

Algèbre linéaire (corrigé niveau 2).

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

40. Tout d'abord : $F_0 = \text{Vect}(\sin)$, et la fonction sinus n'étant pas nulle, on a : $\dim(F_0) = 1$, et \sin constitue une base de F_0 .

Puis : $F_1 = \text{Vect}(f_0, f_1)$.

Or : $\forall (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_0.f_0 + \lambda_1.f_1 = 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0.\sin(x) + \lambda_1.\sin(x+1) = 0)$.

En particulier, pour : $x = 0$, on obtient : $\lambda_1.\sin(1) = 0$, d'où : $\lambda_1 = 0$, puisque : $\sin(1) \neq 0$.

Et sinus n'étant pas la fonction nulle, on en déduit : $\lambda_0 = 0$.

Donc (f_0, f_1) constitue une base de F_1 , et : $\dim(F_1) = 2$.

Soit maintenant : $n \geq 2$.

On constate que : $\forall 0 \leq k \leq n, \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+k) = \cos(k).\sin(x) + \sin(k).\cos(x)$, et : $f_k \in \text{Vect}(\sin, \cos)$.

D'où : $F_1 = \text{Vect}(f_0, f_1) \subset \text{Vect}(f_0, \dots, f_n) = F_n \subset \text{Vect}(\sin, \cos)$, par stabilité par combinaison linéaire.

Et donc : $\dim(F_1) = 2 \leq \dim(F_n) \leq \dim(\text{Vect}(\sin, \cos)) \leq 2$.

On en déduit que toutes les inégalités sont des égalités : $\dim(F_1) = \dim(F_n) = \dim(\text{Vect}(\sin, \cos)) = 2$,

et que : $F_1 = F_n = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

En prime, (\sin, \cos) est une base de $\text{Vect}(\sin, \cos)$ (puisque génératrice et de cardinal 2), ce qu'on pouvait bien sûr montrer à la main, et de plus c'est aussi une base de F_n .

41. L'idée est de voir quelles relations existent entre ces fonctions.

On peut tout d'abord constater que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x) = (f_3 - f_4)(x), \text{ soit : } f_1 = f_3 - f_4.$$

Donc : $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) \subset \text{Vect}(f_2, f_3, f_4)$.

$$\text{De même : } \forall x \in]-1, 1[, f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (f_3 + f_4)(x), \text{ soit : } f_2 = f_3 + f_4, \text{ et : } F \subset \text{Vect}(f_3, f_4).$$

Mais comme par ailleurs on a évidemment : $\text{Vect}(f_3, f_4) \subset \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = F$, finalement : $F = \text{Vect}(f_3, f_4)$.

Enfin, la famille (f_3, f_4) est libre car :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha.f_3 + \beta.f_4 = 0) \Rightarrow (\forall x \in]-1, 1[, \alpha.f_3(x) + \beta.f_4(x) = 0) \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ (pour : } x = 0), \text{ puis : } \beta = 0)$.

Donc la famille (f_3, f_4) est une base de F qui est donc de dimension 2.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

42. Notons : $G = \text{Vect}(\sin, \cos)$, $H = \{f \in E, f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$.

Montrons alors que : $\forall f \in E, \exists ! (\alpha, \beta, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times H, f = \alpha.\sin + \beta.\cos + h$.

Soit donc : $f \in E$.

Si une telle décomposition existe, alors :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha.\sin(x) + \beta.\cos(x) + h(x)$, et :

$$f(0) = \alpha.0 + \beta.1 + h(0) = \beta + h(0),$$

$$f(\pi/2) = \alpha.1 + \beta.0 + h(\pi/2) = \alpha + h(0),$$

$$f(\pi) = \alpha.0 + \beta.(-1) + h(\pi) = -\beta + h(0).$$

$$\text{donc : } h(0) = \frac{f(0) + f(\pi)}{2}, \text{ puis : } \alpha = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{f(0) + f(\pi)}{2}, \text{ et : } \beta = f(0) - \frac{f(0) + f(\pi)}{2} = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}.$$

$$\text{Réciproquement, si on pose : } g = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \right].\sin + \left[\frac{f(0) - f(\pi)}{2} \right].\cos, \text{ et : } h = f - g, \text{ alors :}$$

• $g \in G$,

$$\bullet h(0) = f(0) - \frac{f(0) - f(\pi)}{2} = \frac{f(0) + f(\pi)}{2}, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \right] = \frac{f(0) + f(\pi)}{2}, \text{ et :}$$

$$h(\pi) = f(\pi) + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} = \frac{f(0) + f(\pi)}{2}, \text{ soit : } h(0) = h(\pi/2) = h(\pi), \text{ donc : } h \in H.$$

• $g + h = f$, par construction.

Conclusion : tout élément de E se décompose de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G et ces deux sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires dans E .

43. On peut remarquer que : $G = (X - a)^2 \cdot \mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire l'ensemble des multiples de $(X - a)^2$.
 $(X - a)^2$ est dans F et G et ils ne sont pas supplémentaires.
 En revanche, $\mathbb{R}_1[X]$ et G sont supplémentaires, puisque l'unique décomposition d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant ces deux espaces est garanti par le théorème sur la division euclidienne par $(X - a)^2$.

Applications linéaires, projecteurs.

