Algèbre linéaire (corrigé niveau 3).

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

71. a. Classiquement, ils sont inclus dans E, stables par combinaison linéaire et contiennent tous trois la fonction nulle.

b. Soit f une fonction dans E.

Si f se décompose suivant ces trois espaces en : $f = f^+ + f^- + f_0$, alors :

$\forall x \geq 0$, $f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^+(x) + f_0(x)$,

$\forall x \leq 0$, $f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^-(x) + f_0(x)$,

et en particulier : $f(0) = f_0(0)$, ce qui donne f_0, puis :

$\forall x \geq 0$, $f(x) = f^+(x) + f_0(0)$, d'où : $f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et de même :

$\forall x \leq 0$, $f^-(x) = f(x) - f_0(0)$.

Réciproquement, les trois fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(0) = f(0)$,

$\forall x \geq 0$, $f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall x < 0$, $f^+(x) = 0$,

$\forall x \leq 0$, $f^-(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall x > 0$, $f^-(x) = 0$,

conviennent.

En effet :

- f_0 est évidemment constante,
- f^+ est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ ainsi qu'en 0, car : $f^+(0) = f(0) - f_0(0) = 0)$,

  Elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, et en 0, puisque :

  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 0 = 0 = f^+(0)$, et : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 0 = f(0) - f_0(0) = 0$, car f est continue.

  Donc f^+ est bien dans E^+.
- De même, f^- est bien dans E^-.
- Enfin on a évidemment : $f = f^+ + f^- + f_0$, en le vérifiant immédiatement pour tout réel x.

Finalement, on a bien : $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

72. Il est immédiat que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $C^0([-1,1],\mathbb{C})$.

Si maintenant h est un élément de $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$, s'écrivant : $h = f + g$, avec : $f \in F$, $g \in G$, alors :

$\int_{-1}^{+1} h(t).dt = \int_{-1}^{+1} f(t).dt + \int_{-1}^{+1} g(t).dt = 0 + 2.C$, où C est la valeur constante de g sur [-1,+1].

Donc : $C = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$, puis : $\forall x \in [-1,+1]$, $f(x) = h(x) - C$.

Réciproquement, si on pose : $\forall x \in [-1,+1]$, $g(x) = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$, puis : $f(x) = h(x) - \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$,

alors on a : $h = f + g$, g est constante sur [-1,+1], et : $\int_{-1}^{+1} f(t).dt = \int_{-1}^{+1} h(t).dt - 2.\frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt = 0$, d'où : $f \in F$.

Finalement, F et G sont bien supplémentaires dans $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$.

73. F et G sont évidemment des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Puis si (u_n) est un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, s'écrivant : $(u_n) = (f_n) + (g_n)$, avec : $(f_n) \in F$, $(g_n) \in G$, alors :

- $u_0 = g_0$, $u_1 = g_1$, et (g_n) est ainsi entièrement déterminée.

Pour mémoire mais ça n'est pas nécessaire ici, les éléments de G s'écrivent :

$\forall (a_n) \in G$, $(a_n) = \alpha.(4^n) + \beta.(1)$, puisque 4 et 1 sont les racines de l'équation caractéristique associée.

D'où les constantes pour la suite (g_n) précédente qui valent : $\alpha = \frac{u_1 - u_0}{3}$, $\beta = \frac{4.u_0 - u_1}{3}$.

- Puis : $(f_n) = (u_n) - (g_n)$.

Réciproquement, la suite (g_n) ainsi trouvée est dans G, on a bien : $(u_n) = (f_n) + (g_n)$, et :

$f_0 = u_0 - g_0 = 0$, $f_1 = u_1 - g_1 = 0$, et : $(f_n) \in F$.

Finalement, F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Applications linéaires, projecteurs.

74. a. Puisque f^{p-1} est non nul, il existe x dans E tel que : $f^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrons alors que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre et pour cela, soit : $a_0.x + \ldots + a_{p-1}.f^{p-1}(x) = 0$.
En prenant l'image de cette combinaison linéaire par f^{p-1}, on obtient : $a_0.f^{p-1}(x) + 0 = 0$, et donc : $a_0 = 0$.
Puis par récurrence, on montre que : $\forall\ 0 \leq k \leq p-1$, $a_k = 0$, en composant par f^{p-1-k}, les combinaisons linéaires obtenues de proche en proche.
Donc la famille proposée est bien libre.
b. Il est clair alors que le nombre de vecteurs de cette famille, c'est-à-dire p est plus petit que n, soit : $p \leq n$.
Puis : $f^n = f^p o f^{n-p} = 0 o f^{n-p} = 0$.

