Algèbre linéaire (corrigé niveau 1).

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

1. Dans les trois cas, les ensembles proposés sont :
   - inclus dans les espaces de référence,
   - non vides car ils contiennent le vecteur nul,
   - stables par combinaison linéaire.

   Donc ce sont bien des sous-espaces vectoriels des espaces proposés.
   Par exemple pour F_1 dans $\mathbb{R}^3$,
   - il est formé de triplets de réels (inclusion dans $\mathbb{R}^3$),
   - (0,0,0) vérifie la condition d'appartenance à F_1 car : $0 + 0 - 0 = 0$ (non vide),
   - si (x,y,z) et (x',y',z') sont dans F_1, avec : $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$, alors :
   $\lambda.(x,y,z) + \lambda'.(x',y',z') = (\lambda.x + \lambda'.x', \lambda.y + \lambda'.y', \lambda.z + \lambda'z')$, et cette combinaison linéaire est dans F_1 car :
   $(\lambda.x + \lambda'.x') + (\lambda.y + \lambda'.y') - (\lambda.z + \lambda'.z') = \lambda.(x + y - z) + \lambda'.(x' + y' - z') = 0$.
   (stabilité par combinaison linéaire)

   Pour obtenir une base et la dimension de ces espaces (ici le plus simple est de commencer par déterminer une base), on travaille par équivalences :
   - soit : $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   On a : $(u \in F_1) \Leftrightarrow (x + y - z = 0) \Leftrightarrow (z = x + y) \Leftrightarrow (\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha, y = \beta, z = \alpha + \beta)$
   $\Leftrightarrow (\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, u = (x,y,z) = (\alpha, \beta, \alpha+\beta) = \alpha.(1, 0, 1) + \beta.(0, 1, 1))$
   $\Leftrightarrow (u \in \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1)))$.
   Autrement dit, vu l'équivalence d'appartenance, on en déduit l'égalité d'ensembles :
   $F_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$, avec : $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$.
   Donc (u_1, u_2) constitue (par définition) une partie génératrice de F_1, et comme :
   $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 = 0) \Rightarrow ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$,
   la famille est de plus libre et forme donc une base de F_1 qui en particulier de dimension 2.
   En raisonnant de la même façon et en appliquant la méthode du pivot, on obtient :
   $F_2 = \text{Vect}(u_3)$, avec : $u_3 = (-2, 1, 3)$, qui forme ainsi une base de F_2, lui-même de dimension 1.
   - en travaillant de la même façon, on obtient par exemple :

   $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$, avec : $v_1 = (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$, et : $v_2 = (-1, 1, 0, 1)$, puis : $\dim(F_2) = 2$.
   - enfin, pour : $P = a + b.X + c.X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$,

   $(P \in H) \Leftrightarrow (a + 2.b + 4.c = 0) \Leftrightarrow (a = -2.b - 4.c) \Leftrightarrow (\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2, b = \beta, c = \gamma, a = -2.\beta - 4.\gamma)$
   $\Leftrightarrow (\exists (\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2, P = a + b.X + c.X^2 = (-2.\beta - 4.\gamma) + \beta.X + \gamma.X^2) = \beta.(X - 2) + \gamma.(X^2 - 4))$
   $\Leftrightarrow (P \in \text{Vect}((X^2 - 2), (X^4 - 4))$.
   Autrement dit : $H = \text{Vect}(P_1, P_2)$, avec : $P_1 = X^2 - 2$, $P_2 = X^4 - 4$, et (P_1, P_2) libre, d'où : $\dim(H) = 2$.
   Remarques :
   - pour F_1, F_2 et G on aurait pu utiliser des hyperplans de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ (noyaux de formes linéaires non nulles),
   - pour H, on aurait aussi pu parler d'hyperplan dans $\mathbb{R}_2[X]$ (noyau de la forme linéaire : $P \mapsto P(2)$), ou dire que :

   $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], (P \in H) \Leftrightarrow ((X - 2) \text{ divise } P) \Leftrightarrow (\exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 2).Q)$,
   ce qui aurait conduit « naturellement » à la base : $(X - 2, X.(X - 2)) = (X - 2, X^2 - 2.X)$, de H.
   - il n'y a pas unicité de base dans un espace vectoriel.

2. La famille (sin,cos) est naturellement une famille génératrice de : F = Vect(sin,cos).
   De plus : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

   $(\lambda.\sin + \mu.\cos = 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda.\sin(x) + \mu.\cos(x) = 0) \Rightarrow$ (pour : $x = 0$, $\lambda.1 = 0$, et pour : $x = \frac{\pi}{2}$, $\mu.1 = 0$)

   $\Rightarrow (\lambda = \mu = 0)$,
   et la famille (sin, cos) est libre.
   Donc c'est une base de F, et : $\dim(F) = 2$.

3. Soit : $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, tel que : $\lambda_1.(e_1+a) + \ldots + \lambda_p.(e_p+a) = 0$.
   On en déduit : $\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p).a = 0$.
   Distinguons alors deux cas :

• $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p \neq 0$, et dans ce cas : $a = -\frac{1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_p}.(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p)$, ce qui n'est pas possible puisque a n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$,
• $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 0$, et dans ce cas : $\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_p.e_p = 0$, mais la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ étant libre, on en déduit : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
Conclusion : la famille proposée est libre.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

4. En travaillant comme dans l'exercice 1, on obtient pour base de F la famille : $u_1 = (2, -1, -1)$.
Pour G on propose naturellement (u_2, u_3), avec : $u_2 = (0, 1, -1)$, et : $u_3 = (1, 1, 1)$, qui est bien génératrice de G, et libre comme le montre rapidement l'étude d'une combinaison linéaire nulle.
Plusieurs méthodes alors sont possibles, la plus rapide étant sans doute de dire qu'ils sont supplémentaires si et seulement si on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en réunissant ces deux bases.
Or cette réunion est formée de 3 vecteurs (la dimension de $\mathbb{R}^3$) et elle est libre, soit comme le montre à nouveau l'étude d'une combinaison linéaire nulle, l'étude du rang de la famille ou le déterminant des coordonnées des trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Par exemple : $rg(u_1, u_2, u_3) = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$.
Les sous-espaces vectoriels F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, soit : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

