linéaire de deux vecteurs qui lui appartiennent (en particulier deux vecteurs quelconques de A) et par récurrence toute combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs lui appartenant, ou appartenant à A.
Donc G contient bien Vect(A).

Définition 2.5 : base d'un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
On dit que (x_i) est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

3. Espaces vectoriels de dimension finie (Sup).

Définition 3.1 : espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit que E est de dimension finie sur **K** si et seulement si E admet une famille génératrice finie.

Théorème 3.1 : de l'échange

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Soient : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, une famille libre d'éléments de E, et : $\mathscr{B}'_0 = (e'_1, \dots, e'_q)$, une famille génératrice de E.
Alors : $p \leq q$.
De plus, on peut échanger p des vecteurs de la famille $\mathscr{B}'_0$ avec les p vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de E.

Démonstration :

• On sait que e_1 est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}'_0$, et les coefficients ne peuvent être tous nuls, sinon e_1 serait nul et la famille $\mathscr{B}$ ne pourrait être libre.
Quitte donc à permuter les vecteurs de $\mathscr{B}'_0$, on peut supposer que le coefficient $\lambda_{1,1}$ de e'_1 dans cette combinaison : $e_1 = \lambda_{1,1}.e'_1 + \dots \lambda_{q,1}.e'_q$, est non nul : $\lambda_{1,1} \neq 0$.
Alors : $e'_1 = \dfrac{1}{\lambda_{1,1}}.e_1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{q} \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{1,1}}.e'_i$, et : $E = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_q) \subset \text{Vect}(e_1, e'_2, \dots, e'_q) \subset E$,
d'où l'égalité des espaces vectoriels et le fait que la famille : $\mathscr{B}'_1 = (e_1, e'_2, \dots, e'_q)$ est génératrice de E.
• On itère maintenant le processus pour remplacer d'autres vecteurs de $\mathscr{B}'_0$ par d'autres provenant de $\mathscr{B}$. Supposons pour cela qu'on a formé une nouvelle famille $\mathscr{B}'_k$ génératrice de E en remplaçant les k

premiers vecteurs de la famille $\mathcal{B}'_0$ par $e_1, \dots, e_k$ (par exemple), avec : $k \le p - 1$, $k \le q - 1$.
Alors : $e_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_q)$, et : $\exists\ (\lambda_{1,k+1}, \dots, \lambda_{k,k+1}, \lambda_{k+1,k+1}, \dots \lambda_{q,k+1}) \in \mathbf{K}^q$, tel que :
$e_{k+1} = \lambda_{1,k+1}.e_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}.e_k + \lambda_{k+1,k+1}.e'_{k+1} + \dots + \lambda_{q,k+1}.e'_q$.
Il n'est pas possible d'avoir : $\lambda_{k+1,k+1} = \dots = \lambda_{q,k+1} = 0$, sinon la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ et donc $\mathcal{B}$ serait liée.
Quitte là encore, à permuter les vecteurs $e'_{k+1}, \dots, e'_q$, on peut supposer que : $\lambda_{k+1,k+1} \ne 0$, et :

$$e'_{k+1} = \frac{1}{\lambda_{k+1,k+1}}.e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{k+1,k+1}}.e_i - \sum_{i=k+2}^{q} \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{1,k+1}}.e'_i \ .$$

On en déduit à nouveau que : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}'_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}, e'_{k+2}, \dots e'_q) \subset E$, et la nouvelle famille :
$\mathcal{B}'_{k+1} = (e_1, \dots, e_{k+1}, e'_{k+2}, \dots e'_q)$, est encore génératrice de E.
• Enfin, si : $q < p$, alors en prenant : $k = q - 1$, dans la construction précédente, on obtient que :
$e'_q \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$, puis que : $\mathcal{B}'_q = (e_1, \dots, e_q)$ est génératrice de E.
On aurait alors en particulier : $q+1 \le p$, et : $e_{q+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$, et la famille $(e_1, \dots, e_{q+1})$, sous-famille de la famille $\mathcal{B}$, serait liée, et la famille $\mathcal{B}$ le serait aussi.
Donc on a bien : $p \le q$, et on a obtenu une nouvelle famille génératrice de E en ayant échangé p vecteurs de la famille $\mathcal{B}'_0$ par ceux de la famille $\mathcal{B}$.

Théorème 3.2 : existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Alors E admet une base comportant un nombre fini de vecteurs, et toutes les bases de E comportent le même nombre fini de vecteurs.

Démonstration :
• Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E.
Soit la famille ne comporte que le vecteur nul, et alors : $\forall\ x \in E$, $x = 0$.
Dans ce cas, et par convention, on a : $E = \mathrm{Vect}(\varnothing)$.
Soit la famille comporte au moins un vecteur non nul, et on considère alors l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de cette famille $(e_i)_{1\le i\le n}$.
Cet ensemble d'entiers est non vide (puisqu'il y a une sous-famille libre comportant un seul vecteur) et majoré par p : il contient donc un plus grand élément : $n \le p$.
Considérons maintenant une sous-famille libre $\mathcal{B}$ à n éléments parmi les $(e_i)_{1\le i\le p}$, et supposons pour simplifier que c'est $(e_1, \dots, e_n)$.
Tout vecteur e_k, avec : $n < k \le p$, (s'il y en a) est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ car :
$\exists\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_k) \in \mathbf{K}^{n+1}$, non tous nuls tel que : $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_n.e_n + \lambda_k.e_k = 0$,
puisque la famille ne peut pas être libre car comportant trop de vecteurs.
Mais λ_k ne peut être nul, sinon tous les coefficients seraient nuls (la famille $\mathcal{B}$ est libre), et on a donc :

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_k}.e_i \ .$$

Puis tout vecteur de E étant combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$, il est encore combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
On vient donc de démontrer que : $\forall\ x \in E$, $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.
Mais on a aussi évidemment : $\forall\ x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, $x \in E$, puisque E est stable par combinaison linéaire.
On a donc établi globalement que : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.
La famille $\mathcal{B}$ étant libre par construction, et maintenant génératrice de E, c'est une base de E.
• Soient maintenant deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E comportant n et n' vecteurs.
Puisque $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice de E, on a : $n \le n'$.
En échangeant les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a évidemment : $n' \le n$, et finalement : $n = n'$.

Définition 3.2 : dimension d'un K-espace vectoriel
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
Si E admet une base comportant un nombre fini de vecteurs, on appelle dimension de E le nombre de vecteurs de cette base qui est donc le même pour toutes les bases de E.

Théorème 3.3 : cardinal des familles libres ou génératrices dans un espace vectoriel de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et $(x_i)_{1\le i\le p}$ une famille de vecteurs de E.

Si la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est génératrice de E, alors : $p \ge n$.
Si la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est libre, alors : $p \le n$.
On a les équivalences :
$((x_i)_{1\le i\le p}$ base de E$) \Leftrightarrow ((x_i)_{1\le i\le p}$ libre et : $p = n) \Leftrightarrow ((x_i)_{1\le i\le p}$ génératrice de E et : $p = n)$.

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}$ une base de E (comportant donc n éléments).

Le théorème de l'échange montre que si $(x_i)_{1\le i\le p}$ est génératrice de E, alors : $p \ge n$, puisque $\mathscr{B}$ est libre.

De même, si la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est libre, alors : $p \le n$, puisque cette fois, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Il est clair ensuite que :

- $((x_i)_{1\le i\le p}$ base de E$) \Rightarrow ((x_i)_{1\le i\le p}$ libre et : $p = n)$, et :
- $((x_i)_{1\le i\le p}$ base de E$) \Rightarrow ((x_i)_{1\le i\le p}$ génératrice de E et : $p = n)$.

Réciproquement, si la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ libre et : $p = n$, alors on peut obtenir à partir de la famille génératrice $\mathscr{B}$ de E, une nouvelle famille génératrice de E en remplaçant p vecteurs de $\mathscr{B}$ par ceux de $(x_i)_{1\le i\le p}$.
Mais comme : $p = n$, cela signifie les remplacer tous, autrement dit la nouvelle famille obtenue, (soit la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ en fait) est génératrice de E. Mais comme elle était libre, c'est en fait une base de E.
Si enfin, la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est supposée génératrice de E, alors elle ne peut être liée, sinon l'un des vecteurs, par exemple x_n serait combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$ et la famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$ serait génératrice de E.
On aurait alors une famille génératrice de E à $(n - 1)$ éléments et une famille libre ($\mathscr{B}$) avec n éléments, ce qui est impossible.
La famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est donc libre, et étant de plus génératrice de E, c'est une base de E.

Théorème 3.4 : de la base incomplète

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E.
Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il est possible de compléter la famille $(x_1, \dots, x_p)$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$ en une nouvelle base de E.

Démonstration :

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, c'est une famille génératrice de E.
On sait donc par le théorème de l'échange que : $p \le n$, et qu'il est possible d'échanger p vecteurs de $\mathscr{B}$ avec les p vecteurs de l'autre famille pour former une nouvelle famille génératrice de E.
Mais puisque cette famille génératrice comporte n vecteurs, soit la dimension de E, c'est une base de E, et on l'a bien obtenue (autre façon de voir) en complétant $(x_1 \dots, x_p)$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$.

Théorème 3.5 : dimension d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, inférieure à celle de E.

Démonstration :

Soit : $F = \{0\}$, et F est de dimension finie égale à 0.
Sinon, considérons toutes les familles libres de vecteurs de F.
Toutes ces familles ont un cardinal (nombre d'éléments) inférieur à : $n = \dim(E)$.
Soit alors p le nombre maximum d'éléments d'une telle famille et : $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_p)$, une telle famille.
Alors $\mathscr{B}'$ est une base de F.
En effet : $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}') \subset F$, puisque $\mathscr{B}'$ est constituée d'éléments de F, lui-même stable par combinaison linéaire.
Puis : $\forall\, x \in F$, la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est liée (puisqu'étant formée de plus de p éléments de F).
Donc : $\exists\, (\lambda_1, \dots \lambda_p, \lambda_{p+1}) \in \mathbf{K}^{p+1}$, $(\lambda_1, \dots \lambda_p, \lambda_{p+1}) \ne (0,\dots,0)$, $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p + \lambda_{p+1}.x = 0$,
et λ_{p+1} n'est pas nul, sinon tous les coefficients seraient nuls, du fait de la liberté de la famille $\mathscr{B}'$.
On en déduit que : $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}')$, et : $F \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}')$.
Finalement, $\mathscr{B}'$ est génératrice de F et c'est une base de F, qui est donc de dimension : $p \le n = \dim(E)$.

Théorème 3.6 : caractérisation du rang d'une famille de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et $(x_i)_{1\le i\le p}$ une famille finie de vecteurs de E.
Alors le rang de la famille $(x_i)_{1\le i\le p}$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille.
Soit donc : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p))$.