75. a. Immédiatement : $\varphi = D^2 - 3.D + 2.id_E = (D - id_E)o(D - 2.id_E)$.
b. • Soit : $f \in \ker(D - id_E) \cap \ker(D - 2.id_E)$.
Alors : $D(f) = f$, et : $D(f) = 2.f$, soit : $f = 2.f$, et donc : $f = 0$.
La somme des deux noyaux est donc directe.
• Soit : $f \in \ker(D - id_E)$.
Alors : $\varphi(f) = (D - 2.id_E)((D - id_E)(f)) = (D - 2.id_E)(D(f) - f)\ )\ (D - 2.id_E)(0) = 0$,
de même : $\forall\ f \in \ker(D - 2.id_E)$, $\varphi(f) = 0$,
d'où : $\ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E) \subset \ker(\varphi)$.
• Soit enfin : $f \in \ker(\varphi)$.
Si on peut trouver $(f_1, f_2) \in \ker(D - id_E) \times \ker(D - 2.id_E)$, $f = f_1 + f_2$, alors : $D(f) = D(f_1) + D(f_2) = f_1 + 2.f_2$.
D'où : $f_2 = D(f) - f$, et : $f_1 = 2.f - D(f)$.
On vérifie alors que : $f_1 + f_2 = f$, $(D - 2.id_E)(f_2) = (D - 2.id_E)o(D - id_E)(f) = \varphi(f) = 0$, et : $(D - id_E)(f_1) = 0$.
Donc on vient de montrer que : $\ker(\varphi) \subset \ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E)$, et finalement l'égalité.
c. Puisque : $\ker(D - id_E) = \{x \mapsto \alpha.e^x, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\ker(D - 2.id_E) = \{x \mapsto \beta.e^{2.x}, \beta \in \mathbb{R}\}$, on en déduit que $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions s'écrivant : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \alpha.e^x + \beta.e^{2.x}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

76. Notons (i) et (ii) les deux propositions (dans cet ordre).
Il est immédiat avec le théorème du rang que : (i) $\Rightarrow$ (ii).
Supposons maintenant que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F) + \dim(G) = n$.
Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$, $(e_{p+1}, \ldots, e_r)$ une famille de vecteurs de E telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de G (autrement dit une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans G) et $(a_{p+1}, \ldots, a_k)$ complétant $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base de F.
Soit enfin $(e'_{k+1}, \ldots, e'_n)$ une base complétant celle de F en une base de E.
On sait que : $n - k = r$.
On définit alors l'endomorphisme u de E par :
- $\forall\ 1 \leq i \leq p$, $u(e_i) = 0$, et : $\forall\ p+1 \leq i \leq k$, $u(a_i) = 0$,
- $\forall\ k+1 \leq i \leq n$, $u(e'_i) = e_{i-k}$.

Puisqu'on donne l'image de tous les vecteurs d'une base de E, u est bien défini.
Calculons alors ker(u) et Im(u).
Puisque $e'_{k+1}, \ldots, e'_n$ ont pour image une famille libre de E, on a : $rg(u) \geq n - k = r$.
De plus $e_1, \ldots, e_p, a_{p+1}, \ldots, a_k$ sont dans ker(u), donc : $rg(u) \leq n - k$.
Finalement : $rg(u) = r = n - k$.
Puis Im(u) contient $u(e'_{k+1}), \ldots, u(e'_n)$ donc $e_1, \ldots, e_r$, c'est-à-dire G qui est de dimension r, soit : Im(u) = G.
Enfin ker(u) est de dimension k et contient F, donc : ker(u) = F.
Autrement dit, on a démontré l'implication réciproque.

77. La bonne formulation de la question serait plutôt : « montrer que l'application de F_2 dans F_1 définie par p est un isomorphisme d'espaces vectoriels ».
Pour démontrer cela, montrons que cette application que l'on va noter p' est injective et surjective.
• Soit : $x \in F_2$, tel que : $p'(x) = 0$.
Alors : $x \in F_2$, et comme $p'(x) = p(x) = 0$, on a aussi : $x \in \ker(p) = E'$, donc : $x \in E' \cap F_2$, et : $x = 0$.
Donc p' est injective.
• Soit : $y \in F_1$.
Alors on peut écrire : $y = p(y)$, d'une part, et : $y = x_2 + x'$, avec : $x' \in E'$, et : $x_2 \in F_2$.
On constate alors que : $y = p(y) = p(x') + p(x_2) = p(x_2) = p'(x_2)$, puisque : $x' \in E'$, donc : $p(x') = 0$.

Autrement dit : $p'(x_2) = y$, et p' est bien surjective.
Finalement, p' est bien un isomorphisme de F_2 sur F_1.
Remarque : ce résultat généralise le fait que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel ont même dimension dans un espace de dimension finie.