5. On commence par exemple par vérifier si (u,v,w) est libre et forme une base de F :
$$rg(u,v,w) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$
La famille est de rang 2, donc : dim(F) = 2, et on a trouvé une nouvelle famille génératrice de F, avec les vecteurs : u' = u, $v' = 4.e_2 - e_3$.
Notons que si la famille avait été libre, on aurait eu : dim(F) = 3, et dim(G) = 1 : les sous-espaces n'auraient pas pu être supplémentaires.
Si maintenant on réunit les deux bases de F et de G (x est une base de G puisque non nul, donc formant une famille libre et génératrice de G), on étudie le rang de cette famille, et :
$$rg(u', v', w) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = 3.$$
La famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

6. Deux questions très classiques : on va procéder avec une analyse-synthèse.
• Soit : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On veut montrer que A se décompose de façon unique en : M = S + A, où S est symétrique et A antisymétrique.
On suppose dans un premier temps (analyse) que A et S répondent au problème et dans ce cas :
${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$, donc : $M + {}^tM = 2.S$, et : $S = \frac{1}{2}.(M + {}^tM)$, puis : $A = M - S = \frac{1}{2}.(M - {}^tM)$.
Donc s'il y a une solution, elle est unique et est donnée par les égalités précédentes : fin de l'analyse.
Réciproquement, le couple trouvé convient car :
S est symétrique : ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = S$,
A est antisymétrique : ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = -A$,
leur somme fait bien M : S + A = M.
Conclusion : le couple trouvé convient pour M, et toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose bien de façon

unique comme somme d'un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve finalement que :
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Remarque : on aurait pu utiliser le fait que l'intersection était réduite à {0} et que la somme de leurs dimensions donnait : $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
• De même, si on suppose qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose sous la forme : f = p + i, avec p paire et i impaire, alors :
$\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) = p(x) + i(x), puis : f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) – i(x), d'où :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{2}.(f(x) + f(-x))$, et : $i(x) = \frac{1}{2}.(f(x) - f(-x))$.
D'où unicité d'une éventuelle solution : fin de l'analyse.
Réciproquement, on vérifie que :
p est bien paire,
i est bien impaire,
leur somme donne bien f.
Comme précédemment, on conclut que les espaces proposés sont bien supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Remarque : un argument de dimension est ici inenvisageable.

7. Puisqu'on dispose déjà d'une base pour E et F (famille génératrice à 1 seul vecteur non nul, donc libre), on peut chercher tout d'abord une base de G.
Pour cela (voir exercice 1), on peut proposer : $e_3 = (-3, -2, 1, 0)$, et : $e_4 = (-1, 0, 0, 1)$.
On pose ensuite : $e_1 = (0,1,0,2)$, $e_2 = (1,2,-1,0)$, et on examine si la famille (e_i) est une base de $\mathbb{R}^4$.
Or cette famille étant formée de quatre vecteurs, on s'intéresse à sa liberté, donc à son rang, et :
$$rg((e_2,e_1,e_3,e_4)) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ et :}$$
$$rg((e_2,e_1,e_3,e_4)) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 .$$
Puisque la famille réunie est une base de $\mathbb{R}^4$, on a donc : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$.

8. Ici la dimension de l'espace global n'est pas finie.
On cherche donc à montrer que tout élément de : $E = C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, se décompose de façon unique suivant F et G, et pour cela, soit : $\varphi \in E$.
Si φ peut se décomposer en : $\varphi = f + g$, avec : $f \in F$, et : $g \in G$, alors :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) + a.x + b$, et : $\varphi(0) = f(0) + b = b$, puis : $\varphi'(0) = f'(0) + a = 0$.
Autrement dit : $g(x) = \varphi'(0).x + \varphi(0)$, et : $f(x) = \varphi(x) - \varphi'(0).x - \varphi(0)$.
Il y a donc unicité d'une éventuelle solution.
Réciproquement, cet unique candidat convient.
En effet :
• $f(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$, $f'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0$,
• g est affine,
• on a bien : $\varphi = f + g$.
Donc : $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.
Remarque : il est immédiat que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Applications linéaires, projecteurs.

9. • Soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.
[⇒] si : $u^2 = 0$, alors : $\forall y \in Im(u)$, $\exists x \in E$, $y = u(x)$, et : $u(y) = u^2(x) = 0$.
donc : $Im(u) \subset \ker(u)$.
[⇐] si : $Im(u) \subset \ker(u)$, alors : $\forall x \in E$, $u^2(x) = u(u(x))$.
or : $u(x) \in Im(u)$, donc : $u(x) \in \ker(u)$, et : $u(u(x)) = 0$.
on a donc bien : $u^2 = 0$.
• Dans le cas de deux endomorphismes f et g de E, l'équivalence demandée se démontre formellement de

la même façon.

10. Si on développe, pour : $k \in \mathbb{N}^*$, le produit : $g_k = (id_E - f)o(id_E + f + \ldots + f^{k-1})$, on obtient : $g_k = id_E - f^k$.
Donc pour : $k = n$, on obtient : $g_n = id_E$.
On vérifie de même que : $(id_E + f + \ldots + f^{n-1})o(id_E - f) = id_E$, donc $(id_E - f)$ est bien inversible et son inverse vaut : $(id_E - f)^{-1} = id_E + f + \ldots + f^{n-1})$.

11. Puisque E est de dimension finie, le théorème du rang donne :
$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = n$,
$\dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\ker(g)) + \mathrm{rg}(g) = n$.
De plus le théorème des quatre dimensions donne aussi :
$n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$,
$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g))$.
Si on ajoute les deux dernières égalités, cela donne :
$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 2.n$.
Donc : $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0$,
et comme les dimensions sont des entiers positifs, on aboutit à :
$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0$.
Donc ces intersections sont réduites à $\{0\}$, et les sous-espaces vectoriels Im(f) et Im(g) d'une part, et ker(f) et ker(g) d'autre part sont supplémentaires dans E.

12. La relation proposée s'écrit aussi : $fo(f + g) = id_E$.
Or puisqu'on est dans un espace de dimension finie, cela garantit que f est inversible et que son inverse vaut : $f^{-1} = f + g$.
Donc : $(f + g)of = id_E = f^2 + gof$, et comme cela vaut aussi : $f^2 + fog$, on en déduit que : $fog = gof$.