Démonstration :

Le rang de la famille est le nombre d'éléments de la plus grande sous-famille libre extraite de $(x_1, \dots, x_p)$.
Notons k ce nombre et supposons (pour simplifier que $(x_1, \dots, x_k)$) est la famille libre en question.
Alors : $\forall\ k+1 \leq i \leq p$, la famille $(x_1, \dots, x_k, x_i)$ est liée, et :
$\exists\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_i) \in \mathbf{K}^{k+1}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_i) \neq (0, \dots, 0)$, $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_k.x_k + \lambda_i.x_i = 0$
Mais λ_i ne peut être nul, sinon la liberté de $(x_1, \dots, x_k)$ entraînerait la nullité de tous les coefficients.
On en déduit que x_i est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_k)$.
On constate ensuite que : $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$,
et ce qu'on vient d'établir montre que toute combinaison linéaire de $(x_1, \dots x_p)$ peut se réécrire en une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_k)$, ce qui nous donne : $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, d'où l'égalité.
La famille $(x_1, \dots, x_k)$ étant libre et génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, elle en constitue une base et :
$\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = k = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

Théorème 3.7 : égalité de sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors : $(F = G) \Leftrightarrow (F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G))$.
En particulier, si E est lui-même de dimension finie, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :
$(E = F) \Leftrightarrow (\dim(F) = \dim(E))$.

Démonstration :

Si : $F = G$, il est immédiat que : $F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G)$.
Si réciproquement, $F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G)$, soit : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, une base de F.
Alors : $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
Mais $\mathcal{B}$ est aussi une famille d'éléments de G, libre, et comportant : $p = \dim(G)$, éléments. Donc c'est une base de G et : $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$.
La deuxième équivalence vient du fait qu'on a toujours : $F \subset E$.

4. Applications linéaires (Sup).

Définition 4.1 : application linéaire entre K-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E,F)$

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.
On dit que u est une application de E dans F est linéaire si et seulement si :
$\forall\ (x,y) \in E^2$, $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$, et on note : $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$.

Théorème 4.1 : structure de K-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.
$\mathcal{L}(E,F)$ peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ d'une structure de **K**-algèbre.

Démonstration :

Comme au début du chapitre, on précise les lois utilisées et la démonstration du fait que l'on a bien un **K**-espace vectoriel ou une **K**-algèbre, se prouve sans difficulté particulière.
Pour cela, donc : $\forall\ (u,v) \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,

- $(u+v)$ est l'application linéaire de E dans F définie par : $\forall\ x \in E$, $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$,
- $(\lambda.u)$ est l'application linéaire de E dans F définie par : $\forall\ x \in E$, $(\lambda.u)(x) = \lambda.u(x)$,

et pour $\mathcal{L}(E)$, la deuxième application interne qui en fait une **K**-algèbre est définie par :

- $\forall\ (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\forall\ x \in E$, $(u o v)(x) = u(v(x))$,

l'élément unité étant l'application identité (qui est bien linéaire) de E dans E.
Cette algèbre est en général non commutative.

Définition 4.2 : le groupe linéaire d'un espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
L'ensemble des automorphismes de E forme un groupe pour la composition des applications, appelé groupe linéaire de E et noté Gl(E).

Définition 4.3 : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.

Une application linéaire de E dans F est appelée morphisme ou homomorphisme de E dans F.
Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
Un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E dans lui-même.

Définition 4.4 : image et noyau d'une application linéaire

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, et : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle image de u et noyau de u les ensembles :

- $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F, \exists\, x \in E, y = u(x)\}$,
- $\ker(u) = \{x \in E, u(x) = 0\}$.

Théorème 4.2 : image et noyau d'un morphisme sont des sous-espaces vectoriels

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, et : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors Im(u) est un sous-espace vectoriel de F et ker(u) un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

- Im(u) est inclus dans F, il est non vide, car : $0 = u(0) \in \mathrm{Im}(u)$.

Enfin : $\forall\, (y,y') \in (\mathrm{Im}(u))^2$, $\forall\, (\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2$, $\exists\, (x,x') \in E^2$, $y = u(x)$, $y' = u(x')$, et :
$\lambda.y + \lambda'.y' = \lambda.u(x) + \lambda'.u(x') = u(\lambda.x + \lambda'.x') \in \mathrm{Im}(u)$.

- ker(u) est inclus dans E, il est non vide, car : $u(0) = 0$, et : $0 \in \ker(u)$.

Enfin : $\forall\, (x,x') \in (\ker(u))^2$, $\forall\, (\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2$, $u(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.u(x) + \lambda'.u(x') = 0$, et : $[\lambda.x + \lambda'.x'] \in \ker(u)$.

Théorème 4.3 : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels et : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors :

- (u injective) $\Leftrightarrow$ ($\ker(u) = \{0\}$).
- (u surjective) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Im}(u) = F$).

Démonstration :

- Supposons u linéaire et injective. Alors 0 a un seul antécédent par u qui est 0, et : $\ker(u) = \{0\}$.

Si maintenant : $\ker(u) = \{0\}$, alors :
$\forall\, (x,x') \in E^2$, $(u(x) = u(x')) \Rightarrow (u(x - x') = 0) \Rightarrow (x - x' \in \ker(u)) \Rightarrow (x - x' = 0$, et : $x = x')$: u est injective.

- Soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Alors : u surjective, si et seulement si : $(\forall\, y \in F, \exists\, x \in E, y = u(x))$, ou encore : $(\forall\, y \in F, y \in \mathrm{Im}(u))$.
Donc c'est bien équivalent à : F Im(u).

Théorème 4.4 : caractérisation d'une application linéaire par son action sur une somme directe

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.

Soient $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille telle que :
$\forall\, 1 \le i \le n$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$.

Alors il existe une unique application linéaire : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, telle que : $\forall\, 1 \le i \le n$, $u_i = u|_{E_i}$.

Démonstration :

Supposons que u existe.
Alors, pour tout vecteur x se décomposant en : $x = x_1 + \ldots x_n$, suivant la somme directe, on a :
$u(x) = u(x_1) + \ldots u(x_n) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$.
Réciproquement, montrons que u définie par la formule précédente convient.

- C'est bien une application de E dans E, puisque pour un x donné, la décomposition est unique et u(x) aussi.
- Pour : $x \in E_i$, $x = 0 + \ldots + 0 + x + 0 + \ldots + 0$, sa décomposition suivant la somme directe, alors :

$u(x) = u_1(0) + \ldots + u_{i-1}(0) + u_i(x) + u_{i+1}(0) + \ldots + u_n(0) = u_i(0)$,
et la restriction de u à E_i est bien u_i.

- u est linéaire, car :

$\forall\, x = x_1 + \ldots + x_n \in E$, $\forall\, y = y_1 + \ldots + y_n \in E$, (avec leur décomposition), $\forall\, (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,
$(\lambda.x + \mu.y)$ se décompose en : $(\lambda.x_1 + \mu.y_1) + \ldots + (\lambda.x_n + \mu.y_n)$, car cette décomposition convient et elle est unique, et : $u(\lambda.x + \mu.y) = u_1(\lambda.x_1 + \mu.y_1) + \ldots + u_n(\lambda.x_n + \mu.y_n)$, par définition de u, d'où :

$u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u_1(x_1) + \mu.u_1(y_1) + \ldots + \lambda.u_n(x_n) + \mu.u_n(y_n) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.

Théorème 4.5 : isomorphisme entre l'image d'un morphisme et un supplémentaire de son noyau

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ des **K**-espaces vectoriels et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit E' un supplémentaire de ker(u) dans E.
Alors u permet de définir un isomorphisme de E' sur Im(u).

Démonstration :

Soit u' l'application définie par : $\forall x \in E'$, $u'(x) = u(x) \in Im(u)$.
On a bien défini une application linéaire (c'est immédiat) de E' dans Im(u).

- u' est injective car :

$\forall x \in E'$, $(x \in \ker(u')) \Rightarrow (u'(x) = u(x) = 0) \Rightarrow (x \in \ker(u))$. Donc : $x \in (\ker(u) \cap E')$, et : $x = 0$.

- u' est surjective car :

$\forall y \in Im(u)$, $\exists x \in E$, $u(x) = y$. Or x peut se décomposer en : $x = x' + x_0$, avec : $x' \in E'$, $x_0 \in \ker(u)$.
Donc : $y = u(x') + u(x_0) = u(x') = u'(x')$, et : $y \in Im(u')$.
Finalement : $Im(u) \subset Im(u')$, et l'autre inclusion étant immédiate, u' est bien surjective.

5. Applications linéaires en dimension finie (Sup).

Théorème 5.1 : famille génératrice de l'image d'un morphisme en dimension finie

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une famille génératrice de E.
Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de Im(u).
En particulier, Im(u) est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, inférieure à celle de E.

Démonstration :

On a immédiatement :

$\forall x \in E$, $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $x = x_1.e_1 + \ldots + x_n.e_n$, et donc : $u(x) = x_1.u(e_1) + \ldots + x_n.u(e_n)$.
Donc : $Im(u) \subset Vect(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.
Comme par ailleurs, il est clair que : $\forall 1 \leq i \leq n$, $u(e_i) \in Im(u)$, comme sous-espace vectoriel de F donc stable par combinaison linéaire, on a aussi : $Vect(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \subset Im(u)$.
On en déduit bien l'égalité et le fait que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est bien génératrice de Im(u).

Théorème 5.2 : caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie n.
Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E, et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de vecteurs de F.
Alors : $\exists ! \, u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\forall 1 \leq i \leq n$, $u(e_i) = a_i$.
Autrement dit, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ E.

Démonstration :

Pour tout vecteur x de E, on peut l'écrire sous la forme : $x = x_1.e_1 + \ldots + x_n.e_n$.
Dans ce cas, si une application u répondant aux critères proposés existe, alors : $u(x) = x_1.a_1 + \ldots + a_n.x_n$.
Donc si u existe, ça ne peut être que l'application que l'on vient de décrire.
Réciproquement, soit u définie telle qu'au dessus.
Alors u est bien une application de E dans F, puisque la décomposition d'un vecteur x quelconque de E étant unique, u(x) est défini de façon unique et appartient bien à F.
De plus, u est linéaire.
En effet : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $x = x_1.e_1 + \ldots + x_n.e_n$, $y = y_1.e_1 + \ldots + y_n.e_n$, et :

$\lambda.x + \mu.y = (\lambda.x_1 + \mu.y_1).e_1 + \ldots + (\lambda.x_n + \mu.y_n).e_n$, et par construction de u :

$u(\lambda.x + \mu.y) = (\lambda.x_1 + \mu.y_1).a_1 + \ldots + (\lambda.x_n + \mu.y_n).a_n = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.

Enfin, u répond bien aux conditions :

$\forall 1 \leq i \leq n$, $e_i = 0.e_1 + \ldots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \ldots + 0.e_n$, et : $u(e_i) = 1.a_i = a_i$.
Donc le u trouvé convient et il est bien unique.