78. a. On a donc : $\mathrm{Im}(f_0) = \ker(f_1) = \{0\}$, donc f_1 est injective.
De même : $\mathrm{Im}(f_n) = \ker(f_{n+1}) = E_n$, donc f_n est surjective.
b. Soit k un entier donné entre 1 et n.
Alors : $\dim(\ker(f_k)) + \dim(\mathrm{Im}(f_k)) = \dim(E_{k-1})$, ou encore : $\dim(\ker(f_k)) + \dim(\ker(f_{k+1})) = \dim(E_{k-1})$.
On en déduit que : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k) = (-1)^n.\dim(E_n) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.[\dim(\ker(f_{k+1})) + \dim(\ker(f_{k+2}))]$.
D'où : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\dim(\ker(f_{k+1})) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\dim(\ker(f_{k+1})) + (-1)^n.\dim(E_n)$,
soit finalement : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k) = \dim(\ker(f_1)) - (-1)^n.\dim(\ker(f_{n+1})) + (-1)^n.\dim(E_n) = 0$.
c. Considérons les 4 applications linéaires :
f_0 de $\{0\}$ dans $F\cap G$, définie par : $f_0 = 0$,
f_1 de $F\cap G$ dans $F\times G$, définie par : $\forall x \in F\cap G$, $f_1(x) = (x,-x)$,
f_2 de $F\times G$ dans $F+G$, définie par : $\forall (x,y) \in F\times G$, $f_2((x,y)) = x + y$,
f_3 de $F+G$ dans $\{0\}$, définie par : $f_3 = 0$.
Alors la suite ainsi construite est exacte puisque :
- f_1 est injective de façon immédiate, et donc : $\ker(f_1) = \mathrm{Im}(f_0)$,
- $\ker(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$, car :
$\forall (x,y) \in F\times G$, $(f_2((x,y)) = 0) \Leftrightarrow (x+y = 0) \Leftrightarrow (y = -x$, avec : $x \in F\cap G) \Leftrightarrow ((x,y) = (x,-x), x \in F\cap G)$,
et finalement : $\Leftrightarrow ((x,y) \in \mathrm{Im}(f_1))$.
- $\ker(f_3) = F+G = \mathrm{Im}(f_2)$, de façon immédiate.

On en déduit que : $(-1)^0.\dim(F\cap G) + (-1)^1.\dim(F\times G) + (-1)^2.\dim(F+G) = 0$, ce qui donne :
$\dim(F\cap G) + \dim(F+G) = \dim(F\times G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Matrices.

79. Commençons par rappeler les matrices de la base canonique :
ces matrices sont notées $E_{p,q}$, et leur coefficient générique vaut : $\forall\ 1 \le i,j \le n$, $E_{i,j}^{p,q} = \delta_{i,p}.\delta_{j,q}$.
Soit C maintenant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et soit : $1 \le p,q \le n$.
Si on note : $C' = E_{p,q}.C$, et : $C'' = C.E_{p,q}$, alors :
$\forall\ 1 \le i,j \le n$, $c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.E_{k,j}^{p,q} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.\delta_{k,p}.\delta_{j,q} = c_{i,p}.\delta_{j,q}$,
autrement dit toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne q dont les coefficients valent : $c'_{i,q} = c_{i,p}$.
De même : $\forall\ 1 \le i,j \le n$, $c''_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}^{p,q}.c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,p}.\delta_{k,q}.c_{k,j}. = \delta_{i,p}.c_{q,j}$,
autrement dit toutes les lignes sont nulles sauf la ligne p qui vaut : $c''_{p,j} = c_{q,j}$.
Si maintenant on suppose que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $X.C = C.X$, alors : $\forall\ 1 \le p,q \le n$, $E_{p,q}.C = C.E_{p,q}$.
Les matrices précédentes sont donc égales et leurs éléments sont tous nuls sauf celui se trouvant à l'intersection de la $p^{\text{ème}}$ ligne et de la $q^{\text{ème}}$ colonne, soit :
- $c_{p,p} = c'_{p,q} = c''_{p,q} = c_{q,q}$,
- $\forall\ 1 \le i \ne p \le n$, $c_{i,p} = 0$,
- $\forall\ 1 \le j \ne q \le n$, $c_{q,j} = 0$.

Finalement, tous les coefficients de la matrice C en dehors de la diagonale sont nuls et ceux de la diagonale sont égaux entre eux, ce qui se résume en : $\exists \lambda \in \mathbf{K}$, $C = \lambda.I_n$.
Réciproquement, la matrice $\lambda.I_n$ commute avec toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, pour toute valeur λ.
Conclusion : le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble $\{\lambda.I_n, \lambda \in \mathbf{K}\}$.

80. Puisque A est une matrice de rang r, on sait qu'il existe deux matrices inversibles de tailles respectives p×p et q×q, notées P et Q telles que : $A = P.\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.Q = P.\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}.Q$.

Si maintenant on note : $B = P.\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$, et : $C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}.Q$, alors : B ∈ $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et : C ∈ $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$.

Evidemment, on a aussi : A = B.C.