44. a. Notons tout d'abord que u est bien un endomorphisme de E.
 Puis : $\forall f \in E, (f \in \ker(u)) \Leftrightarrow (f'' = 0) \Leftrightarrow (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x + b) \Leftrightarrow (f \in \text{Vect}(f_0, f_1))$,
 avec : $f_0 : x \mapsto 1$, et $f_1 : x \mapsto x$.
 Donc l'équivalence précédente garantit que : $\ker(u) = \text{Vect}(f_0, f_1)$, soit l'espace des fonctions affines.
 Montrons que : $\text{Im}(u) = E$.
 Puisque : $\text{Im}(u) \subset E$, il suffit de montrer l'inclusion inverse et pour cela soit : $f \in E$.
 En notant φ une primitive de f sur \mathbb{R} , puis F une primitive de φ sur \mathbb{R} , alors : $\varphi' = f$, puis : $F'' = \varphi' = f$, et :
 $f = u(F)$.
 Conclusion : $\text{Im}(u) = E$.
- b. Non, évidemment puisque : $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \ker(u) \neq \{0\}$.

45. a. Puisque la linéarité de Δ est immédiate, il suffit de démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or c'est immédiat, car : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$, et : $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P(X+1)) - \deg(P) \leq n$.

Donc on peut définir Δ_n , endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta_n(P) = \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

- b. On peut remarquer par ailleurs, que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P \neq 0) \Rightarrow (\deg(\Delta(P)) < \deg(P))$.

En effet, si on note : $P = a_k \cdot X^k + \dots + a_0$, avec : $k \geq 0, a_k \neq 0$, alors :

$$\Delta(P) = a_k \cdot (X+1)^k + \dots + a_0 - [a_k \cdot X^k + \dots + a_0] = k \cdot a_k \cdot X^{k-1} + \dots, \text{ polynôme de degré strictement inférieur à } k.$$

Autrement dit : $\forall 0 \leq k \leq n, \Delta_n(\mathbb{R}_k[X]) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Donc par récurrence : $\forall 0 \leq k \leq n, \Delta_n^k(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-k}[X]$, soit, pour : $k = n : \Delta_n^n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Et comme tout polynôme constant a une image nulle par Δ , on en déduit que : $\Delta_n^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \{0\}$.

Autrement dit : $\Delta_n^{n+1} = 0$.

- c. Notons alors T l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], T(P) = P(X+1)$, et T_n l'endomorphisme induit par T dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Alors : $\Delta_n = T_n - \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, qu'on notera : $T_n - \text{id}_n$.

Et : $(T_n - \text{id}_n)^{n+1} = 0$, et comme T_n et id_n commutent, on a : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} T^k = 0$, ce qui se traduit par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} T^k(P) = 0, \text{ ou encore immédiatement : } \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot P(X+k) = 0,$$

avec : $\forall 0 \leq k \leq n+1, a_k = (-1)^{n+1-k} \cdot \binom{n}{k}$, puisque : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall 0 \leq k \leq n+1, T^k(P) = P(X+k)$.

46. • Considérons x non nul dans E.

Puisque x et f(x) sont liés, il existe deux scalaires α et β , non tous les deux nuls, tels que : $\alpha \cdot x + \beta \cdot f(x) = 0$.
 Il n'est pas possible alors d'avoir : $\beta = 0$, sinon on aurait : $\alpha \cdot x = 0$, donc : $\alpha = 0$.

On peut en déduire que : $f(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot x$, autrement dit : $\forall x \in E, x \neq 0, \exists \lambda_x \in \mathbf{K}, f(x) = \lambda_x \cdot x$.

Considérons maintenant deux vecteurs x et y non nuls et formant une famille libre dans E.

Alors : $\exists (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_{x+y}) \in \mathbf{K}^3, f(x) = \lambda_x \cdot x, f(y) = \lambda_y \cdot y, f(x+y) = \lambda_{x+y} \cdot (x+y)$.

Mais alors : $\lambda_{x+y} \cdot x + \lambda_{x+y} \cdot y = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y$, et la famille (x,y) étant libre, on en déduit que :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Si maintenant x et y sont liés et non nuls, alors l'un est proportionnel à l'autre, par exemple :

$$\exists \alpha \in \mathbf{K}, y = \alpha \cdot x, \text{ puis : } f(x) = \lambda_x \cdot x, f(y) = \lambda_y \cdot y = \lambda_y \cdot (\alpha \cdot x) = f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lambda_x \cdot x.$$

Et comme α et x sont non nuls, on en déduit encore : $\lambda_x = \lambda_y$.

Conclusion : il existe un scalaire λ tel que : $\forall x \in E, x \neq 0, f(x) = \lambda \cdot x$, et comme cette égalité est encore valable pour : $x = 0$, f est finalement bien une homothétie.

Alors : Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

• Si E est de dimension finie, on peut adapter la démonstration en reprenant la première partie pour les vecteurs (e_1, \dots, e_n) d'une base de E , et pour lesquels on a donc : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ (valeur fixe).
 Mais si on a : $\forall 1 \leq i \leq n, f(e_i) = \lambda \cdot e_i$, par combinaison linéaire c'est alors vrai pour tout vecteur de E et f est bien une homothétie.

47. E est évidemment un \mathbb{C} -espace vectoriel, et il est immédiat que l'ensemble des suites complexes (α_n) qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+2} = \alpha_{n+1} + 6 \cdot \alpha_n$, est un sous-espace vectoriel de E .

Le cours de sup, d'ailleurs montre que c'est un espace de dimension finie égale à 2, dont une base est formée des deux suites géométriques $((-2)^n)$ et (3^n) , soit celles dont la raison est racine de l'équation caractéristique associée : $r^2 - r - 6 = 0$.

Pour montrer que p est un projecteur de E , il suffit de montrer que : $\forall u \in \mathbb{C}^n, p(p(u)) = p(u)$.

Or si pour u donnée, on note : $v = p(u)$, alors l'image de v est la suite w telle que :

- $w_0 = v_0$,
- $w_1 = v_1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + 6 \cdot w_n$,

et on constate par récurrence que comme v vérifie la même relation de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n$.