Définition 5.1 : rang d'une application linéaire en dimension finie

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie, et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle rang de u la dimension de Im(u) : $rg(u) = \dim(Im(u))$.

Théorème 5.3 : du rang

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors : $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$.

Démonstration:

Puisque E est de dimension finie, Im(u) aussi.
Soit $(a_1, ..., a_p)$ une base de Im(u), et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E, antécédents des (a_i).
Considérons également une base $(e'_1, ..., e'_q)$ de ker(u), et montrons que la réunion $(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q)$ forme une base de E.
Soit donc une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs : $\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p + \mu_1.e'_1 + \ldots + \mu_q.e'_q = 0$.
En prenant l'image par u de cette combinaison linéaire, cela donne : $\lambda_1.a_1 + \ldots + \lambda_p.a_p = 0$,
mais comme la famille $(a_1, \ldots, a_p)$ est libre, comme base de Im(u), on en déduit : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
Puis : $\mu_1.e'_1 + \ldots + \mu_q.e'_q = 0$, entraîne également : $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, puisque la famille $(e'_1, \ldots, e'_q)$, comme base de ker(u), est libre.
Il est clair ensuite que : $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q) \subset E$.
Enfin, soit : $x \in E$.
Alors : $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, et : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, $u(x) = \lambda_1.a_1 + \ldots + \lambda_p.a_p = \lambda_1.u(e_1) + \ldots + \lambda_p.u(e_p)$.
Donc : $u(x - \lambda_1.e_1 - \ldots - \lambda_p.e_p) = 0$, et : $\exists (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbf{K}^q$, $x - \lambda_1.e_1 - \ldots - \lambda_p.e_p = \mu_1.e'_1 + \ldots + \mu_q.e'_q$.
Finalement : $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q)$, et la famille proposée est bien génératrice de E.
C'est bien une base de E, donc : $\dim(E) = p + q = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$.

Théorème 5.4 : caractérisation des isomorphismes entre espaces de dimension finie

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- u est un isomorphisme de E sur F,
- u est injective et : $\dim(E) = \dim(F)$,
- u est surjective et : $\dim(E) = \dim(F)$.

En particulier, pour : $u \in \mathscr{L}(E)$, toujours avec E de dimension finie, on a les équivalences :
(u bijective) $\Leftrightarrow$ (u injective) $\Leftrightarrow$ (u surjective).

Démonstration :

C'est une conséquence presque immédiate du théorème du rang.
Si u est un isomorphisme de E sur F, alors u est injective et surjective, donc : $\mathrm{Im}(u) = F$, $\ker(u) = \{0\}$.
Donc : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(F) + 0 = \dim(F)$.
Réciproquement, si u est injective, avec : $\dim(E) = \dim(F)$, alors : $\ker(u) = \{0\}$, et :
$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(F)$.
Or on a de plus : $\mathrm{Im}(u) \subset F$, donc : $\mathrm{Im}(u) = F$, et u est surjective, donc constitue bien un isomorphisme de E sur F.
De même si u est surjective, avec : $\dim(E) = \dim(F)$, alors : $\dim(\ker(u)) = \dim(E) - \dim(F) = 0$.
Donc u est injective et constitue bien à nouveau un isomorphisme de E sur F.
Le cas d'applications de E dans E, espace vectoriel de dimension finie, est un cas particulier.

Théorème 5.5 : conservation du rang par isomorphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, u un isomorphisme de E sur F.
Soit $(x_1, \ldots ,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors : $\mathrm{rg}(x_1, \ldots ,x_n) = \mathrm{rg}(u(x_1), \ldots , u(x_n))$.

Démonstration :

Soit : $E' = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
Alors : $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim(E').= p$, et on peut considérer une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E'.
Montrons que $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ est une base de $\mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$.

- On a : $\forall y \in \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$, $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, $y = \lambda_1.u(e_1) + \ldots + \lambda_p.u(e_p) = u(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p)$.

Or : $(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p) \in E'$, donc est combinaison linéaire des $(x_i)_{1 \le i \le n}$, et son image est combinaison linéaire des $(u(x_i))_{1 \le i \le n}$. A ce titre, y appartient à $\mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$.
Soit maintenant : $y \in \mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$.
Alors : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n = \lambda_1.u(x_1) + \ldots + \lambda_n.u(x_n) = u(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n)$, et : $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n) \in E'$.
Donc $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n)$ est combinaison linéaire des $(e_i)_{1 \le i \le p}$ et son image est dans $\mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$.
Finalement : $\mathrm{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$.

- La famille $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ est par ailleurs libre, puisque u est injective.

En effet, si on a : $\lambda_1.u(e_1) + \ldots + \lambda_p.u(e_p) = 0$, alors : $u(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p) = 0$, et : $(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p) = 0$.

Mais la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ étant libre, tous les coefficients sont nuls.
• Finalement, $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de $\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$, et : $\dim(\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))) = p$.
On a bien : $\mathrm{rg}(x_1, \dots ,x_n) = \mathrm{rg}(u(x_1), \dots , u(x_n))$.

Théorème 5.6 : dimension de $\mathscr{L}(E,F)$
Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et : $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E).\dim(F)$.
En particulier, toujours si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E)$ a pour dimension $(\dim(E))^2$.

Démonstration :
Considérons une base : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de E et une base : $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$, de F.
Puis, soit la famille $\mathscr{U}$ des applications linéaires $(u_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ définies par l'image des vecteurs de $\mathscr{B}$:
$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \forall\ 1 \leq j \leq p,\ \forall\ 1 \leq k \leq n,\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k}.e'_j$,
où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronnecker, valant 1 si : i = k, 0 sinon.
La famille $\mathscr{U}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$.
• Elle est libre.
En effet, si : $\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} \lambda_{i,j}.u_{i,j} = 0$, alors : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} \lambda_{i,j}.u_{i,j}(e_k) = 0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j}.e'_j$.
Comme la famille $(e'_1, \dots, e'_p)$ est libre, on en déduit que : $\forall\ 1 \leq k \leq n,\ \forall\ 1 \leq j \leq p,\ \lambda_{k,j} = 0$.
• Elle est génératrice de $\mathscr{L}(E,F)$.
On a évidemment : $\mathrm{Vect}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{L}(E,F)$, car ce sont bien des applications linéaires de E dans F, et $\mathscr{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.
Puis : $\forall\ u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall\ 1 \leq k \leq n,\ u(e_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}.e'_j = \sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} a_{i,j}.u_{i,j}(e_k) = \left(\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} a_{i,j}.u_{i,j}\right)(e_k)$.
Donc u et $\left(\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} a_{i,j}.u_{i,j}\right)$ sont deux applications linéaires de E dans F qui associent aux vecteurs de la base $\mathscr{B}$ les mêmes images : elles sont donc égales, soit : $u = \left(\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} a_{i,j}.u_{i,j}\right)$.
On vient donc de montrer que : $\mathscr{L}(E,F) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{U})$, et finalement : $\mathscr{L}(E,F) = \mathrm{Vect}(\mathscr{U})$.
• Puisque $\mathscr{L}(E,F)$ admet une famille génératrice finie, c'est un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et sa dimension vaut le nombre de vecteurs dans la famille $\mathscr{U}$, soit : $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = n.p = \dim(E).\dim(F)$.

6. Matrices (Sup).

Définition 6.1 et théorème 6.1 : les espaces vectoriels de matrices
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans **K** peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel de dimension n.p.

Démonstration :
Les lois qui font de ces ensembles des **K**-espaces vectoriels ont été reprécisées au début.
La structure de **K**-espace vectoriel s'obtient alors sans difficulté.
Pour la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on utilise la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$, définie par :
$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \forall\ 1 \leq j \leq p,\ \forall\ 1 \leq u \leq n,\ \forall\ 1 \leq v \leq p,\ E_{i,j}^{u,v} = \delta_{i,u}.\delta_{j,v}$,
autrement dit, la matrice $E_{i,j}$ est constituée de 0, sauf le terme d'indices i et j (à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne) qui seul vaut 1.
Cette famille est génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, puisque :
$\forall\ A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.E_{i,j}$ et : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p})$, puis : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p})$.
D'autre part, la famille est libre, puisque si : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.E_{i,j} = 0$, alors tous les coefficients $(a_{i,j})$ sont nuls.
Cette famille est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Donc $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension n.p.

Définition 6.2 : produit de matrices

Pour : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice produit : $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$, de A par B, par :

$$\forall\ 1 \le i \le n,\ \forall\ 1 \le j \le q,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}.b_{k,j}\ .$$

Théorème 6.2 : structure de groupe et d'algèbre pour $\mathcal{M}_n(K)$

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans **K** peut être muni d'une structure de **K**-algèbre de dimension n^2.

L'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un groupe pour la multiplication des matrices noté $Gl_n(\mathbf{K})$, et appelé groupe linéaire d'ordre n.

Démonstration :

Là encore, on précise la deuxième loi interne, multiplicative, comme on l'a fait dans le premier théorème du chapitre, pour obtenir :

$$\forall\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2,\ A.B = C, \text{ où : } \forall\ 1 \le i, j \le n,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\ ,$$

et les propriétés attendues se démontrent sans problème. L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est associative, unitaire, d'élément unité la matrice I_n, et non commutative pour : $n \ge 2$.

Définition 6.3 : matrice transposée d'une matrice

Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

On appelle transposée de A la matrice notée : $A' = {}^tA$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, définie par :

$\forall\ 1 \le i \le p,\ \forall\ 1 \le j \le n,\ a'_{i,j} = a_{j,i}$,

et on a : $\forall\ A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ {}^t({}^tA)) = A$.

Définition 6.4 : matrice symétrique, antisymétrique

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est :

- symétrique si et seulement si : ${}^tA = A$,
- antisymétrique si et seulement si : ${}^tA = -A$.

L'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Théorème 6.3 : dimension et supplémentarité de $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$

La transposition est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n.(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n.(n-1)}{2}$.

Démonstration :

- Il est clair que : $\forall\ (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2,\ \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ C = \lambda.A + \mu.B$, on a :
  ${}^tC = C'$, avec : $\forall\ 1 \le i \le p,\ \forall\ 1 \le j \le n,\ c'_{i,j} = c_{j,i} = \lambda.a_{j,i} + \mu.b_{j,i}$, et : ${}^tC = \lambda.{}^tA + \mu.{}^tB$.
- Pour la supplémentarité, on peut travailler par analyse-synthèse.