81. On peut calculer les liens entre A^{n+1} et A^n, pour tout entier n, avec : $A^{n+1} = A.A^n$.
Un calcul direct donne : ∀ n ≥ 1, $a_{n+1} = a.a_n + b.c_n$, $b_{n+1} = a.b_n + b.d_n$, $c_{n+1} = c.a_n + d.c_n$, $d_{n+1} = c.b_n + d.d_n$.
Donc : $a_{n+1} + d_{n+1} - b_{n+1} - c_{n+1} = (a - c).(a_n - b_n) + (b - d).(c_n - d_n)$.
On sait que (a – c) et (b – d) sont positifs, donc il suffit que les deux autres facteurs soient positifs pour obtenir le résultat voulu.
Or : ∀ n ≥ 1, $(a_{n+1} - b_{n+1}) = a.(a_n - b_n) + b.(c_n - d_n)$, et : $(c_{n+1} - d_{n+1}) = c.(a_n - b_n) + d.(c_n - d_n)$.
Il est alors immédiat que pour tout entier : n ≥ 1, $(a_n - b_n)$ et $(c_n - d_n)$ sont positifs par récurrence.
Conclusion : ∀ n ≥ 2, on a : $b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Trace.

82. a. Puisque : rg(H) ≤ 1, les colonnes de H sont toutes dans un espace de dimension 1, et en les notant H_j, on peut donc écrire : ∃ U ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, ∀ 1 ≤ j ≤ n, ∃ v_j ∈ **K**, $H_j = v_j.U$.

Si on note alors V la matrice colonne : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors : $H = U.{}^tV$.

Puis les éléments diagonaux de H valent : ∀ 1 ≤ i ≤ n, $h_{i,i} = u_i.v_i$, et : $\mathrm{tr}(H) = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i = {}^tU.V$.

Remarque : en fait ${}^tU.V$ est une matrice 1×1 que l'on confond avec l'élément qu'elle contient.

b. On calcule ensuite : $H^2 = U.{}^tV.U.{}^tV = U.(\mathrm{tr}(H)).{}^tV = \mathrm{tr}(H).H$.

c. On procède par double implication.
[⇐] c'est immédiat avec ce que l'on a montré aux points a et b : $A^2 = \mathrm{tr}(A).A = 0$.
[⇒] si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors : $u^2 = 0$, et : Im(u) ⊂ ker(u).
Dans ce cas : rg(u) ≤ dim(ker(u)) = 3 – rg(u), d'où : 2.rg(u) ≤ 3, et rg(u) vaut 0 ou 1.
Si rg(u) vaut 0, alors u (et A) sont nuls, et tr(A) est également nulle.
Si rg(u) vaut 1, celui de A aussi, et A est non nulle.
De plus dans ce cas, on a : $A^2 = 0 = \mathrm{tr}(A).A$, et A étant non nulle, tr(A) vaut 0.

83. Supposons que X et Y sont solutions du problème.
Alors en calculant la trace dans la première égalité, alors : 2.tr(X).tr(Y) = 0.
Comme ces deux traces ne peuvent être nulles simultanément (toujours d'après la première égalité), et que les deux matrices X et Y sont non nulles (d'après la deuxième égalité), distinguons deux cas :

- tr(X) = 0, et donc : tr(Y) ≠ 0, d'où : X = $\frac{1}{tr(Y)}.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, et : ∃ λ ∈ ℝ*, X = $\lambda.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Puis la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ étant inversible, on en déduit que :

$$Y = \frac{1}{\lambda}.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12.\lambda}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12.\lambda}.\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4.\lambda}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, le couple trouvé convient car :

$$\mathrm{tr}(X).Y + \mathrm{tr}(Y).X = 0.Y + \frac{1}{\lambda}.\lambda.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \text{ et : } X.Y = \frac{\lambda}{4.\lambda}.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- tr(Y) = 0, et donc : tr(A) ≠ 0, d'où : ∃ μ ∈ ℝ*, Y = $\mu.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, et : X = $\frac{1}{12.\mu}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, on constate de même que le couple trouvé convient.

Conclusion : les solutions au problème posé sont les deux couples précédents.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