13. a. φ est clairement linéaire (comme le montre le cours d'analyse) et pour f dans : $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi(f)$ est dans E.
Pour ψ, il est clair également que ψ est linéaire car :
$\forall (f_1, f_2) \in E^2$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \int_0^x (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(t).dt = \lambda_1.\int_0^x f_1(t).dt + \lambda_2.\int_0^x f_2(t).dt$,
soit encore : $\psi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \lambda_1.\psi(f_1)(x) + \lambda_2.\psi(f_2)(x) = (\lambda_1.\psi(f_1) + \lambda_2.\psi(f_2))(x)$,
d'où : $\psi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) = \lambda_1.\psi(f_1) + \lambda_2.\psi(f_2)$.
De plus, si f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est encore de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Donc ψ est bien une application linéaire de E dans E.

b. Pour cela : $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(f)(x) = \int_0^x f(t).dt$, et : $\varphi(\psi(f))(x) = f(x)$, comme dérivée en x de la fonction précédente, autrement dit : $\varphi o \psi = id_E$.
D'autre part : $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f)(x) = f'(x)$, et : $\psi(\varphi(f))(x) = \int_0^x \varphi(f)(t).dt = \int_0^x f'(t).dt = f(x) - f(0)$
Donc : $\psi o \varphi = id_E - \theta$, où θ est la forme linéaire définie par : $\forall f \in E$, $\theta(f) = f(0)$.

c. La relation : $\varphi o \psi = id_E$, montre que ψ est injective ($\psi(f) = 0 \Rightarrow \varphi(\psi(f)) = 0 = f$), et que φ est surjective.
Donc : $\mathrm{Im}(\varphi) = E$, $\ker(\psi) = \{0\}$.
Par ailleurs, il est clair que : $\forall f \in E$, $[\varphi(f) = 0) \Leftrightarrow (f' = 0) \Leftrightarrow (f = \mathrm{cste})$, car $\mathbb{R}$ est un intervalle.
Donc : $\ker(\varphi) = \{$fonctions constantes sur $\mathbb{R}\}$.
Enfin :
si : $g = \psi(f)$, avec : $(f,g) \in E^2$, alors : $g(0) = 0$,
si : $g(0) = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x g'(t).dt$, et donc : $g = \psi(g')$,
Donc : $\mathrm{Im}(\psi) = \{g \in E, g(0) = 0\}$.

Matrices.

14. On commence par remarquer que la famille proposée est bien libre dans $\mathbb{R}_3[X]$, puisque les polynômes sont échelonnés en degrés.
D'autre part, cette famille comporte 4 vecteurs, donc c'est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour obtenir la première matrice demandée, on exprime les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$, et on écrit ces coordonnées en colonnes :

mat($\mathscr{B}$,$\mathscr{B}$') = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: on voit apparaître les coefficients du binôme de Newton…

Pour la matrice de passage inverse, plusieurs solutions : on calcule l'inverse la matrice précédente (plusieurs méthodes ont été vues en sup), ou on exprime les vecteurs de $\mathscr{B}$ à partir de ceux de $\mathscr{B}$'.

Cela peut se faire avec : ∀ 0 ≤ k ≤ n, $X^k = ((X+1)-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} .(-1)^{k-i}.(X+1)^i$, et la matrice cherchée vaut : mat($\mathscr{B}$',$\mathscr{B}$) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : cette méthode se généralise à $\mathbb{R}_n[X]$ avec les bases qu'on imagine.

15. a. Immédiatement : $A^2 - 4.A + I_2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On en déduit que : $A.(4.I_2 - A) = I_2$, et A est bien inversible, avec : $A^{-1} = 4.I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c. Commençons par : k ∈ ℕ., et démontrons-le par récurrence.
La propriété est vraie pour : k = 0, et k = 1, puisque : $A^0 = I_2$, et : $A^1 = A$.
Si maintenant, on la suppose vraie pour un entier k donné, soit : $A^k = a_k.A + b_k.I_2$, alors :
$A^{k+1} = a_k.A^2 + b_k.A = a_k.(4.A - I_2) + b_k.A = (4.a_k + b_k).A - a_k.I_2 \in \text{Vect}(I_2,A)$,
ce qui termine la récurrence.
Pour k entier strictement négatif, on a : $A^k = A^{-p} = (A^{-1})^p = (4.I_2 - A)^p \in \text{Vect}(I_2,A)$, avec ce que l'on vient de démontrer (on a ici posé : p = -k).

Remarques pour les 5/2 :

• vous aurez peut-être reconnu le polynôme caractéristique de A et le théorème de Cayley-Hamilton,
• on aurait pu utiliser le polynôme annulateur pour A : $P = X^2 - 4.X + 1$, puis se servir de la division euclidienne de X^k par P : $X^k = P.Q_k + R_k = P.Q_k + (\alpha_k.X + \beta_k)$, pour obtenir : $A^k = \alpha_k.A + \beta_k.I_2$,
• le résultat suivant se généralise à toute matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: ∀ k ∈ ℕ, $A^k \in \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$, toujours avec le théorème de Cayley-Hamilton.

16. a. On peut trouver le noyau de f en résolvant le système : A.X = 0 (qui traduit matriciellement la relation : f(x) = 0).
On trouve : ker(f) = Vect(0, 1, -1).
Le théorème du rang garantit alors que : rg(f) = 3 – dim(ker(f)) = 2.
Or on sait aussi qu'on dispose d'une famille génératrice de Im(f), donnée par les images des vecteurs de la base canonique par f, et ces images se « lisent » directement dans la matrice :
$f(e_1) = e'_1 = (1, 0, 0)$, $f(e_2) = e'_2 = (2, -1, 0)$, $f(e_3) = e'_3 = (2, -1, 0)$.
Et comme il suffit donc d'avoir une famille libre de deux vecteurs de Im(f) pour en former une base, on peut par exemple proposer pour base de Im(f) la famille (e'_1, e'_2).

b. Puisqu'on dispose d'une base de ker(f) et d'une base de Im(f), il suffit d'examiner si la famille obtenue en les réunissant est une base de $\mathbb{R}^3$, et donc si c'est une famille libre.
On peut alors faire un calcul de rang : $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, puisque la matrice est triangulaire.
Donc on a bien : $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.
On peut vérifier que : $A^2 \neq A$, donc f n'est pas un projecteur (ou : $f(e'_2) \neq e'_2$, alors que e'_2 étant dans l'image de f, il devrait être invariant par f si f était un projecteur).