En effet, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Alors si on peut trouver : $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, et : $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, telles que : $M = S + A$, alors :

$${}^tM = S - A, \text{ et : } S = \frac{1}{2}.(M + {}^tM)\ , \text{ et : } A = \frac{1}{2}.(M - {}^tM)\ .$$

Réciproquement, l'unique couple (S,A) trouvé convient puisque :

$${}^tS = \frac{1}{2}.({}^tM + M) = S,\ {}^tA = \frac{1}{2}.({}^tM - M) = -A, \text{ et : } S + A = M.$$

Donc pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe un unique couple appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, dont la somme est égale à M : les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- Pour leur dimension, on propose une base en disant, par exemple pour $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, que :
  $\forall\ S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K}),\ \forall\ 1 \le i, j \le n,\ s_{i,j} = s_{j,i}$, et en reprenant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on obtient :

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}.E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} s_{i,j}.(E_{i,j} + E_{j,i})\ .$$

On obtient ainsi une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, dont on montre sans difficulté qu'elle est libre.

C'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, qui comporte : $n + \frac{(n-1).n}{2} = \frac{n.(n+1)}{2}$, éléments.

De même, on montre que la famille $((E_{i,j} - E_{j,i}))_{1\le i\le n-1, i+1\le j\le n}$, constitue une base de $\mathcal{A}(\mathbf{K})$, qui est donc de dimension : $\frac{(n-1).n}{2}$ (ou de dimension : $n^2 - \frac{n.(n+1)}{2}$).

Définition 6.5 : matrice définie par blocs

On peut définir une matrice : $M \in \mathcal{M}_{p+s,a+r}(\mathbf{K})$, par blocs de la façon suivante :

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, où : $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in M_{p,r}(\mathbf{K})$, $B \in M_{s,q}(\mathbf{K})$, $D \in M_{s,r}(\mathbf{K})$.

Définition 6.6 : matrices triangulaires ou diagonales par blocs

Une matrice : $M \in \mathcal{M}_{p+s,a+r}(\mathbf{K})$, écrite par blocs sous la forme :

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, où : $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in M_{p,r}(\mathbf{K})$, $B \in M_{s,q}(\mathbf{K})$, $D \in M_{s,r}(\mathbf{K})$,

est dite triangulaire par blocs si et seulement si on a : B = 0, et diagonale par blocs si : B = 0, et : C = 0.

Théorème 6.4 : somme et produit de matrices par blocs

Pour M et M' des matrices de $\mathcal{M}_{p+s,q+r}(\mathbf{K})$, écrites par blocs sous la forme :

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$,

où : $(A,A') \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$, $(C,C') \in (\mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K}))^2$, $(B,B') \in (\mathcal{M}_{s,q}(\mathbf{K}))^2$, $(D,D') \in (\mathcal{M}_{s,r}(\mathbf{K}))^2$,

on a : $M + M' = \begin{pmatrix} A+A' & C+C' \\ B+B' & D+D' \end{pmatrix}$.

De même, pour M et M' écrites par blocs ayant des types compatibles, on a :

$M.M' = \begin{pmatrix} A.A'+C.B' & A.C'+C.D' \\ B.A'+D.B' & B.C'+D.D' \end{pmatrix}$.

Démonstration :

Il suffit de constater que dans les sommes ou les produits proposés, les coefficients obtenus par les deux formules coïncident.

7. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de changement de base (Sup).

Définition 7.1 : matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Un vecteur x de E admet une unique décomposition selon la base $\mathcal{B}$ de E de la forme : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$.

On définit la matrice colonne : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, en posant : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 7.2 : matrice de changement de base (matrice de passage)

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de deux bases : $\mathcal{B} = (e_i)$, et : $\mathcal{B}' = (e'_i)$.

On a donc : $\forall\ 1 \le j \le n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i$.

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice : $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ainsi obtenue.

La matrice P est donc construite en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 7.1 : lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans différentes bases

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de deux bases : $\mathscr{B} = (e_i)$, et : $\mathscr{B}' = (e'_i)$, et soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit x un vecteur de E, X et X' les matrices colonnes de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Alors : X = P.X'.

Démonstration :

Il suffit d'exprimer les différentes écritures d'un vecteur donné :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j.e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j.\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.x'_j\right).e_i \text{ , et donc :}$$

$$\forall\, 1 \le i \le n,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.x'_j \text{ , ce qui globalement, s'écrit bien : } X = P.X'.$$

8. Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases (Sup).

Définition 8.1 : matrice représentative d'une application linéaire dans des bases

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Pour tout : $1 \le j \le p$, et tout vecteur e_j de $\mathscr{B}$, on note : $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.f_i$.

La matrice A ainsi obtenue est la matrice représentative de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Elle est donc construite en écrivant en colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ exprimées dans la base $\mathscr{C}$.
On la note parfois : A = mat(u,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$).

Théorème 8.1 : isomorphisme entre $\mathscr{M}_{n,p}$(K) et $\mathscr{L}$(E,F)

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Alors : $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\text{mat}(\lambda.u+\mu.v, \mathscr{B},\mathscr{C}) = \lambda.\text{mat}(u,\mathscr{B},\mathscr{C}) + \mu.\text{mat}(v,\mathscr{B},\mathscr{C})$.
L'application de $\mathscr{L}$(E,F) dans $\mathscr{M}_{n,p}$(**K**) qui à une application linéaire u de E dans F, fait correspondre mat(u,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$), est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration :

• Soient u et v des éléments de $\mathscr{L}$(E,F), λ et μ des scalaires.
Notons : $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$, $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$, et : U = mat(u,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$), V = mat(v,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$).

Alors : $\forall\, 1 \le j \le p$, $(\lambda.u + \mu.v)(b_j) = \lambda.u(b_j) + \mu.v(b_j) = \lambda.\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}.c_i + \mu.\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}.c_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda.u_{i,j} + \mu.v_{i,j}).c_i$.

Il est alors clair, en écrivant les matrices, que : mat(λ.u+μ.v,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$) = λ.U + μ.V, ce que l'on voulait.

• Les espaces de départ et d'arrivée étant de même dimension égale à n.p, il suffit maintenant de démontrer que l'application considérée est injective.
Or si la matrice représentative de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est nulle, c'est que tout vecteur de $\mathscr{B}$ a pour image le vecteur nulle. Mais comme l'application nulle a cette propriété, et qu'il n'y a qu'une seule application linéaire de E dans F à l'avoir, c'est que : u = 0.

Théorème 8.2 : traduction matricielle du lien entre un vecteur et son image par un morphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit : $u \in \mathscr{L}(E,F)$, de matrice représentative A dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Pour un vecteur x de E, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, et Y la matrice colonne des coordonnées de son image : y = u(x), dans la base $\mathscr{C}$.
Alors : Y = A.X.

Démonstration :

Soit : $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$, et : $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$.

Alors : $\forall x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{p} x_j.b_j$, et : $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i.c_i = \sum_{j=1}^{p} x_j.u(b_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.c_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_j\right).c_i$, ce qui correspond bien à : Y = A.X.

Définition 8.2 : application linéaire ou endomorphisme canoniquement associé à une matrice

Soit : $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, et : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

L'application linéaire u de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$, telle que : $mat(u,\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n) = A$, où $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$, est appelée application linéaire canoniquement associée à A.

Dans le cas où : n = p, u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Théorème 8.3 : matrice d'une composée

Soient (E,+,.), (F,+,.), (G,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, munis de bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Alors : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G)$, $mat(vou,\mathcal{B},\mathcal{D}) = mat(v,\mathcal{C},\mathcal{D}).mat(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Démonstration :

Notons : $\mathcal{B} = (b_1, .., b_q)$, $\mathcal{C} = (c_1, …, c_p)$, et : $\mathcal{D} = (d_1, …, d_n)$,

puis : $U = mat(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, $V = mat(v,\mathcal{C},\mathcal{D})$, et : $W = mat(vou,\mathcal{B},\mathcal{D})$.

Alors : $\forall 1 \le k \le q$,

$$vou(b_k) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,k}.d_i \quad v(u(b_k)) = v\left(\sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.c_j\right) = \sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.v(c_j) = \sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}.d_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} v_{i,j}.u_{j,k}\right).d_i .$$

Donc : $\forall 1 \le i \le n$, $\forall 1 \le k \le q$, $w_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} v_{i,j}.u_{j,k}$, ce qui correspond bien au produit matriciel annoncé.

Théorème 8.4 : liens entre les matrices de passage pour trois bases de l'espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de trois bases : $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$, $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\le i\le n}$, et : $\mathcal{B}'' = (e''_i)_{1\le i\le n}$.

Alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = mat(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

De plus : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Par ailleurs, les matrices P et P' de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ sont inverses l'une de l'autre.

Enfin, la relation : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$, peut se retrouver en utilisant le lien existant entre les coordonnées d'un même vecteur de E dans les trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

Démonstration :

Puisque : $\forall 1 \le j \le n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i = id_E(e'_j)$, il est immédiat que : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = mat(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Puis : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = mat(id_E, \mathcal{B}',\mathcal{B}).mat(id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}') = mat(id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$.

Par ailleurs, puisque : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = mat(id_E, \mathcal{B},\mathcal{B}) = I_n$, d'une part, et d'autre part : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$, les matrices $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont bien inverses l'une de l'autre.

Enfin, si on note plus simplement : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $P' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$, $P'' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$, X, X' et X'' les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur x de E dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors :

X = P.X', X' = P'.X'', d'où : X = P.P'.X'', et d'autre part : X = P''.X'', soit finalement : P'' = P.P'.

Théorème 8.5 : lien entre les matrices d'un même endomorphisme dans différentes bases

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, P et Q les matrices de passages A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ d'une part, et de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'autre part.

Soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec : $A = mat(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, $A' = mat(u,\mathcal{B}',\mathcal{C}')$.

Alors : $A' = Q^{-1}.A.P$.

En particulier, si : E = F, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, et : $u \in \mathcal{L}(E)$, on a : P = Q, et : $A' = P^{-1}.A.P$.

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $Q^{-1}.A.P = mat(id_E,\mathcal{C},\mathcal{C}').mat(u,\mathcal{B},\mathcal{C}).mat(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = mat(u,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = A'$.

9. Somme de sous-espaces vectoriels, sommes directes, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 9.1 et définition 9.1 : somme de sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $(E_i)_{1\le i\le n}$ des sous-espaces vectoriels de E.

L'ensemble des vecteurs de E, s'écrivant comme sommes de vecteurs des différents sous-espaces E_i, soit donc :

$E_1 + \ldots + E_n = \{x \in E, \exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\}$,

est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$.

Démonstration :

Il est clair que $E_1 + \ldots + E_n$ est inclus dans E, puisque constitué de vecteurs, sommes de vecteurs de E qui est lui-même stable par combinaison linéaire.

De plus $E_1 + \ldots + E_n$ est non vide, puisque chaque E_i est non vide (ils contiennent tous le vecteur nul) et donc : $0 + \ldots + 0 = 0$, est encore élément de E.

Enfin : $\forall (x,y) \in (E_1 + \ldots + E_n)^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\exists ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in (E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n)^2$, et :

$\lambda.x + \mu.y = (\lambda_1.x_1 + \mu_1.y_1) + \ldots + (\lambda_n.x_n + \mu_n.y_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 9.2 : autre définition d'une somme de sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $(E_i)_{1 \le i \le n}$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors : $E_1 + \ldots + E_n = \mathrm{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$.