84. a. Notons : $n = \dim(E)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Considérons alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de la base précédente.
Alors : $\forall x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $(x \in F) \Leftrightarrow (x_{p+1} = \dots = x_n = 0) \Leftrightarrow (e_{p+1}^*(x) = \dots = e_n^*(x) = 0)$.
Autrement dit, F est l'intersection des $(n - p)$ hyperplans $\ker(e_i^*)$, avec : $p+1 \leq i \leq n$.
b. On va en fait montrer que : $\forall 1 \leq k \leq n - 1$, si $H_1, \dots, H_k$ sont des hyperplans de E, alors l'intersection de ces hyperplans est de dimension au moins $(n - k)$ et pour cela on procède par récurrence sur k.
• Si : $k = 1$, le résultat est immédiat.
• S'il est vrai pour : $1 \leq k \leq n - 2$, soit $(k+1)$ hyperplans de E.
La formule de Grassmann donne :
$\dim(H_1\cap\dots\cap H_{k+1}) = \dim(H_1\cap\dots\cap H_k) + \dim(H_{k+1}) - \dim(H_1\cap\dots\cap H_{k+1} + H_{k+1})$.
Or la somme $(H_1\cap\dots\cap H_{k+1} + H_{k+1})$ est de dimension au plus n, donc :
$\dim(H_1\cap\dots\cap H_{k+1}) \geq (n - k) + (n - 1) - n = n - (k + 1)$,
ce qui termine la récurrence.
Si maintenant on veut que m hyperplans de E aient une intersection égale à F, alors on doit avoir :
$\dim(F) \geq n - m$, c'est-à-dire : $m \geq n - \dim(F)$, soit le minorant annoncé.
Comme enfin, on a trouvé effectivement $[\dim(E) - \dim(F)]$ hyperplans dont l'intersection donne F, le nombre minimum effectif cherché est bien $[\dim(E) - \dim(F)]$.

85. a. Si A et B vérifient l'hypothèse, alors : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}((A - B).X) = 0$.
Notons alors : $C = A - B$.
Deux méthodes pour montrer que C est nulle :
• on examine ce que cela donne en prenant pour X les matrices $E_{p,q}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,
• on essaie la matrice ${}^tC$.
En notant : $C' = C.E_{p,q}$, alors : $\forall 1 \leq i,j \leq n$, $c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}^{p,q}.c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,p}.\delta_{k,q}.c_{k,j}. = \delta_{i,p}.c_{q,j}$,
autrement dit toutes les lignes sont nulles sauf la ligne p qui vaut : $\forall 1 \leq j \leq n$, $c'_{p,j} = c_{q,j}$.
Donc : $\mathrm{tr}(C.E_{p,q}) = \mathrm{tr}(C') = c'_{p,p} = c_{q,p} = 0$, et ceci étant vrai : $\forall 1 \leq p,q \leq n$, $C = 0$, soit : $A = B$.
Si on utilise ${}^tC$, alors : $C.{}^tC = D$, avec : $\forall 1 \leq i,j \leq n$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.c_{j,k}$,
d'où : $\mathrm{tr}(C.{}^tC) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^2 = 0$, et donc : $C = 0$, soit encore : $A = B$.
b. Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ qui à une matrice F fait correspondre $\varphi_F : X \mapsto \mathrm{tr}(X.F)$.
L'application ainsi définie φ_F de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (c'est immédiat).
Montrons que ϕ est linéaire et bijective.
Pour cela : $\forall (F,G) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi_{\lambda.F+\mu.G}(X) = \mathrm{tr}(X.(\lambda.F+\mu.G)) = \lambda.\mathrm{tr}(X.F) + \mu.\mathrm{tr}(X.G) = (\lambda.\varphi_F + \mu.\varphi_G)(X)$,
autrement dit : $\varphi_{\lambda.F+\mu.G} = \lambda.\varphi_F + \mu.\varphi_G$, ou encore : $\varphi(\lambda.F + \mu.G) = \lambda.\phi(F) + \mu.\phi(G)$, et ϕ est linéaire.
Puis, soit : $F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\phi(F) = 0$.
Alors : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}(X.F) = \mathrm{tr}(F.X) = 0$, et : $F = 0$, d'après la question a.
Donc ϕ est injective et puisque : $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*) = n^2$, ϕ est bijective.
Par conséquent : $\forall f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, $\exists !\ F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f = \phi(F)$, soit telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) = \mathrm{tr}(A.F)$.
c. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, vérifiant l'hypothèse.
Notons F une matrice telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(X) = \mathrm{tr}(X.F)$.
Alors : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $f(A.B) = f(B.A)$, soit : $\mathrm{tr}(A.B.F) = \mathrm{tr}(B.A.F) = \mathrm{tr}(B.F.A)$.
Donc : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}(B.[A.F - F.A]) = 0$, et : $A.F = F.A$.
Or cette dernière égalité étant vraie pour tout : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on en déduit que : $\exists \lambda \in \mathbf{K}$, $F = \lambda.I_n$ (voir exercice 60 sur le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
On en déduit donc que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(X) = \mathrm{tr}(X.\lambda.I_n) = \lambda.\mathrm{tr}(X)$, soit : $f = \lambda.\mathrm{tr}$.