Donc : $w = v$, soit : $p(p(u)) = p(u)$.

p est donc bien un projecteur de E , sur l'espace décrit au début, et le noyau de p est simplement le sous-espace vectoriel des suites complexes dont les deux premiers termes sont nuls.

48. a. Les relations proposées donnent dans l'ordre :

$\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f) \subset \text{Im}(g) \subset \text{Im}(h)$, et donc l'égalité des trois images.

En effet : $\forall y \in \text{Im}(h), \exists x \in E, y = h(x) = f(g(x)) = f(\text{Im}(g))$, et : $y \in \text{Im}(f)$, de même pour les autres relations.

Puis : $\ker(h) \supset \ker(g) \supset \ker(f) \supset \ker(h)$, et à nouveau l'égalité des trois noyaux.

En effet, on a de même : $\forall x \in E, (g(x) = 0) \Rightarrow (f(g(x)) = 0) \Rightarrow (h(x) = 0)$.

b. O y va : $f^2 = (goh)of = gog = g^2 = (hof)og = hoh = h^2$.

Puis : $f^5 = g^2oh^2of = go(goh)of(hof) = gofog = goh = f$.

c. On constate que : $\forall x \in E$, si : $x = y + z$, avec : $y \in \text{Im}(f), z \in \ker(f)$, alors : $\exists a \in E, y = f(a)$.

Puis : $f^4(y) = f^4(x) - f^4(z) = f^4(x) = f^5(a) = f(a) = y$, et : $z = x - y = x - f^4(x)$.

On vérifie alors que le seul couple (y, z) ainsi trouvé convient, car :

- $y = f^4(x) \in \text{Im}(f)$,
- $f(z) = f(x - f^4(x)) = f(x) - f^5(x) = 0, z \in \ker(f)$,
- $y + z = x$.

Bref, les deux espaces sont bien supplémentaires dans E .

49. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel sur \mathbf{K} tel que : $fog = \text{id}_E$.

a. Il est immédiat que : $\forall x \in \ker(f), x \in \ker(gof)$, et donc : $\ker(f) \subset \ker(gof)$.

Puis, si : $x \in \ker(gof)$, alors : $gof(x) = 0$, et : $f(x) = fog(f(x)) = f(gof(x)) = f(0) = 0$.

Donc on a aussi : $\ker(gof) \subset \ker(f)$, d'où l'égalité des deux noyaux.

De même, on a évidemment : $\text{Im}(gof) \subset \text{Im}(g)$, et :

$\forall y \in \text{Im}(g), \exists x \in E, y = g(x) = g(fog(x)) = gof(g(x)) \in \text{Im}(gof)$,

d'où l'égalité des deux images.

b. Pour : $x \in E$, si : $x = y + z$, avec : $y \in \text{Im}(g), z \in \ker(f)$, alors : $\exists a \in E, y = g(a)$, et : $f(x) = f(g(a)) + f(z)$.

Donc : $f(x) = a + 0$, et : $y = g(a) = g(f(x))$, puis : $z = x - gof(x)$.

Réciproquement, ce seul couple trouvé convient car :

- $y \in \text{Im}(g)$,
- $f(z) = f(x) - f(gof(x)) = f(x) - fog(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, soit : $z \in \ker(f)$,
- $y + z = x$.

On a donc bien la supplémentarité des deux sous-espaces vectoriels dans E .

c. Si E est de dimension finie, on peut évidemment en conclure que : $g = f^{-1}$, par exemple parce qu'alors f est surjectif ($\forall y \in E, y = fog(y) = f(g(y))$), donc bijectif par la théorie du rang.

Plus généralement, le résultat est vrai si (et seulement si) f est bijectif.

Attention, en dimension infinie, le résultat est faux comme le montre le contre-exemple :

$$E = \mathbb{R}[X], \forall P \in E, f(P) = P', \text{ et } g(P) = Q, \text{ avec : } \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x P(t).dt$$

Il est clair que : $fog = \text{id}_E$, et que P n'est pas bijectif.

d. On a immédiatement : $(gof)ogof = go(fog)of = gof$, donc gof est un projecteur de E , sur $\text{Im}(g)$ dans la

direction $\ker(f)$.

50. a. Soit : $y \in \text{Im}(f+g)$.

Alors : $\exists x \in E, y = f(x) + g(x)$, et : $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

On en déduit que : $\text{rg}(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

b. Si l'on démontre que : $(\text{rg}(f) - \text{rg}(g)) \leq \text{rg}(f+g)$, alors par symétrie de f et de g , on obtient aussi :

$(\text{rg}(g) - \text{rg}(f)) \leq \text{rg}(g+f) = \text{rg}(f+g)$, d'où l'autre inégalité puisque la valeur absolue qui apparaît est l'une des deux différences que l'on vient d'évoquer.

Or : $f = (f+g) + (-g)$, donc : $\text{rg}(f) = \text{rg}((f+g) + (-g)) \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg}(g)$.

On en déduit donc la première inégalité annoncée et finalement le résultat voulu.

51. a. Soit : $x \in E$.

Si on peut décomposer x en : $x = y + z$, avec : $y \in \text{Im}(f)$, et : $z \in \ker(g)$, alors :

$\exists a \in E, y = f(a)$, et : $fog(x) = fog(y) + fog(z) = fog(f(a)) + f(0) = f(a) + 0 = y$, et : $z = x - y$.

Réciproquement, ce seul couple possible convient car :

- $y = fog(x) \in \text{Im}(f)$,
- $g(z) = g(x) - g(fog(x)) = g(x) - g(x) = 0$, et : $z \in \ker(g)$,
- $y + z = x$.