Remarque : les 5/2 ont peut-être remarqué que : rg(A) ≠ tr(A), donc A (ou f) n'est pas un projecteur.

c. On en a déjà parlé : rg(f) = rg(A) = 2.
Quant à ce qui était prévisible, beaucoup de choses ont déjà été dites ici à ce propos.

17. L'application u fait bien correspondre à une matrice 2x2 une autre matrice 2x2 à coefficients réels.
Puis : $\forall$ (X, X') $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $\forall$ $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$, u(λ.X + λ'X') = (λ.x + λ'.X').A = λ.X.A + λ'.X'.A = λ.u(X) + λ'.u(X').
Donc u est bien un endomorphisme de E.

On peut ensuite chercher le noyau de u en posant : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et en résolvant : X.A = 0.

Plus proprement :

$\forall$ X $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, (X.A = 0) $\Leftrightarrow$ (a + 2.b = 0, et : c + 2.d = 0) $\Leftrightarrow$ ($X = \begin{pmatrix} -2.b & b \\ -2.d & d \end{pmatrix} = b.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$).

D'où on déduit : ker(u) = Vect(A_1, A_2), avec : $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le théorème du rang donne alors : dim(Im(u)) = 4 – 2 = 2.

Enfin, si on calcule u($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) et u($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), on obtient deux éléments de Im(u) : $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, qui forment clairement une famille libre, et donc une base de Im(u).

Enfin la matrice représentative cherchée est une matrice 4x4 dont on vient d'obtenir deux colonnes.

En effet, pour la déterminer, on calcule u($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), u($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), u($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) et u($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), et on place les coordonnées dans la base canonique des images obtenues en colonnes dans la matrice, soit :

mat(u, $\mathcal{B}_c$) = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où la dernière matrice est écrite par blocs.

18. Pour la matrice proposée, on a donc : $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis : $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis :

$(A + I_3)^3 = 0$.
En développant, on constate alors que : $A^3 + 3.A^2 + 3.A + I_3 = 0$, soit : $A.(- A^2 – 3.A – 3.I_3) = I_3$.

Autrement dit, A est bien inversible et : $A^{-1} = (- A^2 – 3.A – 3.I_3) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Si au plus une de ces matrices était non inversible, les deux autres seraient, elles, inversibles donc l'une au moins, de A ou de C le serait.
En multipliant à gauche ou à droite (selon le cas) par A^{-1} ou C^{-1}, on aboutirait à un produit des deux matrices restantes égal à 0, par exemple : B.C = 0.
Mais l'une encore est inversible (par exemple B) et en multipliant par son inverse B^{-1}, on obtient que la dernière matrice est nulle (ici ce serait : C = 0), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de l'énoncé.
Donc au moins deux des matrices A, B et C ne sont pas inversibles.

20. Procédons par analyse-synthèse.
Si une telle base existe, alors elle est formée de r premiers vecteurs et (n – r) autres.
Ces derniers vecteurs doivent être dans le noyau, puisque la lecture de la matrice montre que leur image par f est nulle.
D'autre part, toute image de vecteur s'exprime à l'aide des r premiers (car les autres lignes de la matrice sont nulles).
On doit donc prendre les r premiers vecteurs dans Im(f), les (n – r) derniers dans ker(f).
Et c'est tout : fin de l'analyse.
Soit maintenant une base $\mathcal{B}$ de E formée de r vecteurs de Im(f) et de (n – r) vecteurs de ker(f).

Une telle base existe puisque : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$, et : $r = \dim(\mathrm{Im}(f))$.
Alors les derniers vecteurs ont pour image 0, et les premiers ont une image dans Im(f), donc combinaison linéaire de ces mêmes r premiers vecteurs, autrement dit : $\mathrm{mat}(f,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où : $A' \in \mathscr{M}_r(\mathbf{K})$.

Reste à montrer que A' est inversible, c'est-à-dire : $A' \in Gl_r(\mathbf{K})$.

Or, en oubliant les lignes ou colonnes nulles, on a : $r = rg(f) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} A' & 0 \end{pmatrix} = rg(A')$.

Donc A' est bien inversible.

21. On peut essayer une analyse-synthèse, mais on peut commencer par remarquer que :
$(u^2 = 0) \Rightarrow (\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u))$ (voir exercice 9).
Or : $rg(u) \geq 1$, puisque : $u \neq 0$.
Mais on ne peut avoir : $rg(u) \geq 2$, sinon on aurait aussi : $\dim(\ker(u)) \geq 2$, du fait de cette inclusion.
Or le théorème du rang donne : $rg(u) + \dim(\ker(u)) = 3$.
Donc : $rg(u) = 1$, et : $\dim(\ker(u)) = 2$ (toujours le théorème du rang).
• Si maintenant une telle base existe (notons-la : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$), alors :
$u(e_2) = u(e_3) = 0$, et : $u(e_1) = e_2$.
Donc e_2 est à la fois dans Im(u) et dans ker(u).
• Soit donc (« réciproquement », « synthèse »…) e_2 dans Im(u), non nul.
Il existe un tel vecteur puisque : $u \neq 0$.
Etant dans Im(u), e_2 a un antécédent qu'on va appeler e_1.
Soit enfin e_3 qui complète e_2 en une base de ker(u).
Montrons que la famille ainsi formée convient :
Tout d'abord, elle comporte bien trois vecteurs.
Puis si : $\alpha_1.e_1 + \alpha_2.e_2 + \alpha_3.e_3 = 0$, en composant par u : $\alpha_1.e_2 = 0$, d'où :$\alpha_1 = 0$, puisque : $e_2 \neq 0$.
Ensuite, on revient à : $\alpha_2.e_2 + \alpha_3.e_3 = 0$, et la famille (e_2, e_3) étant une base de ker(u), elle est libre donc : $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
La famille proposée est bien une base de E.
Enfin la matrice de u dans cette base vaut (on a tout fait pour) : $\mathrm{mat}(u,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. a. Procédons par analyse-synthèse.
Analyse : si une telle base existe (notons-la : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$), alors : $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 0$.
En particulier : $e_3 = f^2(e_1)$, et tous ces vecteurs sont non nuls (puisque vecteurs d'une base de E).
Donc : $e_1 \notin \ker(f^2)$.
Synthèse : soit un vecteur en dehors de $\ker(f^2)$ (il en existe puisque : $f^2 \neq 0$).
Appelons ce vecteur e_1, et posons : $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$.
Alors la famille ainsi formée répond au problème.
En effet :
• elle est composée de trois vecteurs,
• elle est libre car si : $\alpha_1.e_1 + \alpha_2.e_2 + \alpha_3.e_3 = 0$, en composant par f^2, on obtient :
$\alpha_1.f^2(e_1) + \alpha_2.f^3(e_1) + \alpha_3.f^4(e_1) = 0 = \alpha_1.f^2(e_1)$, soit : $\alpha_1 = 0$, puis en composant du début par f :
$\alpha_2.f^2(e_1) + \alpha_3.f^3(e_1) = 0 = \alpha_2.f^2(e_1)$, soit : $\alpha_2 = 0$, et enfin en revenant au début :
$\alpha_3.e_3 = \alpha_3.f^2(e_1) = 0$, d'où : $\alpha_3 = 0$.
• la matrice de f dans cette base est bien : $\mathrm{mat}(f,\mathscr{B}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on a tout fait pour).