C'est donc en particulier le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$.

Démonstration :

• Tout élément de $E_1 + \ldots + E_n$ est somme d'éléments des différents E_i, donc comme combinaison linéaire d'éléments de $E_1 \cup \ldots \cup E_n$, c'est un élément de $\mathrm{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$.

• Un élément de $\mathrm{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.

En regroupant dans cette combinaison linéaire (impliquant un nombre fini de vecteurs) ceux qui appartiennent à E_1, à E_2, et à chaque E_i, on fait apparaître une somme de vecteurs, chacun appartenant à l'un des E_i et à ce titre, on obtient bien un élément de $E_1 + \ldots + E_n$.

• A ce titre, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup \ldots \cup E_n$, donc tous les E_i.

Définition 9.2 : somme directe de deux ou de plusieurs sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme (F + G) est directe, si et seulement si on a : $F \cap G = \{0\}$.

Lorsque la somme de F et de G est directe, elle est notée : $F \oplus G$.

Plus généralement, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $(E_1 + \ldots + E_n)$ est directe si et seulement si l'intersection de chaque E_i avec la somme de tous les autres est réduite à {0}, soit :

$\forall 1 \le i \le n,\ E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n) = \{0\}$.

Dans ce cas, à nouveau, la somme de ces sous-espaces vectoriels se note : $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

Définition 9.3 : sous-espaces supplémentaires

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si on a : $E = F \oplus G$.

Théorème 9.3 : existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.

Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E, tel que : $E = F \oplus G$.

On dit alors que G est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de F dans E.

On a de plus, pour tout supplémentaire G de F dans E : $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration :

F étant lui-même de dimension finie, il admet une base $(e_1, \ldots, e_p)$ qui peut être complétée en une base de E : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Posons : $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Alors : $F \cap G = \{0\}$.

En effet : $\forall x \in F \cap G$,

• $x \in F$, et : $\exists (x_1, \ldots x_p) \in \mathbf{K}^p$, $x = x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p$,

• $x \in G$, et : $\exists (x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{n-p}$, $x = x_{p+1}.e_{p+1} + \ldots + x_n.e_n$,

et donc : $x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p - x_{p+1}.e_{p+1} - \ldots - x_n.e_n = 0$.

Or puisque la famille $\mathscr{B}$ est une base de E, elle est libre et tous les coefficients sont nuls, d'où : $x = 0$.

Puis : $F + G = E$.

En effet : $\forall x \in E$, $\exists (x_1, \ldots x_n) \in \mathbf{K}^n$, $x = (x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p) + (x_{p+1}.e_{p+1} + \ldots + x_n.e_n)$, puisque $\mathscr{B}$ est

génératrice de E et le vecteur x se décompose suivant F+G.
Donc : $E \subset F+G$, et comme l'inclusion inverse est évidente, on a bien : $E = F+G$.
Enfin, si G est un supplémentaire quelconque de F, on a :
$\dim(G) = \dim(E) + \dim(F \cap G) - \dim(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

Théorème 9.4 : des quatre dimensions ou formule de Grassmann

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors (F + G) est de dimension finie ainsi que $F \cap G$, et :
$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration :

Puisque F et G sont de dimension finie, ils admettent tous deux une famille génératrice finie, et la réunion de ces deux familles fournit une famille génératrice finie de F+G qui est donc de dimension finie.
Puis $(F \cap G)$ étant inclus dans un espace de dimension finie (F+G), il est lui-même de dimension finie.
Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $(F \cap G)$.
Comme $(F \cap G)$ est un sous-espace vectoriel de F et de G, on peut considérer un supplémentaire F' de $(F \cap G)$ dans F et une $(a_{k+1}, \dots, a_p)$ de ce supplémentaire d'une part, et un supplémentaire G' de $(F \cap G)$ dans G, ainsi qu'une base $(b_{k+1}, \dots, b_q)$ de cet autre supplémentaire d'autre part.
Montrons que $(e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_p, b_{k+1}, \dots, b_q)$ est une base de F+G.

- C'est une famille génératrice de F+G, puisque ce sont tous bien des vecteurs de F+G et :
$\forall u \in (F+G), \exists (x,y) \in F \times G, u = x+y$, et : $\exists (\lambda_1, \dots \lambda_p) \in \mathbf{K}^p, \exists (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbf{K}^q$, tels que :
$x = \lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \dots + \lambda_p.a_p$, puisque : $F = (F \cap G) \oplus F'$, et :
$y = \mu_1.e_1 + \dots + \mu_K.e_k + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \dots + \mu_q.b_q$, puisque là aussi : $G = (F \cap G) \oplus G'$, d'où :
$u = (\lambda_1 + \mu_1).e_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k).e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \dots + \lambda_p.a_p + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \dots + \mu_q.b_q$.
- C'est une famille libre.

Soit en effet : $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \dots + \lambda_p.a_p + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \dots + \mu_q.b_q = 0$.
Alors : $(\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \dots + \lambda_p.a_p) = -(\mu_{k+1}.b_{k+1} + \dots + \mu_q.b_q) \in (F \cap G')$.
Donc ce vecteur appartient à G' car : $(F \cap G') \subset G'$, et à $(F \cap G)$ car : $(F \cap G') \subset (F \cap G)$.
Donc il est nul, et la famille $(b_{k+1}, \dots, b_q)$ étant libre, tous les coefficients correspondant sont nuls.
Puis : $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_k.e_k = -(\lambda_{k+1}.a_{k+1} + \dots + \lambda_p.a_p)$, et là encore comme F et F' sont supplémentaires, le vecteur apparaissant dans cette égalité est nul, et tous les coefficients sont nuls.

- C'est donc une base de (F+G) et :
$\dim(F+G) = k + (p - k) + (q - k) = p + q - k = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Définition 9.4 : décomposition d'un espace vectoriel en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que E se décompose en somme directe suivant les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ si et seulement si : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

Théorème 9.5 : propriété récursive des sommes directes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
Si la somme $(E_1 + \dots + E_n)$ des n sous-espaces vectoriels est directe, alors la somme de $(n - 1)$ quelconques parmi eux l'est encore, et la somme d'une sous-famille quelconque de parmi les n aussi.

Démonstration :

Montrons que la somme $(E_1 + \dots + E_{n-1})$ est encore directe, et pour cela étudions : $(E_2 + \dots E_{n-1}) \cap E_1$.
Soit donc un élément : $x \in E_1$, et : $x \in (E_2 + \dots + E_{n-1})$.
Alors : $x = x_1 \in E_1$, et : $\exists (x_2, \dots x_{n-1}) \in E_2 \times \dots \times E_{n-1}$, $x = x_2 + \dots + x_{n-1}$,
d'où : $x = x_2 + \dots + x_{n-1} + 0 \in (E_2 + \dots + E_n)$, et : $x \in E_1 \cap (E_2 + \dots + E_n)$, donc : $x = 0$.
On peut généraliser ce résultat à l'intersection d'un quelconque des $(n - 1)$ avec la somme des $(n - 2)$ autres, puis à $(n - 1)$ quelconques parmi les n de départ.
Enfin, par récurrence descendante, toute sous-famille d'une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe, est encore en somme directe.

Théorème 9.6 : définition équivalente d'une décomposition en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
Alors E se décompose en somme directe suivant les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme de vecteurs de $E_1, \dots, E_n$.

Démonstration :

• Supposons que : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.
Alors E étant la somme des sous-espaces vectoriels E_i, tout vecteur de E se décompose suivant cette somme, comme somme de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.
Supposons maintenant pour un vecteur x de E, deux telles décompositions.
Alors : $x = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, avec : $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$.
Donc : $(x_1 - y_1) + \ldots + (x_{n-1} - y_{n-1}) = y_n - x_n \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1})$, et donc est nul, et : $x_n = y_n$.
On termine par récurrence descendante pour obtenir : $x_n = y_n$, $x_{n-1} = y_{n-1}$, …, $x_1 = y_1$, et la décomposition est unique.
• Supposons maintenant que tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.
On sait déjà que : $E = E_1 + \ldots + E_n$.
Montrons maintenant que la somme est directe, et pour cela, soit : $x \in E_1 \cap (E_2 + \ldots + E_n)$, par exemple.
Alors : $x = x_1 = x_2 + \ldots + x_n$, avec : $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, et : $0 = 0 + \ldots + 0 = x_1 - x_2 - \ldots - x_n$.
Cela fournit deux décompositions du vecteur nul suivant $E_1 + \ldots + E_n$ et : $0 = x_1 = \ldots = x_n$, puis : $x = 0$.
La somme est bien directe.

Théorème 9.7 : caractérisation d'une décomposition en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$,
- $\dim(E_1 + \ldots + E_n) = \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_n)$, et : $E = E_1 + \ldots + E_n$,
- on obtient une base de E en réunissant des bases choisies dans chaque E_i.

Démonstration :

• Montrons que : i) $\Rightarrow$ ii).
Si : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, alors :
$E = E_1 + \ldots + E_n$, et : $\dim(E_1 + \ldots + E_n) = \dim(E_1 + \ldots + E_{n-1}) + \dim(E_n) - \dim((E_1 + \ldots + E_{n-1}) \cap E_n)$.
Comme la dernière intersection est réduite à $\{0\}$, sa dimension est nulle.
On continue ensuite par récurrence descendante pour obtenir le résultat voulu.
• Montrons : ii) $\Rightarrow$ iii).
Soient $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ des bases des différents E_i, et : $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_n$.
Puisque chaque base $\mathscr{B}_i$ est génératrice de E_i, $\mathscr{B}$ est génératrice de E, et : $\mathrm{card}(\mathscr{B}) \geq \dim(E)$.
Comme de plus le nombre d'éléments de $\mathscr{B}$ est :
$\mathrm{card}(\mathscr{B}) \leq \mathrm{card}(\mathscr{B}_1) + \ldots + \mathrm{card}(\mathscr{B}_n) = \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_n) = \dim(E)$, on a : $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$.
Donc $\mathscr{B}$ est bien une base de E.
• Montrons que : iii) $\Rightarrow$ i).
Soient donc $\mathscr{B}$ une base de E obtenue comme réunion de base $\mathscr{B}_i$ des différents E_i.
$\mathscr{B}$ étant génératrice de E, on en déduit que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc des $\mathscr{B}_i$, donc, en regroupant les différents vecteurs appartenant à chaque E_i, comme somme de vecteurs des différents E_i.
Soit donc : $E = E_1 + \ldots + E_n$ (en fait, une simple inclusion, mais l'inverse est immédiate).
Puis soit par exemple : $x \in E_1 \cap (E_2 + \ldots + E_n)$.
Alors : $\exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, $x = x_1 = x_2 + \ldots + x_n$.
En exprimant les différents vecteurs x_i suivant les bases $\mathscr{B}_i$, cela fournit, par différence une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ égale à 0.
Mais $\mathscr{B}$ étant une famille libre, tous les coefficients de cette combinaison sont nuls, et : $x = 0$.
On en déduit que la somme est directe (en obtenant le même résultat pour les autres intersections).