Donc $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont bien supplémentaires dans E .

b. On a évidemment : $f(\text{Im}(g)) \subset \text{Im}(f)$, comme on le vérifie immédiatement.

Puis : $\forall y \in \text{Im}(f), \exists x \in E, y = f(x)$.

Ecrivons alors x sous la forme : $x = g(a) + z$, avec : $z \in \ker(f)$, comme le garantit le résultat symétrique du résultat précédent.

Alors : $y = f(x) = f(g(a)) + f(z) = f(b)$, avec : $b = g(a) \in \text{Im}(g)$, soit : $y \in f(\text{Im}(g))$.

D'où l'égalité voulue.

52. a. Travaillons par double inclusion :

• $\forall x \in u^{-1}(u(F)), u(x) \in u(F)$, donc : $\exists x' \in F, u(x) = u(x')$, et : $x - x' = a \in \ker(u)$, soit :

$x = x' + a$, avec : $x' \in F, a \in \ker(u)$.

• $\forall x \in [F + \ker(u)], u(x) \in u(F)$, et par définition : $x \in u^{-1}(u(F))$.

b. • De même : $u(u^{-1}(F)) = F \cap \text{Im}(u)$.

En effet : $\forall y \in u(u^{-1}(F)), \exists x \in u^{-1}(F), y = u(x)$, et puisque : $x \in u^{-1}(F), u(x) \in F$, donc : $y \in F \cap \text{Im}(u)$.

• Si maintenant : $y \in F \cap \text{Im}(u)$, alors : $\exists x \in E, y = u(x)$, et : $y \in F$, autrement dit : $x \in u^{-1}(F)$, et donc : $y \in u(u^{-1}(F))$.

c. On a l'égalité proposée si et seulement si : $F + \ker(u) = F \cap \text{Im}(u)$.

On doit donc avoir :

• $\ker(u) \subset F$, d'une part puisque : $\ker(u) \subset [F + \ker(u)] \subset F \cap \text{Im}(u) \subset F$, et d'autre part :

• $F \subset [F + \ker(u)] \subset F \cap \text{Im}(u) \subset \text{Im}(u)$.

Réciproquement, supposons qu'on ait : $\ker(u) \subset F \subset \text{Im}(u)$.

Alors : $F + \ker(u) = F = F \cap \text{Im}(u)$, et l'égalité voulue est bien vérifiée.

Matrices.

53. Puisque : $f^2 = 0$, on sait que : $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Comme de plus : $\text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 4$, on peut en déduire que $\text{rg}(f)$ vaut 0, 1 ou 2.

• Dans le cas où : $\text{rg}(f) = 0$, alors pour toute base \mathcal{B} de E , $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = 0$.

• Dans le cas où : $\text{rg}(f) = 1$, si on considère un vecteur de base de $\text{Im}(f)$, noté e_2 , un antécédent de ce vecteur noté e_1 et qu'on complète e_2 , en une base (e_2, e_3, e_4) de $\ker(f)$ (qui est de dimension : $4 - 1 = 3$), alors la famille ainsi obtenue est une base de E car :

elle comporte 4 vecteurs et :

$\alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_4 \cdot e_4 = 0$, entraîne : $\alpha_1 \cdot f(e_1) + \dots + \alpha_4 \cdot f(e_4) = 0$, soit : $\alpha_1 \cdot e_2 = 0$, ou : $\alpha_1 = 0$, puis la liberté de la famille (e_2, e_3, e_4) entraîne la nullité des autres coefficients.

Dans cette base, la matrice de f est : $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Dans le cas où : $\text{rg}(f) = 2$, et en reprenant la même démarche à partir de : $\text{Im}(f) = \ker(f)$, on montre qu'on

peut trouver une base \mathcal{B} de E dans laquelle on a : $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

54. a. Travaillons par double implication :

- si : $\ker(u) = \text{Im}(u)$, alors : $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\ker(u))$ et le théorème du rang donne : $n = 2.\text{rg}(u)$.
Puis : $\forall x \in E, u^2(x) = u(u(x)) = 0$, puisque : $u(x) \in \text{Im}(u)$, donc : $u(x) \in \ker(u)$.
- si : $u^2 = 0$, alors : $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$, et le théorème du rang montre que : $\dim(\ker(u)) = n - \text{rg}(u) = \text{rg}(u)$.
Donc $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont égaux.

b. Là encore, par double implication :

[\Leftarrow] si la matrice de u dans une base \mathcal{B} de E vaut la matrice proposée, alors un produit par blocs montre que : $\text{mat}(u, \mathcal{B})^2 = 0$, et : $u^2 = 0$.

De plus $\text{rg}(\text{mat}(u, \mathcal{B})) = \text{rg}(0 \ A) = \text{rg}(A) = \frac{n}{2}$, et on a : $n = 2.\text{rg}(A) = 2.\text{rg}(u)$.

Avec l'équivalence précédente, on en déduit que : $\ker(u) = \text{Im}(u)$.

[\Rightarrow] si : $\text{Im}(u) = \ker(u)$, alors n est pair puisque : $n = \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = 2.\text{rg}(u)$.

En notant : $n = 2.p$, et en notant (e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Im}(u)$, on peut appeler (e_{p+1}, \dots, e_n) une famille telle que : $\forall 1 \leq i \leq p, u(e_{p+i}) = e_i$.

La famille (e_1, \dots, e_n) ainsi obtenue comporte n vecteurs et elle est libre car :

$\alpha_1.e_1 + \dots + \alpha_n.e_n = 0$, entraîne (image par u) : $\alpha_1.0 + \dots + \alpha_p.0 + \alpha_{p+1}.e_1 + \dots + \alpha_n.e_p = 0$, donc les p derniers coefficients sont nuls, puis en revenant à l'égalité de départ, on en déduit la nullité des autres coefficients.