b. Soit : $g \in \mathscr{L}(E)$, et notons B sa matrice représentative dans la base précédente : $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$.
Alors : $(g\circ f = f\circ g) \Leftrightarrow (B.A = A.B) \Leftrightarrow (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = 0,\ b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3},\ b_{2,1} = b_{3,2})$

$\Leftrightarrow (B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{1,1} & 0 \\ b_{3,1} & b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$ (B $\in$ Vect($\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$))

Or : mat(f^2,$\mathscr{B}$) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc : (gof = fog) $\Leftrightarrow$ (B $\in$ Vect(mat(id_E,$\mathscr{B}$), mat(f,$\mathscr{B}$), mat(f^2,$\mathscr{B}$))) $\Leftrightarrow$ (g $\in$ Vect(Id_E, f, f^2)).

c. Le résultat est alors le suivant :

« soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : f $\in \mathscr{L}$(E), tel que : $f^{n-1} \neq 0$, $f^n = 0$.

Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : mat(f,$\mathscr{B}$) = $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

De plus, on a l'équivalence : $\forall$ g $\in \mathscr{L}$(E), (fog = gof) $\Leftrightarrow$ (g $\in$ Vect(id_E, f, …, f^{n-1}).

Remarques :

- on aurait pu compléter cet exercice en remarquant que : dim(Vect(id_E, f, f^2)) = 3 (n dans le cas général).
- l'ensemble des g qui commutent avec f s'appelle le « commutant de f » et se note parfois Com(f).

23. a. Soit un tel vecteur colonne X et i_0 défini comme suggéré, à savoir tel que : $|x_{i_0}| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Alors : $x_{i_0} \neq 0$, sinon on aurait : X = 0.

Si on écrit la ligne i_0 du produit matriciel : A.X = 0, cela donne : $\sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k}.x_k = 0$, et en particulier :

$a_{i_0}.x_{i_0} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0,k}.x_k$, d'où : $a_{i_0} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0,k}.\frac{x_k}{x_{i_0}}$, puis avec l'inégalité triangulaire :

$|a_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0,k}.\frac{x_k}{x_{i_0}} \right| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,k}|.\left|\frac{x_k}{x_{i_0}}\right| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,k}|$, la dernière inégalité découlant de la définition de i_0.

Or le résultat obtenu contredit l'hypothèse faite sur la matrice.

b. On ne peut donc pas trouver : X $\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, X $\neq$ 0, tel que : A.X = 0.

Formulé autrement (contraposée), cela donne : $\forall$ X $\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, (A.X = 0) $\Rightarrow$ (X = 0).

Autrement dit, la matrice A est inversible.

On peut pour s'en convaincre dire que l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A vérifie :

$\forall$ x $\in \mathbb{C}^n$, u(x) = 0) $\Rightarrow$ (u = 0), donc : ker(u) = {0},

et en dimension finie, l'injectivité d'un endomorphisme entraîne sa bijectivité donc l'inversibilité de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de l'espace.

Trace.

24. a. Il suffit, pour : (f,g) $\in \mathscr{L}(E)^2$, de noter A et B leurs matrices représentatives dans une base de E.

Alors dans cette base, fog est représenté par A.B et gof par B.A.

Enfin : tr(fog – gof) = tr(A.B – B.A) = 0.

b. Le résultat n'est pas tout à fait vrai.

En effet, dans un tel espace de dimension n, on a :

$\forall$ (f,g) $\in \mathscr{L}(E)^2$, tr(fog – gof) = 0, et : tr(id_E) = tr(I_n) = n.

Donc si un tel couple existe, on a : n = 0.

Réciproquement, dans l'espace {0}, alors on a bien : $id_E o id_E - id_E o id_E = 0$, puisqu'alors : $id_E = 0$.

En dehors de ce cas passionnant, c'est effectivement impossible.

25. a. Si X est solution alors : X = B – tr(X).A, et donc X est bien de la forme annoncée, avec : λ = tr(X) $\in$ **K**.
 b. Supposons que : tr(A) $\neq$ -1.
 Alors si X est solution, on a :
 tr(X + tr(X).A) = tr(B), donc : tr(X).[1 + tr(A)] = tr(B), d'où : $tr(X) = \dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}$.
 Donc X ne peut valoir que : $X = B - \left(\dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}\right).A$.
 Réciproquement, montrons que cet unique candidat est bien solution du problème.
 Pour cela : $tr(X) = tr(B) - \left(\dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}\right).tr(A) = tr(B).\left[1 - \dfrac{tr(A)}{1+tr(A)}\right] = \dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}$, d'où :
 $X + tr(X).A = \left[B - \left(\dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}\right).A\right] + \left(\dfrac{tr(B)}{1+tr(A)}\right).A = B$, et X est bien l'unique solution du problème.
 c. Supposons maintenant que : tr(A) = -1.
 De même si X est solution du problème, alors on a toujours :
 tr(X + tr(X).A) = tr(B), donc : tr(X).[1 + tr(A)] = tr(B), et donc : tr(B) = 0.
 Deux possibilités alors :
 - si : tr(B) $\neq$ 0, alors l'équation n'a pas de solution.
 - si : tr(B) = 0, montrons que toute matrice obtenue à la question a est solution.