86. a. La famille proposée est la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, \ldots, a_n)$.
Pour mémoire, elle comporte (n+1) vecteurs et est libre car si : $\lambda_0.P_0 + \ldots + \lambda_n.P_n = 0$, en évaluant cette combinaison linéaire en a_k, on obtient : $\lambda_k.1 = 0$.
Puis, pour : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si on note : $P = \lambda_0.P_0 + \ldots + \lambda_n P_n$, si on évalue cette égalité en a_k, on obtient : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\lambda_k = P(a_k)$.
On vient de déterminer les formes linéaires coordonnées associées à cette base.
Ces formes linéaires forment une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ appelée base duale de la base de Lagrange.
b. Si un tel polynôme existe, il ne peut valoir que :
$Q = b_0.P_0 + \ldots + b_n.P_n$, d'après la question précédente, et ce polynôme convient par évidence.
c. Puisque $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$, est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, elle peut s'écrire en fonction de la base duale trouvée à la question a, soit : $\exists\ (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi = c_0.P_0^* + \ldots + c_n.P_n^*$,
ce qui s'écrit encore : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P(a_k)$.
d. Il suffit de choisir pour P les polynômes de la base de Lagrange, à savoir :
$\forall\ 0 \leq i \leq n$, $\int_0^1 P_i(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P_i(a_k) = c_i$.

87. a. Soit une combinaison linéaire nulle de ces trois formes : $a_1.y_1^* + a_2.y_2^* + a_3.y_3^* = 0$.
Alors : $\forall\ P \in \mathbb{R}_2[X]$, $a_1.P(a) + a_2.P'(a) + a_3.P''(a) = 0$.
Si on choisit : $P = (X - a)^2$, alors : $2.a_3 = 0$, soit : $a_3 = 0$.
Puis on utilise le polynôme : $P = (X - a)$, et : $a_2 = 0$, et enfin le polynôme : $P = 1$, conduit à : $a_1 = 0$.
La famille proposée est donc bien libre.
b. Le même raisonnement permet de montrer que la famille $(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ est libre, à l'aide des polynômes (utilisés dans cet ordre) $(X - a)^n, \ldots, (X - a), 1$.
c. Puisque la famille précédente comporte (n+1) formes linéaires, c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
Pour déterminer sa base antéduale, on peut s'inspirer de ce qu'on a fait au-dessus, et proposer :
$\forall\ 0 \leq k \leq n$, $P_k = \dfrac{(X-a)^k}{k!}$.
On constate bien que : $\forall\ 0 \leq j,k \leq n$, $y_j^*(P_k) = \delta_{j,k}$.
En effet :
- si : $j < k$, a reste une racine de $P_k^{(j)}$, et $P_k^{(j)}(a) = 0$,
- si : $j = k$, $P_k^{(k)} = 1$, et : $P_k^{(k)}(a) = 1$,
- si : $j > k$, l'ordre de dérivation est supérieur au degré du polynôme, d'où : $P_k^{(j)} = 0$, et : $P_k^{(j)}(a) = 0$.

88. La famille proposée peut être libre puisqu'elle comporte 4 formes linéaires dans E* qui est de dimension 4.
Considérons les polynômes $(X - a).(X - b)$, $(X - a).(X - c)$ et $(X - b).(X - c)$, d'une part et le polynôme $(X - a).(X - b).(X - c)$ d'autre part.
Les trois premiers forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (à des facteurs multiplicatifs près, c'est une base de Lagrange) et le dernier n'étant pas dans $\mathbb{R}_2[X]$, il engendre une droite supplémentaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Donc ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Considérons maintenant : $\lambda_1.y_1^* + \lambda_2.y_2^* + \lambda_3.y_3^* + \lambda_4.y_4^* = 0$.
Evaluée sur le premier polynôme, on obtient : $\lambda_3.(c-a).(c-b) + \lambda_4.\int_a^b (t-a).(t-b).dt = 0$, soit :
$\lambda_3 = -\lambda_4.\dfrac{1}{(c-a).(c-b)}.\int_a^b (t-a).(t-b).dt$.
De même avec les deux suivants, on obtient :
$\lambda_2 = -\lambda_4.\dfrac{1}{(b-a).(b-c)}.\int_a^b (t-a).(t-c).dt$, et : $\lambda_1 = -\lambda_4.\dfrac{1}{(a-b).(a-c)}.\int_a^b (t-b).(t-c).dt$.
Enfin, évaluée sur le dernier polynôme, on a : $\lambda_4.\int_a^b (t-a).(t-b).(t-c).dt = 0$.
Cette dernière intégrale vaut : $\int_a^b (t-a).(t-b).(t-c).dt = \dfrac{1}{6}.(a-b)^2.(c - \dfrac{a+b}{2})$.
Distinguons alors deux cas :

• si : $c \neq \frac{a+b}{2}$, alors λ_4 est nul, ainsi que les trois autres scalaires et la famille est libre.

• si : $c = \frac{a+b}{2}$, on peut poser :

$$\lambda_4 = 1,\ \lambda_3 = \frac{-\int_a^b (t-a).(t-b).dt}{(c-a).(c-b)},\ \lambda_2 = \frac{-\int_a^b (t-a).(t-c).dt}{(b-a).(b-c)},\ \lambda_1 = \frac{-\int_a^b (t-b).(t-c).dt}{(a-b).(a-c)},$$

La combinaison linéaire obtenue avec ces scalaires est la forme linéaire nulle puisqu'elle s'annule sur les 4 polynômes de la base précédente, et un des coefficients au moins (par exemple λ_4) est non nul.
On conclut que dans ce cas, la famille est liée.