Dans cette base \mathcal{B} de E , on a : $\text{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui correspond bien à ce que l'on voulait.

55. a. Une fois de plus : $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

b. Si on construit maintenant une base (e_1, \dots, e_r) de $\text{Im}(f)$, qu'on appelle (e_{n-r+1}, \dots, e_n) des antécédents de ces vecteurs, autrement dit tels que : $\forall 1 \leq i \leq r, f(e_{n-r+i}) = e_i$, et qu'on complète la famille libre (e_1, \dots, e_r) en une base (e_1, \dots, e_{n-r}) de $\ker(f)$, alors la famille ainsi obtenue est une base de E .

En effet, elle comporte bien n vecteurs et :

$\alpha_1.e_1 + \dots + \alpha_n.e_n = 0$, entraîne (image par f) : $\alpha_1.0 + \dots + \alpha_{n-r}.0 + \alpha_{n-r+1}.e_1 + \dots + \alpha_n.e_r = 0$, et on en déduit que les $(n - r)$ derniers coefficients sont nuls.

Puis en revenant à l'égalité de départ, tous les autres coefficients sont nuls.

Enfin, dans la base \mathcal{B} de E ainsi obtenue, on a : $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{n-2r,r} & I_r \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} & 0_{n-2r,r} \\ 0_{r,r} & 0_{n-2r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$.

56. Pour : $P \in E_n$, alors : $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}.P(x)) = -2.x.e^{-x^2}.P(x) + e^{-x^2}.P'(x)$, et : $Q(x) = -2.x.P(x) + P'(x)$.

Sous cette forme, il est clair que u_n est une application linéaire de E_n dans E_{n+1} .

Il est clair ensuite que si P est de degré k , alors P' est de degré au plus $(k - 1)$ et $2.X.P$ est de degré $(k+1)$, donc $u_n(P)$ est de degré $k+1$, donc est non nul.

On en déduit que : $\ker(u_n) = \{0\}$.

Puis : $\dim(\text{Im}(u_n)) = \dim(E_n) = n$.

Le plus simple alors est de déterminer ensuite la matrice de u_n dans les bases \mathcal{B}_n et \mathcal{B}_{n+1} , et pour cela :

- $u_n(1) = -2.X$,
- $\forall 1 \leq k \leq n - 1, u_n(X^k) = -2.X^{k+1} + k.X^{k-1}$.

$$\text{D'où : } \text{mat}(u_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ matrice de taille } (n+1) \times n.$$

L'image est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par les polynômes $(2.X^{k+1} - k.X^{k-1}, 1 \leq k \leq n-1)$ et le polynôme $-2.X$.

57. Pour cela, on note u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le polynôme Q

$$\text{défini par : } Q = \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right).$$

u est alors linéaire et c'est donc un endomorphisme de E .

De plus, si : $\deg(P) = k \geq 0$, alors :

$$\forall 0 \leq i \leq k, \deg \left(P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right) \right) = k - i, \text{ et : } \forall k < i \leq n, P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right) = 0.$$

Donc l'image de P est une somme de polynômes de degrés distincts (et du polynôme nul) : c'est donc un polynôme non nul et u est donc injectif.

$$u \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X], \text{ et : } \forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right).$$

Pour : $n = 3$, et : $Q = X^3$, on pose : $P = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$, et :

$$\sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right) = P(X) + P' \left(\frac{X}{2} \right) + P'' \left(\frac{X}{4} \right) + P''' \left(\frac{X}{8} \right),$$

$$\text{soit : } \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right) = a.X^3 + \left(b + \frac{3}{4}.a \right).X^2 + \left(c + b + \frac{3}{2}.a \right).X + (d + c + 2.b + 6.a).$$

$$\text{En résolvant le système, on obtient : } a = 1, b = -\frac{4}{3}, c = -\frac{3}{4}, d = -\frac{15}{4}, \text{ soit : } P = X^3 - \frac{3}{4}.X^2 - \frac{3}{4}.X - \frac{15}{4}.$$

58. Pour : $n = 1$, la matrice A est nulle et donc n'est pas inversible.

Pour : $n \geq 2$, $A = U - I_n$, où U est la matrice ne comportant que des 1.

Alors : $A^2 = U^2 - 2.U + I_n$, puisque les matrices commutent, et : $A^2 = n.U - 2.U + I_n$, soit :

$$A^2 = (n-2).U + I_n = (n-2).(A + I_n) + I_n, \text{ soit : } A^2 - (n-2).A = (n-1).I_n.$$

$$A \text{ est donc inversible et : } A^{-1} = \frac{1}{n-1}.(A - (n-2).I_n) = \frac{1}{n-1}.U - I_n = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

59. a. En notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A , et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n ,

alors : $u(e_1) = e_2, \dots, u(e_{n-1}) = e_n$, et : $u(e_n) = e_1$.

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall 1 \leq k \leq n-1, \forall 1 \leq i \leq n-k, u^k(e_i) = e_{i+k}, \text{ et : } \forall n-k+1 \leq i \leq n, u^k(e_i) = e_{i+k-n}.$$

En particulier : $u^n = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \cdot \mu$

Ensuite : $\forall k \in \mathbb{N}$, avec : $r = k \pmod{n}$, où : $0 \leq r \leq n-1$, $A^k = A^r$.

calculer A^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

b. On obtient alors :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = (I_n + A)^k$, et comme les deux matrices commutent, la formule du binôme s'applique.

$$\text{Soit : } M^k = (A + I_n)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i, \text{ que l'on peut réduire, si : } k > n.$$

$$\text{En particulier : } M^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i = \begin{pmatrix} 2 \binom{n}{0} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} & 2 \binom{n}{0} \end{pmatrix}.$$

Calcul de déterminants.