 Pour cela, si : X = B + λ.A, alors : tr(X) = tr(B) + λ.tr(A) = -λ, et :
 X + tr(X).A = [B + λ.A] – λ.A = B,
 et X est bien solution de l'équation, qui admet donc une infinité de solutions.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

26. a. Si D n'est pas incluse dans H, alors : H + D $\neq$ H, car sinon on aurait :
 $\forall$ x $\in$ D, x = 0 + x $\in$ (H + D), donc : x $\in$ H, et on aurait : D $\subset$ H.
 Donc (H + D) contient H mais n'est pas égal à H et : dim(H + D) > dim(H), d'où : dim(H + D) = n.
 Donc : H + D = E.
 Comme de plus : dim(H) + dim(D) = (n – 1) + 1 = n, H et D sont bien supplémentaires dans E.
 b. Si H et D sont supplémentaires dans E, alors : H $\cap$ D = {0}, et : D $\not\subset$ H.

Calcul de déterminants.

27. On peut commencer par remplacer les colonnes C_2 et C_3 par $C_k – C_1$, pour : k = 2, 3.
 On factorise ensuite avec :
 $\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right).\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$, et : $\tan(p) - \tan(q) = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p).\cos(q)}$,
 et on développe par rapport à la première ligne, ce qui donne :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) & \tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right) & \tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2.\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right) & -2.\sin\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right) \\ \dfrac{\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} & \dfrac{\sin\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \end{vmatrix}.$$

 On factorise ensuite dans la première et la deuxième ligne, la première et la deuxième colonne, et :

$$D = -2.\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right).\sin\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right).\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}.\begin{vmatrix} \sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right) \\ \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)} & \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)} \end{vmatrix} = C.\left[\dfrac{\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}\right],$$

 où C est le coefficient factorisé.
 On termine en remarquant que : $\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$, ainsi que la formule similaire pour

l'autre terme.
D'où : $D = C.[1-1] = 0$.

28. On commence par additionner toutes les colonnes à la première, puis on soustrait la première ligne à toutes les autres, d'où :

$$D = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z).\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z).\begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix}.$$

Pour ce nouveau déterminant, on remplace C_2 par $C_2 + C_1$, et C_3 par $C_3 + C_1$, d'où :

$$D = (x+y+z).\begin{vmatrix} -x & z-y-x & y-z-x \\ z-x & -y+z-x & 0 \\ y-x & 0 & -z+y-x \end{vmatrix} = (x+y+z).(z-x-y).(y-z-x).\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On termine en développant le dernier déterminant et : $D = (x+y+z).(z-x-y).(y-z-x).(x-y-z)$.
L'ensemble des triplets de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : D = 0, est donc la réunion de quatre plans, donnés par les équations : x + y + z = 0, x – y – z = 0, y – z – x = 0, z – x – y = 0.

29. Pour le premier déterminant, on peut remplacer chaque colonne C_k par $C_k - C_1$, et :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!\ \text{(il est triangulaire inférieur).}$$

Pour le deuxième déterminant, on remplace la première colonne par $C_1 - (C_2 + \ldots + C_n)$, et :

$$\det\begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (2-n).a & a & \cdots & \cdots & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (2-n).a^n\text{, (triangulaire supérieur).}$$

Pour le troisième déterminant, on remplace d'abord C_1 par $C_1 + C_n$, puis L_n par $L_n + L_1$, et :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe alors suivant la première colonne puis suivant la dernière ligne, et : $\forall$ n ≥ 3, $D_n = D_{n-2}$.
On en déduit que :
- $\forall$ n ≥ 1, n impair, $D_n = D_1 = 0$,
- $\forall$ n ≥ 2, n pair, $D_n = D_2 = 1$.

30. a. La matrice A vaut : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

On remplace alors chaque colonne C_k par $C_k - C_{k+1}$, de la $1^{\text{ère}}$ à la $(n-1)^{\text{ème}}$.

Cela donne : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{n-1} - a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} - a_n & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_n.(a_1 - a_2)...(a_{n-1} - a_n)$.

b. Pour le premier des deux déterminants demandés (D_{max} et D_{min}), on pose : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, a_i = i.
Dans ce cas, et puisque : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n – 1, $a_i - a_{i+1} = -1$, et : $D_{max} = n.(-1)^{n-1}$.

Pour le deuxième, partons de : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, a_i = n + 1 – i, pour obtenir : $A = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Pour le calcul de det(A), on intervertit les lignes L_k et L_{n-k}, ce qui fait apparaître un certain nombre de signes -1, puis on intervertit les colonnes C_k et C_{n-k}, qui fait apparaître le même nombre de signes -1, donc globalement un nombre pair de signes -1.

Or le déterminant devient alors : det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$ = D_{min}.

Enfin : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n – 1, $a_i - a_{i+1} = 1$, donc : $\det(A) = 1$, et : D_{min} = 1.

Déterminants tridiagonaux.