Définition 9.5 : base d'un espace vectoriel adaptée à un sous-espace vectoriel, à une somme directe de sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.
On dit qu'une base $\mathscr{B}$ de E est adaptée à F, si elle est obtenue comme réunion d'une base de F et d'une base d'un supplémentaire de F dans E.
On dit qu'une base de E est adaptée à une décomposition de E en somme directe, si elle obtenue comme réunion de bases de chacun des sous-espaces vectoriels concernés par cette somme directe.

10. Projecteurs.

Définition 10.1 : projecteurs associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple : $(y,z) \in F \times G$, tel que : $x = y + z$.
On appelle : $p(x) = y$, le projeté de x sur F parallèlement à G et : $q(x) = z$, le projeté de x sur G parallèlement à F.
Les applications p et q de E dans E sont appelés projecteurs associés à la décomposition : $E = F \oplus G$.

Théorème 10.1 : propriétés pour des projecteurs associés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p et q les projecteurs associés à la décomposition : $E = F \oplus G$.
Alors :

- $p \in \mathscr{L}(E)$, $q \in \mathscr{L}(E)$,
- $pop = p$, $qoq = q$, $poq = qop = 0$, $p + q = id_E$,
- $\ker(p) = \mathrm{Im}(q) = G$, $\ker(q) = \mathrm{Im}(p) = F$.

Démonstration :

- Pour : $(x,x') \in E^2$, $(\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2$, on décompose : $x = y + z$, $x' = y' + z'$, suivant : $E = F \oplus G$,
et : $\lambda.x + \lambda'.x' = (\lambda.y + \lambda'.y') + (\lambda.z + \lambda'.z')$, est une décomposition de $[\lambda.x + \lambda'.x']$ suivant : $E = F \oplus G$.
Mais une telle décomposition étant unique, c'est LA décomposition de $[\lambda.x + \lambda'.x']$ suivant : $E = F \oplus G$.
Puis : $p(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.y + \lambda'.y'$, par décomposition, et : $p(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.p(x) + \lambda'.p(x')$.
Le résultat est identique pour q.
- Il est presque immédiat que : $pop = p$, puisque, avec les notations précédentes, pour : $x \in E$,
$p(x) = p(x) + 0$, avec : $p(x) \in F$, $0 \in G$, et : $p(p(x)) = p(x)$, et : $q(p(x)) = 0$.
De même pour q.
Puis : $x = y + z = p(x) + q(x)$, et : $id_E = p + q$, puisque cette égalité est vérifiée pour tout vecteur x de E.
- $\forall x \in F$, $x = p(x)$, et donc : $F \subset \mathrm{Im}(p)$. Mais vu la définition de p, on a aussi : $\mathrm{Im}(p) \subset F$, d'où l'égalité.
Puis : $\forall x \in G$, $p(x) = 0$, et : $x \in \ker(p)$. Mais on a également : $\forall x \in \ker(p)$, $x = 0 + z$, et : $x \in G$, d'où lé encore l'égalité.
On a encore des résultats identiques pour q.

Théorème 10.2 : caractérisation des sous-espaces vectoriels définissant un projecteur

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $p \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $pop = p$.
Alors Im(p) et ker(p) sont supplémentaires dans E, et p est un projecteur de E sur Im(p) parallèlement à ker(p).

Démonstration :

- Soit : $x \in (\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p))$.
Alors : $\exists\, y \in E$, $y = p(x)$. Mais de plus : $p(x) = 0 = p(p(y)) = p(y) = x$. Donc : $x = 0$.
Image et noyau de p sont en somme directe dans E.
- Soit : $x \in E$. Alors : $p(x) = p(p(x))$, et : $p(x - p(x)) = 0$, d'où : $[x - p(x)] = z \in \ker(p)$.
Autrement dit : $x = p(x) + z$, ce qui fournit une décomposition de x selon $(\mathrm{Im}(p) + \ker(p))$.
Finalement les deux espaces image et noyau de p sont bien supplémentaires dans E.
- Soit enfin : $x \in E$, et sa décomposition en : $x = y + z$, avec : $y \in \mathrm{Im}(p)$, $z \in \ker(p)$.
Alors : $\exists\, x' \in E$, $y = p(x')$, et : $p(x) = p(y) + p(z) = p(p(x')) + 0 = p(x') = y$.
Donc p est bien la projection de E sur Im(p) parallèlement à ker(p).

Définition 10.2 : famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
On note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à la somme $(E_1 \oplus \ldots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus \ldots \oplus E_n)$.
La famille $(p_i)_{1 \le i \le n}$ est dite associée à la décomposition.

Théorème 10.3 : généralisation du théorème 10.1

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et soit $(p_i)_{1 \le i \le n}$ la famille de projecteurs associée à cette décomposition.

Alors on a :

- $\forall\ 1 \le i \le n,\ p_i^2 = p_i$,
- $\forall\ 1 \le i \ne j \le n,\ p_i \circ p_j = 0$,
- $p_1 + \dots + p_n = id_E$.

Démonstration :

Puisque les p_i sont tous des projecteurs de E, on a évidemment : $\forall\ 1 \le i \le n,\ p_i^2 = p_i$.
Soit maintenant x un vecteur quelconque de E, et : $x = x_1 + \dots x_n$, sa décomposition suivant la somme directe.
Alors : $\forall\ 1 \le i \ne j \le n,\ p_j(x) = x_j \in E_j$.
Or : $E_j \cap E_i \subset (E_1 + \dots + E_{i-1} + E_{i+1} + \dots + E_n) \cap E_i = \{0\}$, et donc : $p_i(x_j) = 0$.
Soit bien : $p_i \circ p_j = 0$.
Enfin : $(p_1 + \dots + p_n)(x) = x_1 + \dots + x_n = x$, on a bien également : $p_1 + \dots + p_n = id_E$.

11. Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition 11.1 : polynômes de Lagrange

Soient : $a_0, a_1, \dots, a_n$ des scalaires réels ou complexes distincts deux à deux.
On appelle polynômes de Lagrange associés à la famille $(a_i)_{0\le i\le n}$ les polynômes $(L_i)_{0\le i\le n}$ définis par :

- $\forall\ 0 \le i \le n,\ L_i(a_i) = 1$,
- $\forall\ i \ne j,\ L_i(a_j) = 0$.
- $\forall\ 0 \le i \le n,\ d°(L_i) = n$.

Théorème 11.1 : existence et unicité des bases de Lagrange

Soient : $a_0, a_1, \dots, a_n$ des scalaires réels ou complexes distincts deux à deux.
Il existe une unique famille $(L_i)_{0\le i\le n}$ de polynômes vérifiant les conditions d'interpolation de Lagrange.
Ils forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée base de Lagrange de $\mathbf{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_i)_{0\le i\le n}$.
De plus : $\forall\ 0 \le i \le n,\ L_i = \dfrac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1}).(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1}).(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}$.

Démonstration :

Démontrons que les conditions proposées donnent ces polynômes et qu'ils forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
• Les polynômes doivent être de degré n, et chacun admettre n racines distinctes.
Donc : $\forall\ 0 \le i \le n,\ L_i = \lambda_i.(X - a_0)\dots(X - a_{i-1}).(X - a_{i+1})\dots(X - a_n)$, puisqu'après factorisation, il reste en facteur un polynôme constant.
La valeur que doit prendre le polynôme en a_i donne alors la valeur de la constante, puis la forme finale du polynôme L_i cherché.
• Réciproquement, ces polynômes sont bien tous de degré n, chaque L_i vaut 1 en a_i et admet comme racines toutes les autres valeurs.
• Ils forment bien une base de $\mathbf{K}_n[X]$, puisqu'ils sont d'une part au nombre de (n+1) soit la dimension de $\mathbf{K}_n[X]$, et d'autre part, ils forment une famille libre.
En effet, si : $\lambda_0.L_0 + \dots + \lambda_n.L_n = 0$,
alors en considérant les fonctions polynômes associées évaluées en les différents a_i, on obtient :
$\forall\ 1 \le i \le n,\ \lambda_i.1 = 0$.
Enfin, si on veut les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbf{K}_n[X]$ dans cette base, il suffit d'écrire :
$P = \lambda_0.L_0 + \dots + \lambda_n.L_n$, puis à nouveau d'évaluer cette égalité en les a_i, pour obtenir :
$P = P(a_0).L_0 + \dots + P(a_n).L_n$.

12. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

Définition 12.1 et théorème 12.1 : trace d'une matrice carrée

Soit : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$.
On définit la trace de A comme la somme des éléments diagonaux de A, soit : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Démonstration :

Il est immédiat que tr est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$, puisqu'elle est bien à valeurs dans $\mathbf{K}$, et d'autre part : $\forall$ (A,B) $\in$ $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $\forall$ $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,

$$\mathrm{tr}(\lambda.A + \mu.B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda.a_{i,i} + \mu.b_{i,i}) = \lambda.\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu.\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda.\mathrm{tr}(A) + \mu.\mathrm{tr}(B).$$

Théorème 12.2 : propriétés basiques de la trace des matrices

$\forall$ A $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.

$\forall$ (A,B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, tr(A.B) = tr(B.A).

Plus généralement, la trace d'un produit fini de matrices carrées est inchangée par permutation circulaire des matrices dans le produit.

Démonstration :

Le premier résultat est immédiat, puisque pour une matrice carrée A, les matrices A et ${}^tA$ ont les mêmes éléments diagonaux, donc même trace.

Pour le deuxième point, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Soit : C = A.B.

Alors : $\forall$ $1 \leq i \leq n$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,i}$, et : tr© = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,i} = \sum_{(i,k)\in \mathbb{N}_n^2} a_{i,k}.b_{k,i}$.

Le résultat étant une formule symétrique en A et B, on a bien : tr(A.B) = tr(B.A).

Enfin, dans un produit de p matrices carrées $n\times n$:

$\mathrm{tr}(A_1 \ldots A_p) = \mathrm{tr}(A_1.[A_2 \ldots A_p]) = \mathrm{tr}([A_2 \ldots A_p].A_1) = \mathrm{tr}(A_2 \ldots A_p.A_1)$,

que l'on peut généraliser par récurrence à une permutation circulaire quelconque de ces p matrices.

Théorème 12.3 et définition 12.2 : trace d'un endomorphisme

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie et : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors la trace de la matrice représentative de u dans une base de E est indépendante de cette base.

On note alors tr(u) la valeur commune de toutes ces traces, soit : $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{mat}(u,\mathcal{B}))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et A et A' les matrices représentatives de u dans ces deux bases.

Alors : $A' = P^{-1}.A.P$, et : $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(P^{-1}.A.P) = \mathrm{tr}(A.P.P^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

Théorème 12.4 : trace d'un projecteur

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.