60. Sur chaque ligne de $\det(A')$, on peut factoriser par $(-1)^i$ et sur chaque colonne par $(-1)^j$.

$$\text{Donc : } \det(A') = (-1)^{\sum_{i=1}^n i} \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^n j} \cdot \det(A) = \det(A).$$

61. Dans $\det(A)$, on remplace chaque ligne L_i par : $L'_i = L_i + L_n$, pour : $1 \leq i \leq n-1$.

Chaque terme de la nouvelle ligne L'_i est alors égal à 0, 2 ou -2, pour : $1 \leq i \leq n-1$, et dans chacune de ces lignes, on peut factoriser par 2, les termes restants étant des entiers.

Autrement dit : $\det(A) = 2^{n-1} \cdot \det(A')$, où A' est une matrice constituée d'entiers égaux à 0, 1 ou -1.

On conclut alors soit par récurrence, soit en utilisant la formule théorique du déterminant au fait que $\det(A')$ est un entier relatif et donc $\det(A)$ est bien un élément de \mathbb{Z} , divisible par 2^{n-1} .

62. Travaillons comme proposé par récurrence.

Si A est une matrice 1×1 vérifiant les hypothèses de l'énoncé, alors : $|\det(A)| = |a_{1,1}| = a_{1,1} \leq 1$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour toute matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$, et vérifiant les hypothèses proposées, et soit A une matrice de taille $n \times n$, telle que :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} \geq 0, \text{ et : } \forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1.$$

Développons alors $\det(A)$ suivant par exemple sa dernière ligne.

$$\text{On obtient : } \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{n,j} \cdot \Delta_{n,j}, \text{ puis : } |\det(A)| \leq \sum_{j=1}^n |a_{n,j}| |\Delta_{n,j}| = \sum_{j=1}^n a_{n,j} |D_{n,j}|,$$

où $D_{n,j}$ est le déterminant d'une matrice $A_{n,j}$ extraite de A , de taille $(n-1) \times (n-1)$, dont les coefficients sont positifs et tels que :

$$\forall 1 \leq i \leq n-1, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{i,k} \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k} \leq 1.$$

Autrement dit, toutes les matrices $A_{n,j}$ précédentes vérifient la même propriété que A , et :

$$\forall 1 \leq j \leq n, |D_{n,j}| = |\det(A_{n,j})| \leq 1, \text{ puis :}$$

$$|\det(A)| \leq \sum_{j=1}^n a_{n,j} |D_{n,j}| \leq \sum_{j=1}^n a_{n,j} \leq 1, \text{ soit le résultat voulu, ce qui termine la récurrence.}$$

63. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, telles que : $A \cdot B - B \cdot A = B$.

a. Ce premier résultat s'obtient bien sûr par récurrence sur k .

Il est immédiat pour : $k = 0$, et si on le suppose vrai pour une valeur k entière donnée, alors :

$$A \cdot B^{k+1} = (A \cdot B^k) \cdot B = B^k \cdot (A + k \cdot I_n) \cdot B = B^k \cdot A \cdot B + k \cdot B^{k+1} = B^k \cdot (B \cdot A + B) + k \cdot B^{k+1} = B^{k+1} \cdot A + (k+1) \cdot B^{k+1},$$

c'est-à-dire ce que l'on voulait obtenir, ce qui termine la récurrence.

b. On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \det(A \cdot B^k) = \det(B^k) \cdot \det(A + k \cdot I_n), \text{ soit : } [\det(A) - \det(A + k \cdot I_n)] \cdot [\det(B)]^k = 0.$$

Supposons maintenant que : $\det(B) \neq 0$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \det(A + k \cdot I_n) = \det(A)$.

Or l'application $f : x \mapsto \det(A + x \cdot I_n)$, est polynomiale en x de degré n , ce qui peut se montrer par récurrence, en utilisant deux étapes :

- toute matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x a un déterminant qui est un polynôme en x de degré au plus n , à l'aide d'un développement par rapport à une ligne,
- c'est un polynôme de degré effectivement n et de coefficient dominant égal à 1 en développant par rapport à la dernière colonne par exemple.

En effet, cela conduit à une somme de n produits :

- ceux formés d'un terme constant et d'un déterminant qui est un polynôme de degré au plus n d'après la première étape,
- celui correspondant au produit de $(a_{n,n} + x)$ et du déterminant extrait de taille $(n-1) \times (n-1)$ qui est par hypothèse de récurrence un polynôme de degré $(n-1)$ et de coefficient dominant égal à 1.

Donc : $x \mapsto \det(A + x \cdot I_n) - \det(A)$, est également un polynôme de degré n et ne peut s'annuler en une infinité de valeurs (ici les valeurs entières : $k \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion : on a bien : $\det(B) = 0$.

c. Enfin, on a évidemment : $\text{tr}(B) = \text{tr}(A \cdot B - B \cdot A) = \text{tr}(A \cdot B) - \text{tr}(B \cdot A) = 0$.

64. a. Ecrivons la matrice proposée : $M(a,b) - x \cdot J = \begin{pmatrix} c-x & b-x & \cdots & b-x \\ a-x & c-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ a-x & \cdots & a-x & c-x \end{pmatrix}$.

Pour son déterminant, on peut remplacer chaque colonne C_k par $C_k - C_1$, et ceci, pour : $2 \leq k \leq n$. Le déterminant obtenu a tous ses termes constants sauf ceux de la première colonne qui sont des fonctions affines de x .