31. Pour le calcul de D_n, on commence par développer suivant la première ligne, ce qui fait apparaître D_{n-1} et un deuxième déterminant, que l'on développe alors suivant la première colonne et :
$D_n = (a+b).D_{n-1} - a.b.1.D_{n-2}$.
Donc la suite (D_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall$ n ≥ 3, $D_n - (a+b).D_{n-1} + a.b.D_{n-2}$.
L'équation caractéristique associée est alors : $r^2 - (a+b).r + a.b = 0$, dont les racines sont a et b.
Distinguons alors deux cas :
• si : a ≠ b, alors : $\exists$! (a,β) ∈ $\mathbf{K}^2$, $\forall$ n ≥ 1, $D_n = \alpha.a^n + \beta.b^n$.
On détermine alors α et β à l'aide de D_1 et D_2, avec :
$D_1 = a + b = \alpha.a + \beta.b$,
$D_2 = a^2 + a.b + b^2 = \alpha.a^2 + \beta.b^2$.
Après résolution du système (dans le cas où a et b sont non nuls), on obtient : $\alpha = \dfrac{a}{a-b}$, $\beta = \dfrac{b}{b-a}$.
D'où : $\forall$ n ≥ 1, $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$, et si a ou b est nul, ce résultat est encore valable (le déterminant est alors triangulaire inférieur).
• si : a = b, alors : $\exists$! (α,β) ∈ $\mathbf{K}^2$, $\forall$ n ≥ 1, $D_n = (\alpha + \beta.n).a^n$.
Alors avec à nouveau D_1 et D_2 (et en distinguant au besoin le cas où a est nul), on obtient : α = β = a, soit :
$\forall$ n ≥ 1, $D_n = (n + 1).a^n$.
Pour le calcul de Δ_n, on pose : $a = e^{i.\alpha}$, et : $b = e^{-i.\alpha}$, et on distingue à nouveau deux cas :
• si : $e^{i.\alpha} = e^{-i.\alpha}$, alors : $\forall$ n ≥ 1, $D_n = (n + 1).a^n$, c'est-à-dire :
si : α = 0 (mod 2.π), $\forall$ n ≥ 1, D_n = (n + 1),
si : α = π (mod 2.π), $\forall$ n ≥ 1, $D_n = (n + 1).(-1)^n$.
• si : $e^{i.\alpha} \neq e^{-i.\alpha}$, alors : $\forall$ n ≥ 1, $D_n = \dfrac{e^{i.(n+1).\alpha} - e^{-i.(n+1).\alpha}}{e^{i.\alpha} - e^{-i.\alpha}} = \dfrac{\sin((n+1).\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

Déterminant de Vandermonde.

32. a. Si on développe P_n suivant la dernière ligne, on constate qu'on obtient une somme de termes, chacun étant un produit comportant un signe, un terme type X^k, et un déterminant extrait, indépendant de X.
Donc P_n est un polynôme à coefficient dans **K** de degré au plus n – 1.
b. Si deux des x_i sont égaux, deux lignes dans V_n sont égales et donc : $V_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

c. Il est clair que si on évalue P_n en une valeur x_k avec : $1 \leq k \leq n-1$, alors : $P_n(x_k) = 0$, puisque le déterminant comporte alors deux lignes égales.
Donc les x_k étant distincts 2 à 2, on peut écrire : $P_n = C.(X - x_1)\dots(X - x_{n-1})$, où C est une constante.
Enfin, C est le coefficient de X^{n-1} qui est donc le déterminant extrait obtenu dans le développement de la question a, soit : $C = V_{n-1}(x_1, \dots, X_{n-1})$.

d. On a donc (toujours si les x_k sont distincts 2 à 2) : $P_n = (X - x_1)\dots(X - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Donc on en déduit que : $V_n(x_1,\dots,x_n) = (x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Et si deux des x_k sont égaux, alors les deux côtés de l'égalité sont nuls : elle est donc valable pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.
On en déduit alors par récurrence que : $V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

e. Pour retrouver directement la relation précédente, on effectue dans $V_n(x_1,\dots,x_n)$ les opérations suivantes : on remplace chaque colonne C_k par $C_k - x_n.C_{k-1}$, pour k de n à 2 (dans cet ordre).

Cela donne : $V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} - x_n.x_1^{n-2} \\ \vdots & x_2 - x_n & & & x_2^{n-1} - x_n.x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & \cdots & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n.x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & 0 \end{vmatrix}$.

On développe alors suivant la dernière ligne puis on factorise sur chaque ligne par $(x_k - x_n)$.
Cela donne : $V_n(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n+1}.(x_1 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n).V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})$, soit la même relation que celle obtenue à la question d puisque : $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$, que l'on distribue sur chaque terme du produit.

Déterminants par blocs.

33. Si on calcule le produit M.N, on obtient : $M.N = \begin{pmatrix} B.C - A.D & B \\ -C.D + D.C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B.C - A.D & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
Puisque la matrice obtenue est triangulaire supérieure par blocs, on obtient :
$\det(M.N) = \det(B.C - A.D).\det(D) = (-1)^n.\det(A.D - B.C).\det(D)$.
De plus : $\det(N) = \det(-D) = (-1)^n.\det(D)$.
Donc puisque D est inversible, on a : $\det(D) \neq 0$, et donc on peut simplifier pour aboutir à :
$\det(M) = \det(A.D - B.C)$.

34. Si on remplace chaque ligne du déterminant de M (de la 1ère à la nème) par : $L_k + L_{k+n}$, alors cela revient à remplacer A par A+B, et B par A+B dans ce déterminant par blocs, ce qui s'écrit : $\det(M) = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix}$.
Puis on remplace chaque colonne dans ce déterminant (de la (n+1)ème à la (2.n)ème) par : $C_k - C_{k-n}$, et :
$\det(M) = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix}$, et donc : $\det(M) = \det(A+B).\det(A-B)$, puisque le dernier déterminant obtenu est triangulaire inférieur.

Déterminants, applications linéaires.

35. On peut utiliser la méthode du pivot pour déterminer rg(A).

$$rg\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & -46 & 22 & 38 \\ 0 & -23 & 11 & 19 \\ 0 & -23 & 11 & 19 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & -46 & 22 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Donc Im(u) est de dimension 2.
Puisque les deux premières colonnes de A sont libres, elles forment une base de Im(u).
Donc : $(x,y,z,t) \in \mathrm{Im}(u)$, si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Cela équivaut à dire que tous les déterminants 3×3 extraits sont nuls, soit :

$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \end{vmatrix} = 0 = 69.x - 46.y + 23.z$, ou encore : 3.x – 2.y + z = 0,

$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 7 & -4 & y \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 46.x - 23.y + 23.t$, ou encore : 2.x – y + t = 0,

$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 23.x - 23.z + 46.t$, ou encore : x – z + 2.t = 0, et enfin :

$\begin{vmatrix} 7 & -4 & y \\ 5 & 7 & z \\ 1 & 6 & t \end{vmatrix} = 0 = 23.y - 46.z + 69.t$, ou encore : y – 2.z + 3.t = 0.

Donc : ((x,y,z,t) $\in$ Im(u)) $\Leftrightarrow$ (3.x – 2.y + z = 0, 2.x – y + t = 0, x – z + 2.t = 0, y – 2.z + 3.t = 0).