Si p est un projecteur de E alors : rg(p) = tr(p).

Démonstration :

Puisque Im(p) et ker(p) sont supplémentaires dans E, considérons une base $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de Im(p) et une base $(e_{k+1}, \ldots e_n)$ de ker(p).

Alors la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{pmatrix}$, et sa trace vaut : k = dim(Im(p)) = rg(p).

13. Dual d'un espace vectoriel.

Définition 13.1 : dual d'un espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

On appelle dual de E l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbf{K})$, ensemble des formes linéaires sur E et on le note E*.

Théorème 13.1 : dimension du dual

Soit (E,+,.) un K-espace vectoriel de dimension finie n.

Alors : dim(E*) = n = dim(E).

Démonstration :

Puisque : $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbf{K})$, on a : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E,\mathbf{K})) = \dim(E).\dim(\mathbf{K}) = \dim(E).1 = n = \dim(E)$.

Définition 13.2 : hyperplan

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement si H admet un supplémentaire de dimension 1dans E.
Lorsque E est de dimension finie, cela signifie que H est de dimension (dim(E) – 1).

Théorème 13.2 : noyau des formes linéaires non nulles

Soit (E,+,.) un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit : $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, et : $H = \ker(\varphi)$. Alors H est un hyperplan de E.
De plus, si : $\psi \in E^*$, et s'annule sur H, alors : $\exists \lambda \in \mathbf{K}$, $\psi = \lambda.\varphi$.
Si enfin le noyau de ψ est H, alors : $\lambda \neq 0$.

Démonstration :

• Puisque φ est une application linéaire de E dans **K**, on peut lui appliquer le théorème du rang.
Or φ est non nulle, donc : $\exists x \in E$, $\varphi(x) \neq 0$, et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \geq 1$.
Mais de plus : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbf{K}$, et : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq 1$.
Finalement : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$, et : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{K}$,
avec de plus : $\dim(H) = \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - 1$.
• Soit maintenant une autre forme linéaire ψ s'annulant sur H.
Soit x_0 un vecteur n'appartenant pas à H. Alors : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$.
Puis : $\varphi(x_0) \neq 0$, sinon φ serait nulle sur E.
Enfin : $\forall x \in E$, $\exists x_H \in H$, $\exists \alpha \in \mathbf{K}$, $x = x_H + \alpha.x_0$,
et : $\psi(x) = \alpha.\psi(x_0) = \alpha.\dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(x_0) = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(\alpha.x_0 + x_H) = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(x)$.
En posant : $\lambda = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)} \in \mathbf{K}$, on a bien : $\psi = \lambda.\varphi$.
Si enfin, ψ a pour noyau H, alors λ est non nulle, sinon ψ s'annulerait sur E tout entier.

Théorème 13.3 et définition 13.3 : base duale d'une base en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et : $\mathcal{B} = (e_1, \dots ,e_n)$, une base de E.
Alors la famille de formes linéaires : $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots , e_n^*)$, définies par :
$\forall 1 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronnecker, qui vaut 1 si : $i = j$, et 0 si : $i \neq j$,
est une base de E* appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.
On appelle aussi ces formes linéaires les formes coordonnées associées à la base $\mathcal{B}$.
En particulier, si : $x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, alors : $\forall 1 \leq k \leq n$, $e_k^*(x) = x_k$.

Démonstration :

Les formes linéaires ainsi définies sont correctement définies, puisqu'elles le sont par l'image des vecteurs d'une base de E.
Cette famille est libre, car :
$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, tel que : $\lambda_1.e_1^* + \dots \lambda_n.e_n^* = 0$, alors : $\forall 1 \leq k \leq n$, $[\lambda_1.e_1^* + \dots \lambda_n.e_n^*](e_k) = 0 = \lambda_k$.
Donc c'est une famille libre de n éléments de E* qui est de dimension n, et c'est bien une base de E*.

Théorème 13.4 et définition 13.4 : base préduale (ou anté-duale) d'une base de E*

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n et : $\mathcal{R} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, une base de E*.
Il existe une unique base $\mathcal{C}$ de E qui a pour duale la base $\mathcal{C}^*$.
Cette base $\mathcal{C}$ est appelée base préduale de $\mathcal{C}^*$.

Démonstration :

• Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E, et $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ leurs bases duales respectives.
Soit maintenant P la matrice de passage dans E de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$.
Alors : $Q = {}^tP^{-1}$.
En effet, en notant : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, on a :
$\forall 1 \leq i, j \leq n$, $\delta_{i,j} = e'^*_i(e'_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{k,i}.e_k{}^*\left(\sum_{u=1}^{n} p_{u,j}.e_u\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{k,i}.p_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} q'_{i,k}.p_{k,j}$, avec : $q'_{i,k} = q_{k,i}$.
On a donc montré que : ${}^tQ.P = I_n$, soit bien : $Q = {}^tP^{-1}$.
• Soient maintenant que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E aient pour base duale la base $\mathcal{R}$ de E* donnée, et appelons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est ${}^tP^{-1}$, mais puisque : $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'^* = \mathcal{R}$, elle vaut aussi : I_n.

Donc : $P = I_n$, et : $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, autrement dit, si une base répond au problème posé, elle est unique.

• Enfin, soit $\mathcal{B}_0$ une base de E, $\mathcal{B}_0^*$ sa base duale, Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la base de E telle que la matrice ${}^tQ^{-1}$ soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{C}$.
Alors la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{C}^*$ est : $P = Q^{-1}.{}^t({}^tQ^{-1})^{-1} = Q^{-1}.Q = I_n$, et : $\mathcal{C}^* = \mathcal{R}$.

Théorème 13.5 : équations d'un hyperplan

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base : $\mathcal{B} = (e_1, \dots ,e_n)$.
Soit H un hyperplan de E.
Pour un vecteur x de E, on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Alors : $\exists\ (a_1, \dots ,a_n) \in \mathbf{K}^n$, $(a_1, \dots ,a_n) \neq (0, \dots, 0)$, tel que : $(x \in H) \Leftrightarrow (a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0)$.
La dernière égalité est appelée « équation de H dans la base $(e_1, \dots , e_n)$ ».
De plus, si : $b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0$, est une autre équation de H dans la base $\mathcal{B}$, alors :
$\exists\ \lambda \in \mathbf{K}^*$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $b_i = \lambda.a_i$.

Démonstration :

• Puisque H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle dont H est le noyau.
Il suffit pour cela de considérer une base $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ de H, de la compléter avec un vecteur e'_n en une base de E, de considérer la base duale de cette base $(e'_1{}^*, \dots, e'_n{}^*)$ et la forme linéaire $e'_n{}^*$ a bien pour noyau H.

• Soit maintenant la base $\mathcal{B}$ proposée.
Alors $e'_n{}^*$ peut se décomposer suivant la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ en : $e'_n{}^* = a_1.e_1^* + .. + a_n.e_n^*$, où les coefficients $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des scalaires non tous nuls, puisque : $e'_n{}^* \neq 0$.
Et on a : $\forall\ x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $(x \in H) \Leftrightarrow (e'_n{}^*(x) = 0) \Leftrightarrow (a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0)$.

• Soit enfin : $b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0$, une autre équation de H dans la base $\mathcal{B}$.
Cela signifie : $\forall\ x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $(x \in H) \Leftrightarrow (b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0) \Leftrightarrow (\varphi(x) = 0)$,
où φ est la forme linéaire : $\varphi = b_1.e_1^* + \dots + b_n.e_n^*$.
Autrement dit : $H = \ker(\varphi)$.
Mais deux formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles entre elles et :
$\exists\ \lambda \in \mathbf{K}^*$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $b_i = \lambda.a_i$.
Remarque : λ est non nul car λ et e_n^* ont exactement le même noyau H.

14. Structure affine canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Définition 14.1 (hors programme) : espace affine

Etant donné un **K**-espace vectoriel E, on appelle espace affine de direction E un ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une loi de composition externe + ayant les propriétés suivantes :

- $\forall\ A \in \mathcal{A}$, $\forall\ (u,v) \in E^2$, $(A + u) + v = A + (u + v)$,
- $\forall\ A \in \mathcal{A}$, $A + 0 = A$,
- $\forall\ (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $\exists\ u \in E$, $B = A + u$, et le vecteur u est alors noté : $u = \overrightarrow{AB}$,
- $\forall\ u \in E$, $(\forall\ A \in \mathcal{A},\ A + u = A) \Rightarrow (u = 0)$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont alors appelés des points.

Définition 14.2 : structure affine de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On peut munir $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ d'une structure affine, dite structure affine canonique, en utilisant comme direction l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ lui-même, et comme loi externe la loi + dans ces espaces.
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont alors indifféremment des points ou des vecteurs.
En particulier : $\forall\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{AB} = B - A$, où A et B à gauche de l'égalité sont considérés comme des points, et à droite comme des vecteurs (des couples ou des triplets de réels).

Théorème 14.1 : propriétés élémentaires liant des vecteurs dans un espace affine

On a les propriétés suivantes :
$\forall\ (A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ ou $(\mathbb{R}^3)^2$, $B = A + \overrightarrow{AB}$,
$\forall\ (A,B,C) \in (\mathbb{R}^2)^3$ ou $(\mathbb{R}^3)^3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles),
$\forall\ (A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ ou $(\mathbb{R}^3)^2$, $(\overrightarrow{AB} = 0) \Leftrightarrow (A = B)$,
$\forall\ (A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ ou $(\mathbb{R}^3)^2$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Démonstration :

La démonstration est faite dans $\mathbb{R}^2$ mais est identique dans $\mathbb{R}^3$.
Puisqu'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ se définit comme la différence des deux points (couples) de $\mathbb{R}^2$ qui permettent de le construire, les quatre relations proposées sont immédiates.

Définition 14.2 : repère affine ou cartésien

On appelle repère affine de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, la donnée d'un point et d'une base de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
On appelle repère affine canonique de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ le repère défini par 0 et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Définition 14.3 : coordonnées d'un point dans un repère

Soit : $\mathcal{R} = (\Omega,\mathcal{B})$, un repère affine de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.
Pour un point M de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, on appelle coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 14.4 : sous-espace affine

On appelle sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ défini par un point A et un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ de la façon suivante :

$\forall$ M $\in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $(M \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \in F)$.

F est appelé la direction de $\mathcal{F}$ ou espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{F}$.
La dimension d'un sous-espace affine est la dimension de son espace vectoriel directeur.

Théorème 14.2 : sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ est donc un point, une droite ou $\mathbb{R}^2$, et un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ est un point, une droite, un plan ou $\mathbb{R}^3$.