Si maintenant on le développe suivant cette première colonne, on obtient une somme de n termes, chacun étant un produit d'un terme constant (un cofacteur formé à partir des colonnes C_2, \dots, C_n) et d'une fonction affine de x .

Donc $\varphi(x)$ se présente bien comme une fonction affine de x , soit un polynôme en x de degré au plus 1, ce qui peut s'écrire : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2, \forall x \in \mathbf{K}, \varphi(x) = \alpha \cdot x + \beta$.

Or : $\varphi(a) = (c-a)^n$, et : $\varphi(b) = (c-b)^n$, puisque dans les deux cas, les déterminants sont triangulaires.

Dans le cas où : $a \neq b$, on peut alors résoudre le système :

$$\alpha \cdot a + \beta = (c-a)^n,$$

$$\alpha \cdot b + \beta = (c-b)^n,$$

qui a pour solution : $\alpha = \frac{(c-a)^n - (c-b)^n}{a-b}$, et : $\beta = \frac{b \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-b)^n}{b-a}$.

Enfin : $\det(M(a,b)) = \varphi(0) = \beta = \frac{b \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-b)^n}{b-a}$.

b. Pour cette question, on peut procéder par récurrence ou utiliser la formule théorique du déterminant.

Par exemple, on peut montrer que si A est une matrice $n \times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x , alors $\det(A)$ est un polynôme de degré au plus n en x , ce qui s'obtient sans problème avec une récurrence et un développement suivant une ligne ou une colonne.

La matrice $M(a,x)$ étant alors une matrice du type décrit juste au-dessus, $\psi(x)$ apparaît bien comme un polynôme en x , donc une fonction continue en x .

Donc : $\det(M(a,a)) = \psi(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \psi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-x)^n}{x-a}$.

Distinguons alors deux cas :

- si : $a = c (= b)$, alors : $\det(M(a,a)) = 0$, si : $n \geq 2$, et : $\det(M(a,a)) = a$, si : $n = 1$.

- si : $a \neq c$, on utilise alors par exemple un développement limité à l'ordre 1, en posant : $x = a + h$.

On peut alors écrire : $x \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-x)^n = a \cdot (c-a)^n + h \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-a)^n \cdot \left(1 - \frac{h}{c-a}\right)^n$,

soit : $x \cdot (c-a)^n - a \cdot (c-x)^n = h \cdot (c-a)^n + n \cdot a \cdot (c-a)^{n-1} \cdot h + o(h)$,

et finalement : $\det(M(a,a)) = (c-a)^n + n \cdot a \cdot (c-a)^{n-1} = (c-a)^{n-1} \cdot (c + (n-1) \cdot a)$.

c. On peut aussi écrire : $\det(M(a, a)) = \begin{vmatrix} c & a & \cdots & a \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c + (n-1).a & a & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ c + (n-1).a & a & \cdots & a & c \end{vmatrix}$, en additionnant

toutes les colonnes à la première.

On factorise alors dans la première colonne et on remplace chaque ligne L_i par $(L_i - L_1)$, pour : $2 \leq i \leq n$.

Cela donne : $\det(M(a, a)) = (c + (n-1).a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & c-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} = (c + (n-1).a) \cdot (c-a)^{n-1}$.

65. a. Comme suggéré, la n-linéarité du déterminant, appliquée à la dernière colonne, permet d'écrire :

$$\forall n \geq 2, D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + n.D_{n-1} = (n-1)! + n.D_{n-1}$$

b. On en déduit que : $\forall n \geq 2, \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$, d'où immédiatement par récurrence :

$$\forall n \geq 2, \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{D_1}{1!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 2 = 1 + H_n, \text{ et finalement : } D_n = (1 + H_n).n!$$

Déterminants tridiagonaux.

66. En effectuant le développement habituel d'un tel déterminant, on constate que $(A_n(x))$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \geq 3, \det(A_n(x)) = (1 + x^2). \det(A_{n-1}(x)) - x^2. \det(A_{n-2}(x))$.

En notant : $D_n = \det(A_n(x))$, on étudie alors l'équation caractéristique associée à la suite (D_n) qui est : $r^2 - (1 + x^2).r + x^2 = 0$, et dont les racines sont 1 et x^2 .

• Si x est distinct de ± 1 , alors : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1, D_n = \alpha + \beta.x^{2.n}$.

Or : $D_1 = 1 + x^2 = \alpha + \beta.x^2$, et : $D_2 = 1 + x^2 + x^4 = \alpha + \beta.x^4$, d'où :

$$\alpha = \frac{1}{1-x^2}, \beta = \frac{x^2}{x^2-1}, \text{ et : } \forall n \geq 1, D_n = \frac{1-x^{2.(n+1)}}{1-x^2}$$

• Si x vaut ± 1 , alors : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1, D_n = (\alpha + \beta.n)$, et on détermine à nouveau α et β avec D_1 et D_2 .

Pour cela : $D_1 = 2 = \alpha + \beta, D_2 = 3 = \alpha + 2.\beta$, d'où : $\alpha = \beta = 1$, et : $\forall n \geq 1, D_n = n + 1$.

Déterminant de Vandermonde.

67. a. On travaille sur chaque colonne, en allant de la 2^{ème} à la dernière.

f_1 se présente sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x + a_1$, et si on remplace C_2 par $C_2 - a_1.C_1$, la colonne C_2 devient la deuxième colonne du Vandermonde.

Puis f_2 est de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = x^2 + a_2.x + b_2$, et on peut remplacer C_3 par $C_3 - a_2.C_2 - b_2.C_1$, la colonne C_3 devenant la colonne numéro 3 du Vandermonde.