36. a. Il est immédiat que F est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est non vide puisque la fonction nulle correspond à choisir le polynôme nul, et $\mathbb{R}[X]$ étant stable par combinaison linéaire, F l'est aussi.

b. Soit : P $\in \mathbb{R}_n[X]$, alors f : x $\mapsto e^x.P(x)$.
Alors : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, f'(x) = e^x.P(x) + e^x.P'(x) = e^x.(P(x) + P'(x)), avecd : deg(P + P') $\leq$ n.
Donc la dérivation (notons la D dans F) est une application de F dans F.
De plus, il est évident qu'elle est linéaire, donc c'est bien un endomorphisme de F.
Calculons alors sa matrice dans la base « canonique » de F associée à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Notons pour cela : $\forall\ 0 \leq k \leq n$, $f_k : x \mapsto e^x.x^k$, et $\mathcal{F}$ la base de F ainsi obtenue.
Alors : $D(f_0) = f_0$, et : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $D(f_k) = f_k + k.f_{k-1}$.

Donc : mat(D,$\mathcal{F}$) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où : det(D) = 1.

Systèmes linéaires.

37. (S_1) Pour le premier système, on peut calculer le déterminant pour les trois premières équations.

Il vaut : $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2).(m-1)^2$.

• Si m est distinct de 1 et de -2, les trois premières équations admettent une unique solution qui vaut : (x,y,z) = (0, 1, 0).
Mais cette solution ne vérifie pas la dernière équation et le système complet n'a pas de solution.
• Si m vaut 1, alors le système se ramène à une unique équation : x + y + z = 1, qui admet une infinité de solutions (formant un plan affine dans $\mathbb{R}^3$).
• Si m vaut -2, alors la somme des trois premières équations donne : 0 = 0, et le système des trois premières équations sont donc compatibles qui admettent comme solutions : (x,y,z)= (x, x+1, x), x $\in \mathbb{R}$.
Comme on veut par ailleurs prendre en compte également la dernière équation, on doit aussi avoir : 3.x + 1 = -2, autrement dit : x = -1, y = 0, z = -1.

(S_2) Le deuxième système a pour déterminant :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.(a-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a).(c-b).(b-a)$, (on reconnaît un Vandermonde).

• Si a, b et c sont distincts deux à deux, alors le système admet une unique solution donnée par les formules de Cramer, donnant par exemple : x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d.(d-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.(a-1) & b.(b-1) & c.(c-1) \end{vmatrix}} = \dfrac{(c-d).(c-b).(b-d)}{(c-a).(c-b).(b-a)}$, de même pour y et z.

• Si par exemple : a = b ≠ c, alors le système se ramène à : $\begin{cases} (x+y)+z & = & 1 \\ a.(x+y)+c.z & = & d \\ a.(a-1).(x+y)+c.(c-1).z & = & d.(d-1) \end{cases}$.

On peut alors résoudre les deux premières équations et voir si la solution trouvée en : x ‘ = x + y, et z, est solution de la troisième équation.

On peut aussi travailler autrement, en posant encore : x’ = x + y, et dire que si le dernier système a une solution, alors le système : $\begin{cases} x'+z+1.(-1) & = & 0 \\ a.x'+c.z+d.(-1) & = & 0 \\ a^2.x'+c^2.z+d^2.(-1) & = & 0 \end{cases}$, a une solution non nulle (x’, z, -1).

Donc son déterminant est nul et comme c’est un Vandermonde, c’est qu’on a : a = d, ou : c = d.

On distingue alors trois sous-cas ici :

si : d ≠ a, et : d ≠ c, alors le système n’a pas de solution.

si : d = a, alors le système se ramène à : $\begin{cases} (x'-1)+z & = & 0 \\ a.(x'-1)+c.z & = & 0 \\ a^2.(x'-1)+c^2.z & = & 0 \end{cases}$, et comme : a ≠ c, ce système a une unique solution : x’ – 1 = z = 0, soit finalement (x, 1 – x, 0) pour le système initial.

si : d = c, alors le système se ramène à : $\begin{cases} x'+(z-1) & = & 0 \\ a.x'+c.(z-1) & = & 0 \\ a^2.x'+c^2.(z-1) & = & 0 \end{cases}$, et à nouveau, comme : a ≠ c, ce système a une unique solution : x’ = z – 1 = 0, soit finalement (x, -x, 1) pour le système initial.

• Si enfin : a = b = c, le système se ramène à : $\begin{cases} (x+y+z) & = & 1 \\ a.(x+y+z) & = & d \\ a.(a-1).(x+y+z) & = & d.(d-1) \end{cases}$.

Deux sous-cas se présentent :

si : a ≠ d, il n’y a pas de solution,

si : a = d, il y a un plan affine de solution, l’ensemble des triplets vérifiant : x + y + z = 1.

38. Puisque ce système est un système homogène, il y a toujours une solution qui est (0, 0, 0).
Ce système admet donc une autre solution si et seulement si ça n’est pas un système de Cramer, autrement dit si et seulement si son déterminant est nul.

Or ce déterminant vaut : det(S) = $\begin{vmatrix} 1 & -(m+1) & -1 \\ m & 2 & -(3.m+2) \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9.m^2 + 7.m + 8$.

Comme le discriminant de ce trinôme vaut -239, si on travaille dans ℝ, le système a toujours une unique solution qui est (0, 0, 0), et si on est dans ℂ, il y a deux valeurs de m qui sont : $\dfrac{-7 \pm i.\sqrt{239}}{18}$, pour lesquelles il y a d’autres solutions au système que (0, 0, 0).

Calcul de rang de matrice.

39. On peut développer det(M(α)) suivant la première ligne, et : det(M(α)) = $1 + (-1)^{n+1}.\alpha^n = 1 - (-\alpha)^n$.
Donc si : det(M(α)) $\neq$ 0, M(α) est de rang n.

Si en revanche : det(M(α)) = 0, ce qui correspond à : $\exists$ k $\in$ $\mathbb{Z}$, $\alpha = -e^{\frac{2.i.k.\pi}{n}}$, alors : rg(M($\alpha$)) < n.
Mais la sous-matrice de taille (n – 1)$\times$(n – 1) en haut à gauche extraite de M(α) est inversible (car triangulaire inférieure de déterminant égal à 1), donc M(α) est de rang au moins (n – 1).
Finalement, dans ce cas, rg(M(α)) = n – 1.