89. On sait que ker(y*) et ker(z*) sont des hyperplans H_y et H_z de E.
Deux possibilités ensuite :
• soit : $H_y = H_z$, et il existe x dans E hors de cet hyperplan, et donc tel que : $y^*(x) \neq 0$, $z^*(x) \neq 0$, et donc le produit $y^*(x).z^*(x)$ est non nul.
• soit : $H_y \neq H_z$, et : $\exists\ x_y \in H_y$, $x_y \notin H_Z$ et : $\exists\ x_z \in H_z$, $x_z \notin H_y$.
Dans ce cas le vecteur : $X = x_y + x_z$, n'est ni dans H_y ni dans H_z.
En effet, si on avait : $X \in H_y$, alors par différence, on aurait : $x_z \in H_y$, ce qui est impossible.
Il est aussi impossible d'avoir : $X \in H_z$.
Donc : $y^*(X) \neq 0$, et : $z^*(X) \neq 0$, donc le produit est encore non nul.

Formes multilinéaires.

91. Puisque u est linéaire et que $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, il est clair que f est n-linéaire.
De plus, pour : $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, si par exemple : $x_1 = x_2$, alors :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\ldots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\ldots,x_n) = \det_B(x,u(x),x_3,\ldots,x_n) + \det_B(u(x),x,x_3,\ldots,x_n),$$

puisque tous les autres déterminants comportent deux vecteurs identiques.
Et comme la forme $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée, ces deux derniers déterminants sont opposés (on y inverse les deux premiers vecteurs).
f est donc bien n-linéaire alternée sur E.
Donc : $\exists\ \alpha \in \mathbf{K}$, $f = \alpha.\det_{\mathscr{B}}$.

Pour terminer, si : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$, alors :

$$f(e_1, \ldots, e_n) = \alpha.\det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \alpha = \sum_{i=1}^{n} \det_B(e_1,\ldots,e_{i-1},u(e_i),e_{i+1},\ldots,e_n).$$

Or : $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_{i-1}, u(e_i), e_{i+1}, \ldots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & & a_{1,i} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,i} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & a_{n,i} & & 1 \end{vmatrix} = a_{i,i}$, d'où : $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = tr(u)$.

92. a. On va utiliser la n-linéarité du déterminant et développer complètement pour obtenir en tout 2^n termes.
Chaque terme est un déterminant du type $\det_{\mathscr{B}}(y_1, \ldots, y_n)$, où y_i vaut soit x_i, soit a.
Trois possibilités se présentent alors pour chaque nouveau déterminant :
• il ne comporte pas de a, et donc il vaut : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ (un seul terme),
• il comporte un a, et donc il vaut : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ (n termes),
• il comporte plus de deux fois le vecteur a, et donc il est nul.

Finalement : $\det_B(a+x_1, a+x_2, \ldots, a+x_n) = \det_B(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\ldots,x_{i-1},a,x_{i+1},\ldots,x_n)$.

b. On applique le résultat précédent avec : $a = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, et : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, où tous les coefficients sont nuls sauf le i$^{\text{ème}}$.

On en déduit que : $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j . \prod_{i \neq j} a_i \right) = \prod_{i=1}^{n} a_i . \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j} \right)$,

la dernière égalité étant valable lorsque tous les a_j sont non nuls.

Calculs de déterminants.

93. Notons : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $P_i = (X + j - 1)^2$.

Ces polynômes étant de degré 2 (donc dans $\mathbb{R}_2[X]$), la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est liée si : n ≥ 4.

• Plaçons dans le cas : où : n ≥ 4.

Alors : $\exists$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, non tous nuls, tel que : $\alpha_1.P_1 + \ldots + \alpha_n.P_n = 0$.

Alors : $\forall$ 1 ≤ j ≤ n, $\alpha_1.P_1(j) + \ldots \alpha_n.P_n(j) = 0$, et la même relation lie les colonnes de la matrice A.

Dans ce cas, on a donc : det(A) = 0.

• On complète alors avec :

n = 1, et : det(A) = 1,

n = 2, et : det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1$,

n = 3, et : det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = -8$.

94. La matrice A vaut : A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & \frac{n.(n+1)}{2} \end{pmatrix}$.

Pour calculer det(A), on enlève par exemple à chaque colonne la précédente en commençant par la dernière et on obtient : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & \frac{n.(n+1)}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$.

95. a. Les colonnes de D_n sont : $\forall$ 1 ≤ j ≤ n, $C_j = a.C + x_j.E_j$.

b. Si on développe D_n par n-linéarité, on obtient 2^n termes répartis en trois type :

• le déterminant où n'apparaît jamais C qui vaut : $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix} = x_1 \ldots x_n$,

• ceux (il y en a n) avec une fois la colonne C qui valent : $\begin{vmatrix} x_1 & & a & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a & & x_n \end{vmatrix} = x_1 \ldots x_{j-1}.a.x_{j+1} \ldots x_n$,

• ceux qui comporte deux fois la colonne C et qui ainsi sont nuls.