En répétant cette opération sur toutes les colonnes, on aboutit à l'égalité voulue (une démonstration propre passerait par une récurrence).

b. Pour cela, on commence par écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos(k.x) = \operatorname{Re}(e^{i.k.x}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos^{k-j}(x).i^j.\sin^j(x)\right),$$

et dans cette somme on ne retient que les j pairs (pour garder la partie réelle), soit :

$$\cos(k.x) = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \binom{k}{2.p} \cos^{k-2.p}(x) \cdot (-1)^p \cdot \sin^{2.p}(x) = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \binom{k}{2.p} \cos^{k-2.p}(x) \cdot (-1)^p \cdot (1 - \cos^2(x))^p,$$

ce qui montre bien que $\cos(k.x)$ est un polynôme en $\cos(x)$, de degré au plus k .
Cherchons maintenant le coefficient de $\cos^k(x)$ dans cette somme.

Il vaut : $\sum_{p=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \binom{k}{2.p} \cdot (-1)^p \cdot (-1)^p = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \binom{k}{2.p} = 2^{k-1}$, que l'on peut retrouver en calculant $(1 + 1)^n$ et $(1 - 1)^n$.

Donc $\cos(k.x)$ est bien un polynôme en $\cos(x)$ de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1} .

Le déterminant Δ_n est donc du type précédent, si on commence par factoriser 2^{k-1} dans chaque colonne C^k , et on fait apparaître ainsi des polynômes normalisés en $\cos(x)$ de degré $k - 1$ pour chaque colonne.

$$\text{Donc : } \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix} = 2^0 \cdot 2^1 \cdots 2^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos^n(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos^n(a_{n+1}) \end{vmatrix}, \text{ et}$$

$$\text{finalement : } \Delta_{n+1} = 2^{\frac{n.(n-1)}{2}} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(a_j) - \cos(a_i)).$$

Déterminants, applications linéaires et matrices.

68. a. Pour calculer $\det(f)$, il suffit de trouver la matrice de f dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut choisir la base canonique, mais aussi une base plus adaptée, par exemple obtenue comme réunion d'une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) qui sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Chaque vecteur de la première base (qui compte : $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n.(n+1)}{2}$, éléments) est invariant par f

et chaque vecteur de la deuxième (qui en compte : $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n.(n-1)}{2}$) est changé en son opposé.

La matrice de f dans cette base est donc diagonale, et compte $\frac{n.(n+1)}{2}$ éléments diagonaux égaux à 1,

et $\frac{n.(n-1)}{2}$ égaux à -1.

Donc le déterminant de f vaut : $\det(f) = (-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$.

b. Puisque f vérifie : $f^2 = \text{id}_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$, on a donc : $\det(f^2) = 1 = (\det(f))^2$, donc on savait que : $\det(f) = \pm 1$.

Plus simplement, puisque l'application transposée est bijective, il était immédiat que $\det(f)$ serait non nul.

69. a. On peut montrer par récurrence (comme dans l'exercice 20) que f est un polynôme en x de degré au plus n , avec la proposition : toute matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x a un déterminant qui est un polynôme en x de degré au plus n .

Pour montrer que c'est un polynôme de degré effectivement n et de coefficient dominant égal à 1, on peut le faire là encore par récurrence, en développant par rapport à la dernière colonne par exemple. En effet, cela conduit à une somme de n produits :

- ceux formés d'un terme constant et d'un déterminant qui est un polynôme de degré au plus n ,
- celui correspondant au produit de $(a_{n,n} + x)$ et du déterminant extrait de taille $(n - 1) \times (n - 1)$ qui est par hypothèse de récurrence un polynôme de degré $(n - 1)$ et de coefficient dominant égal à 1.

b. Examinons les sommes par ligne de la matrice $(A + x.I_n)$, et pour cela, on rappelle que le coefficient générique de cette matrice est $(a_{i,j} + x.\delta_{i,j})$:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j} + x.\delta_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}| = a_{i,i} \leq a_{i,i} + x = |a_{i,i} + x.\delta_{i,i}|, \text{ car } : x \geq 0.$$

c. f a une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$, comme polynôme.

Puis si $f(0)$ était négatif, alors par continuité, f s'annulerait entre 0 et $+\infty$.

Or comme matrice à diagonale strictement dominante, $(A + x.I_n)$ est toujours inversible et son

déterminant ne s'annule donc pas.
Conclusion : $\det(A) > 0$.

70. a. On transforme l'égalité de départ en : $P.B = A.P$, puis : $P_1.B - A.P_1 = i.(P_2.B - A.P_2)$.
Quitte à travailler coefficients par coefficients, on en déduit que les deux membres de l'égalité sont nuls.
Donc : $P_1.B = A.P_1$, et : $P_2.B = A.P_2$.
- b. Les coefficients de la matrice $(P_1 + x.P_2)$ sont affines en x .
On peut alors montrer par récurrence que l'application proposée est polynomiale en x .
- c. La fonction polynomiale précédente n'est pas la fonction nulle puisqu'elle est non nulle pour : $x = i$ (la matrice $(P_1 + i.P_2)$ est inversible) donc elle admet un nombre fini de racines, et :
 $\exists a \in \mathbb{R}, \det(P_1 + a.P_2) \neq 0$.
- d. Notons alors : $Q = P_1 + a.P_2$.
Cette matrice Q est réelle et inversible d'après la question c.
De plus : $P_1.B = A.P_1$, et : $P_2.B = A.P_2$, donc : $(P_1 + a.P_2).B = A.(P_1 + a.P_2)$, soit : $Q.B = A.Q$, et finalement : $B = Q^{-1}.A.Q$.
- e. On vient de montrer que si deux matrices réelles sont semblables par l'intermédiaire d'une matrice complexe, alors elles le sont aussi par l'intermédiaire d'une matrice réelle.