Démonstration :

Puisqu'un sous-espace affine se définit en particulier à l'aide d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sous-jacent, le résultat est immédiat.
En effet, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est {0}, une droite vectorielle ou $\mathbb{R}^2$ tout entier, ce qui donne un singleton (un point), une droite affine, ou $\mathbb{R}^2$ tout entier.
La démarche est identique dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 14.5 : sous-espaces affines parallèles

Soient : $\mathcal{F} = (A,F)$, et : $\mathcal{F}' = (A',F')$, deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
Ces deux sous-espaces sont dits parallèles si et seulement si : $F \subset F'$, ou : $F' \subset F$.

Théorème 14.3 : représentation paramétrique de droites et de plans dans un repère de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{R}$ un repère de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{R} = (\Omega,\mathcal{B})$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ définie par un point A et un vecteur directeur u (ou deux points non confondus), A de coordonnées $(x_A, y_A, (z_A))$ dans $\mathcal{R}$, et u de coordonnées $(\alpha, \beta, (\gamma))$ dans $\mathcal{B}$.

Alors : $\begin{cases} x = x_A + t.\alpha \\ y = y_A + t.\beta \\ (z = z_A + t.\gamma) \end{cases}$, est appelée représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

De même, soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ défini par un point A et une famille de deux vecteurs libres (ou trois points non alignés), A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) dans $\mathcal{R}$, et u, u' de coordonnées (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ dans $\mathcal{B}$.

Alors : $\begin{cases} x = x_A + t.\alpha + t'.\alpha' \\ y = y_A + t.\beta + t'.\beta' \\ z = z_A + t.\gamma + t'.\gamma' \end{cases}$, est appelée représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Démonstration :

Une droite affine se définit avec un sous-espace vectoriel de dimension 1, donc de façon équivalente, avec une base de cette droite vectorielle, donc un vecteur non nul de cette droite, ou encore enfin avec deux points distincts.

Si alors on dispose d'un vecteur u non nul (de coordonnées (α,β,γ) dans $\mathcal{B}$) et d'un point A (de coordonnées (x_A, y_A, z_B) dans $\mathcal{R}$), alors :

$(\forall M \in \mathbb{R}^3$, $(M \in \mathcal{D}(A,u)) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{AM}, u)$ liés$) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t.u)$, la dernière équivalence étant justifiée par le fait que u est non nul.

Si maintenant on traduit cette dernière égalité par des coordonnées dans $\mathcal{R}$, on obtient le système annoncé.

De même, un plan affine se définit avec un sous-espace vectoriel de dimension 2, ou de façon équivalente avec une base de ce plan vectoriel, soit deux vecteurs libres ou trois points non alignés.

On termine en écrivant :

$(\forall M \in \mathbb{R}^3)$, $(M \in \mathcal{P}(A,u,v)) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{AM}, u,u')$ liés$) \Leftrightarrow (\exists (t,t') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t.u + t'.u')$, cette dernière équivalence étant cette fois justifiée par le fait que (u,u') forme une famille libre.

Théorème 14.4 : équation d'une droite dans un repère de $\mathbb{R}^2$ ou d'un plan dans un repère de $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{R}$ un repère de $\mathbb{R}^2$.

Pour un point M de $\mathbb{R}^2$, on note (x,y) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.

Alors : $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, avec : $(a,b) \neq (0,0)$, tel que : $(M \in \mathcal{D}) \Leftrightarrow (a.x + b.y = c)$.

L'expression « $a.x + b.y = c$ » est alors une équation de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

De même, soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{R}$ un repère de $\mathbb{R}^3$.

Pour un point M de $\mathbb{R}^3$, on note (x,y,z) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.

Alors : $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, avec : $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, tel que : $(M \in \mathcal{P}) \Leftrightarrow (a.x + b.y + c.z = d)$.

L'expression « $a.x + b.y + c.z = d$ » est alors une équation du plan $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Démonstration :

On utilise ici une autre façon d'exprimer le fait que deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (ou trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$) sont liés, et plus précisément :

$(\forall M \in \mathbb{R}^2$, $(M \in \mathcal{D}(A,u)) \Leftrightarrow ((\overrightarrow{AM}, u)$ liés$) \Leftrightarrow (\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, u) = 0)$.

Si on note comme précédemment (α,β) les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$, on obtient alors : $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, u) = \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix}$, et :

$(\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, u) = 0) \Leftrightarrow (\beta.x - \alpha.y + (\alpha.y_A - \beta.x_A) = 0)$, ce qui donne bien le résultat annoncé, puisque on remarque de plus que : $(u \neq 0) \Leftrightarrow ((\beta,-\alpha) \neq (0,0))$.

De même, en traduisant par un déterminant 3×3 le fait que trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont liés, on obtient une équation cartésienne d'un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 14.6 : application affine

Une application f entre deux espaces affines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de direction E et E' est dite affine si et seulement si l'application φ définie par : $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, est linéaire de E dans E'.

Théorème 14.5 : expression d'une application affine dans un repère de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

Soit f une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (ou de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même), et soit : $\mathcal{R} = (\Omega,\mathcal{B})$, un repère de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Pour un point M de $\mathbb{R}^2$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, M' son image par f et X' la matrice colonne des coordonnées de M' dans le repère $\mathcal{R}$.

Alors : $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tel que : $X' = X_0 + A.X$.

La matrice X_0 est la matrice des coordonnées de : $\Omega' = f(\Omega)$, dans le repère $\mathcal{R}$, et A est la matrice de l'application linéaire associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration :

La démonstration est faite dans $\mathbb{R}^2$, mais elle est identique dans $\mathbb{R}^3$.

Si on travaille dans le repère $\mathcal{R}$, alors : $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$, où φ correspond à la partie linéaire de l'application affine f, se traduit par : $X' - X_0 = A.(X - 0)$, où X_0 est la matrice des coordonnées de : $\Omega' = f(\Omega)$, dans le repère $\mathcal{R}$, et A la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, 0 étant la matrice des coordonnées de Ω dans $\mathcal{R}$.

Donc on obtient bien la forme annoncée.

Théorème 14.6 : exemples d'applications affines

Soit f une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (ou de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même) de partie linéaire associée φ.
Si : $\varphi = id_E$, f est une translation affine.
Si : $\varphi = k.id_E$, avec : $k \in \mathbb{R}^*$, $k \neq 1$, f est une homothétie affine de rapport k.
Si φ est un projecteur défini à l'aide de la décomposition en somme directe : $E = F \oplus G$, f est un projection affine sur un sous-espace affine de direction F parallèlement à G (ou de direction G).
Si φ est une symétrie définie à l'aide de la décomposition en somme directe : $E = F \oplus G$, f est une symétrie affine par rapport à un sous-espace affine de direction F parallèlement à G (ou de direction G).

Démonstration :

Il n'y a presque aucune démonstration à faire, puisque cet énoncé définit presque ce qu'on entend par « homothétie affine », « projection affine » et « symétrie affine ».

Pour ce qui est du premier point, on constate que si : $\varphi = id_E$, alors : $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a alors :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)} + \overrightarrow{f(B)f(A)} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{Bf(B)} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)} = \overrightarrow{Bf(B)}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est donc constant lorsque M décrit $\mathbb{R}^2$, ce qui justifie le fait que f soit une translation.

Théorème 14.7 et définition 14.7 : barycentre de n points pondérés

Soient n points $(A_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, et n réels $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$, de somme non nulle.
Il existe un unique point G appelé barycentre des n points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, (ou des points $(A_i)_{1\le i\le n}$ affectés des coefficients $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$), tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

En particulier, si G est le barycentre de deux points distincts, G est sur la droite définie par ces deux points, et si c'est le barycentre de trois points non alignés, il se trouve dans le plan défini par ces trois points.

Démonstration :

La démonstration est donnée dans $\mathbb{R}^2$, mais elle est identique dans $\mathbb{R}^3$.
Il suffit d'écrire, en utilisant la relation de Chasles et avec un point Ω de $\mathbb{R}^2$ (par exemple l'origine d'un repère de $\mathbb{R}^2$) :

$$\forall G \in \mathbb{R}^2,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.(\overrightarrow{G\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_i}) = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right).\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i.\overrightarrow{\Omega A_i})\right).$$

Et puisque la somme des coefficients est non nulle, on en déduit bien l'existence d'un unique point G de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation : $\overrightarrow{\Omega G} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i.\overrightarrow{\Omega A_i})$.

Si maintenant, G est le barycentre de deux points distincts A et B, en utilisant à la place du point Ω le point A, G est défini par : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}.\overrightarrow{AB}$, et G est bien sur la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

De même, si G est le barycentre des trois points non alignés A, B, C, et en utilisant à nouveau A à la place de Ω, G est défini par : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{\alpha + \beta + \gamma}.(\beta.\overrightarrow{AB} + \gamma.\overrightarrow{AC})$, et G est bien dans le plan $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Théorème 14.8 : coordonnées du barycentre de n points dans un repère

Soient n points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ avec : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.
Alors dans un repère $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, le barycentre G des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$, a pour coordonnées : $(x,y,(z)) = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)\right)$, où les $(x_i, y_i, (z_i))$ sont les coordonnées des A_i dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration :

Il suffit de traduire la relation obtenue à la fin de la démonstration du théorème précédent et qui définit le point G, pour constater que les coordonnées de G sont bien celles annoncées.

On utilise évidemment le fait que le point Ω est l'origine du repère $\mathscr{R}$.

Théorème 14.9 : associativité du barycentre

Soient n points $(A_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, et n réels $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$, tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0 \text{, et : } \exists\ 1 \le p \le n-1,\ \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0,\ \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i \neq 0.$$

Soit de plus G_1 le barycentre des points $(A_i)_{1\le i\le p}$ affectés des coefficients $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$, et G_2 le barycentre des points $(A_i)_{p+1\le i\le n}$, affectés des coefficients $(\alpha_i)_{p+1\le i\le n}$.

Alors le barycentre des points $(A_i)_{1\le i\le n}$, affectés des coefficients $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ est le même que celui de G_1 et G_2 affectés respectivement des coefficients $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i$ et $\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i$.

Démonstration :

Notons G le barycentre des n points, $\alpha = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i$, $\beta = \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i$.

G est défini par : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Faisons alors intervenir le point G_1 (comme le point Ω dans la démonstration du théorème 14.7) et à l'aide de la relation de Chasles, on obtient : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_i}) = \vec{0}$.

Or : $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i.\overrightarrow{G_1A_i} = \vec{0}$, donc l'égalité précédente devient : $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right).\overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{G_1A_i} = \vec{0}$.

Si maintenant, on introduit le point G_2 dans la deuxième somme, on aboutit à :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right).\overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i.(\overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2A_i}) = \vec{0} = (\alpha+\beta).\overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha+\beta).\overrightarrow{GG_1} + \beta.\overrightarrow{G_1G_2}.$$

Et si enfin on transforme le dernier vecteur en introduisant le point G, on termine avec :

$$\alpha.\overrightarrow{GG_1} + \beta.\overrightarrow{GG_2} = \vec{0},$$

ce qui montre que bien que G est le barycentre de (G_1,α) et de (G_2,β).