Donc : $D_n = x_1 \ldots x_n + \sum_{j=1}^{n} x_1 \ldots x_{j-1}.a.x_{j+1} \ldots x_n$.

96. a. On commence donc par remplacer chaque colonne C_k par $C_k - C_n$, pour : $1 \leq k \leq n-1$, et :

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1+b_1).(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1}).(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_n+b_1).(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_n+b_{n-1}).(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{(b_n - b_1)\ldots(b_n - b_{n-1})}{(a_1+b_n)\ldots(a_n+b_n)}.D'_n.$$

Dans ce nouveau déterminant, on utilise cette fois la dernière ligne comme pivot, et :

$$D'_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_1+b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_1+b_{n-1})} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_n+b_{n-1})} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_1).(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_{n-1}).(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1).(a_n+b_1)} & & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1}).(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_n+b_{n-1})} & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut alors développer suivant la dernière colonne et factoriser dans chaque ligne.
On peut également changer les signes des termes du numérateur, et on aboutit à la formule proposée :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n)\ldots(b_{n-1} - b_n).(a_1 - a_n)\ldots(a_{n-1} - a_n)}{(a_1+b_n)\ldots(a_{n-1}+b_n).(a_n+b_n).(a_n+b_{n-1})\ldots(a_n+b_1)}.D_{n-1}.$$

b. On remarque que : $D_1 = \frac{1}{a_1+b_1}$, et par récurrence : $\forall$ n ≥ 2, $D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_i - a_j).(b_i - b_j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n}(a_i + b_j)}$.

c. Dans le cas particulier proposé, le numérateur vaut : $(1!.2!\ldots(n-1)!)^2$, et le dénominateur quant à lui vaut : $(1+1).(2+1)\ldots(n+1)\ldots(1+n).(2+n)\ldots(n+n) = \frac{(n+1)!}{1!}\ldots\frac{(2.n)!}{n!}$,

et le déterminant cherché vaut donc : $\Delta_n = \frac{(1!.2!\ldots(n-1)!)^3.n!}{(n+1)!\ldots(2.n)!}$.

97. a. On utilise la multilinéarité du déterminant, en particulier ici par rapport à la dernière colonne, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \varphi_p(x+1) - \varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & 2.x+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}.x^k \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}.x^k \end{vmatrix}.$$

On remplace alors la dernière colonne par $C_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} x^{k-1}.C_k$, et la valeur calculée devient :

$$\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & 0 \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & \binom{p+1}{p}.x^p \end{vmatrix} = x^p.(p+1)!\text{, puisque triangulaire.}$$

b. Si on écrit maintenant les égalités précédentes pour x prenant les valeurs 0, 1, …, n et en ajoutant les égalités obtenues, on arrive à : $\sum_{k=0}^{n} [\varphi_p(k+1) - \varphi_p(k)] = (p+1)!.\sum_{k=0}^{n} k^p$, et comme : $\varphi_p(0) = 0$, on conclut que : $\varphi_p(n+1) = (p+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^p$, puisque la somme est télescopique.

c. On a alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$,

- $\varphi_1(n+1) = (1+1)!.\sum_{k=1}^{n} k = \begin{vmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = n.(n+1)$, d'où : $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n.(n+1)}{2}$.
- $\varphi_2(n+1) = (2+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & (n+1)^3 \end{vmatrix} = n.(n+1).(2.n+1)$, d'où : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.
- $\varphi_3(n+1) = (3+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & 0 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & (n+1)^3 \\ 1 & 4 & 6 & (n+1)^4 \end{vmatrix} = 6.n^2.(n+1)^2$, et : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{6.n^2.(n+1)^2}{24} = \dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}$.

98. a. Si n vaut 1, les matrices se confondent avec des complexes, et l'égalité est vérifiée pour tout : A $\in$ $\mathbb{C}$.

b. On suppose dorénavant que : $n \geq 2$.
Si A répond au problème, en prenant : X = A, on obtient :
det(2.A) = 2.det(A) = 2^n.det(A), et donc : $\det(A) = 0$.

c. On sait qu'il existe : (P,Q) $\in$ $Gl_n(\mathbb{C})^2$, A = Q.$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.P.

Posons alors : X = Q.$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix}$.P, qui est bien une matrice de rang (n – r) puisque P et Q sont inversibles.
On a alors : A + X = Q.P, et : det(A + X) = det(Q.P) = det(Q).det(P) $\neq$ 0.
Or : det(A + X) = det(X).
Donc X est inversible, est donc de rang n, et : r = 0.
Puisque A est une matrice de rang 0, elle est nulle.