Algèbre linéaire.
Exercices 2015-2016

Niveau 1.
Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

1. Etudier si les ensembles proposés sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés.
   Si oui, en donner une base et la dimension.
   - $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$, et : $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2.x + y + z = 0\}$, dans $\mathbb{R}^3$.
   - $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + 2.y - z - t = x - y + 3.z + 2.t = 0\}$, dans $\mathbb{R}^4$.
   - $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$, dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la dimension de Vect(sin,cos).

3. Soit E un **K**-espace vectoriel, et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
   Montrer que si : $a \in E$, $a \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $(e_1+a, \dots, e_p+a)$ est libre.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.
Dans les 3 exercices suivants, indiquer si les sous-espaces vectoriels proposés sont supplémentaires.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2.x + y + z = 0\}$, et $G = \mathrm{Vect}((0,1,-1),(1,1,1))$.

5. Dans E rapporté à une base (e_1, e_2, e_3), on note :
   $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2.e_1 + 2.e_2 + e_3$, $w = 4.e_1 + 3.e_3$, $x = -e_1 + 2.e_2$,
   puis : $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$, et : $G = \mathrm{Vect}(x)$.

6. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les sous-espaces vectoriels formés des matrices symétriques et antisymétriques.
   Même question avec les fonctions paires et impaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7. Dans $\mathbb{R}^4$, soit : $E = \mathrm{Vect}((0,1,0,2))$, $F = \mathrm{Vect}((1,2,-1,0))$, $G = \{(x,y,z,t), x - y + z + t = x - 2.y - z + t = 0\}$.
   A-t-on : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?

8. Soient : $F = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$, et : $G = \{x \mapsto a.x + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Applications linéaires, projecteurs.

9. Soit : $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel quelconque.
   Montrer que : $(u^2 = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u))$.
   Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, montrer de même que: $(f \circ g = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f))$.

10. Soient E un **K**-espace vectoriel et : $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent (c'est-à-dire tel que : $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = 0$).
    Montrer que : $g = Id_E - f$, est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

11. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit : $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que : µ
    $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$.
    En travaillant sur les dimensions, montrer que les sommes précédentes sont directes.

12. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit : $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que : $f^2 + f \circ g = Id_E$.
    Montrer que f et g commutent.

13. Soit E l'espace $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
    On définit φ et ψ sur E, par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'$, et : $\psi(f) = g$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t).dt$.
    a. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
    b. Déterminer φoψ et ψoφ.
    c. Déterminer image et noyau de φ et de ψ.

Matrices.

14. On note, pour : $0 \le k \le 3$, $P_k = (X+1)^k$, puis : $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$
Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, puis celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

15. Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que : $A^2 - 4.A + I_2 = 0$.
   b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
   c. Montrer alors que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A^k \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$.

16. a. Déterminer noyau et image de f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. Sont-ils supplémentaires ?
   f est-il un projecteur ?
   c. Que dire du rang de la matrice, ou du rang de f ?
   Quels résultats étaient prévisibles ?

17. On note : $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et u, de E dans E, qui à X fait correspondre X.A.
Montrer que : $u \in \mathscr{L}(E)$, trouver son image, son noyau, et sa matrice représentative dans la base canonique de E.

18. Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer $(A + I_3)^3$, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

19. Soient : $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, non nulles avec : $n \ge 2$, vérifiant : $A.B.C = 0$.
Montrer qu'au moins deux des matrices A, B et C ne sont pas inversibles.

20. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et soit : $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathrm{mat}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice par blocs avec : $A' \in Gl_r(\mathbf{K})$, où : $r = \mathrm{rg}(f)$.

21. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension 3 et : $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $u \neq 0$, $u^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle : $\mathrm{mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension 3, et soit : $f \in \mathscr{L}(E)$, telle que : $f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$.
   a. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathrm{mat}(f, \mathscr{B}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. Monter que : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, ($gof = fog$) $\Leftrightarrow$ ($g \in \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$).
   c. Généraliser pour un espace de dimension n.

23. Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit : A = ($a_{i,j}$) ∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : ∀1 ≤ i ≤ n, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$.

a. En utilisant : X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, X ≠ 0, A.X = 0, et i_0 tel que : $|x_{i_0}| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, aboutir à une contradiction.

b. En déduire que la matrice A est inversible.

Trace.

24. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
a. Pour : (f,g) ∈ $\mathcal{L}(E)^2$, calculer tr(fog – gof).
b. En déduire que dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe pas de couple (f,g) d'endomorphismes de E tel que : fog – gof = id_E.

25. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$(**K**).
On considère l'équation : X + tr(X).A = B, d'inconnue : X ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**).
a. Montrer qu'une solution de cette équation est nécessairement de la forme : X = B + λ.A, avec : λ ∈ **K**.
b. Montrer que si : tr(A) ≠ -1, cette équation admet une solution unique que l'on précisera.
c. Montrer que si : tr(A) = -1, l'équation n'admet pas de solution ou en admet une infinité suivant la valeur de tr(B), et préciser alors ces solutions.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

26. Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un **K**-espace vectoriel E de dimension : n ∈ ℕ*.
a. Montrer que si : D ⊄ H, alors D et H sont supplémentaires dans E.
b. La réciproque est-elle vraie ?

Calcul de déterminants.

27. Montrer que si α, β, γ sont des réels entre 0 et π, de somme π, alors : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$.

28. Calculer : $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$, où : (x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$, puis déterminer : {(x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$, D = 0}.

29. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$, avec : n ∈ ℕ*,
- $\begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}_{(n)}$, avec : a ∈ ℝ,
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(n)}$.

30. Soient a_1, …, a_n des nombres complexes.
On définit la matrice A par : ∀ 1 ≤ i,j ≤ n, $a_{i,j} = a_{\max(i,j)}$.
a. Ecrire la matrice A et calculer son déterminant.
b. En déduire les déterminants $\det(\max(i,j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, et $\det(\min(i,j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Déterminants tridiagonaux.

31. Soient : $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $n \geq 2$.

Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a.b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a.b \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$, puis : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2.\cos(\alpha) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2.\cos(\alpha) \end{vmatrix}$.

Pour D_n, on distinguera les cas : $a \neq b$, et : $a = b$.

Déterminant de Vandermonde.

32. Pour : $(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose : $V_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, puis : $P_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que : $P_n \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
b. Que vaut $V_n(x_1, \ldots, x_n)$ si deux des x_i sont égaux entre eux ?
c. Dans le cas où les x_i sont distincts 2 à 2, donner une expression factorisée de P_n.
d. En déduire que : $\forall(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{K}^n$, $V_n(x_1,\ldots,x_n) = (x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}).V_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$, puis $V_n(x_1,\ldots,x_n)$.
e. Retrouver, directement à partir de l'expression de $V_n(x_1,\ldots,x_n)$ la relation de récurrence précédente.

Déterminants par blocs.

33. Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telles que C et D commutent et D est inversible.

On pose par ailleurs : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, et : $N = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

A l'aide de la matrice N, montrer que : $\det(M) = \det(A.D - B.C)$.

34. Soit : $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, et soit M définie par blocs par : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

En utilisant des combinaisons de lignes ou de colonnes, montrer que : $\det(M) = \det(A+B).\det(A-B)$.

Déterminants et applications linéaires.

35. Soit : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice représentative dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer rg(A), et donner une condition nécessaire et suffisante pour que : $(x,y,z,t) \in \mathrm{Im}(u)$.

36. Soit : $F = \{x \mapsto e^x.P(x)$, avec : $P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.
a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b. Montrer que la dérivation de fonctions est un endomorphisme de F dont on calculera le déterminant.

Systèmes linéaires.

37. Résoudre les systèmes :

$(S_1)\ \begin{cases} m.x + y + z = 1 \\ x + m.y + z = m \\ x + y + m.z = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$; $(S_2)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ a.x + b.y + c.z = d \\ a.(a-1).x + b.(b-1).y + c.(c-1).z = d.(d-1) \end{cases}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

38. Peut-on trouver des valeurs de m, pour lesquelles le système admet d'autres solutions que (0,0,0) ?

$$\begin{cases} x-(m+1).y-z & = & 0 \\ m.x+2.y-(3.m+2).z & = & 0 \\ 2.x-3.y+3.z & = & 0 \end{cases}.$$

Calcul de rang de matrice.

39. Pour : n ∈ ℕ*, et : α ∈ ℂ, on note : $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer det(M(α)), et en déduire rg(M(α)), suivant la valeur de α.

__Niveau 2.__

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

40. Dans : E = $\mathscr{F}$(ℝ,ℝ), on note f_n la fonction : $f_n(x) = \sin(x+n)$, et : $F_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots , f_n)$.
Déterminer, pour tout n, $\dim(F_n)$.

41. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathscr{F}$( ]-1,1[,ℝ) engendré par les fonctions définies par :
∀ x ∈]-1,1[, $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f_2(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_4(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

42. Montrer que : Vect(sin,cos) ⊕ {f ∈ E, f(0) = f(π/2) = f(π)} = C^0([0,π],ℝ).

43. Dans ℝ[X], F = $\mathbb{R}_2$[X], G = {P ∈ ℝ[X], P(a) = P'(a) = 0}, où a est un réel donné sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

44. Soit : E = C^∞(ℝ,ℝ), et u qui à f fait correspondre f''.
a. Déterminer Im(u) et ker(u).
b. A-t-on : E = Im(u) ⊕ ker(u) ?

45. Soit : n ∈ ℕ*, et Δ (dérivée discrète), l'application de $\mathbb{R}_n$[X] dans ℝ[X] définie par :
∀ P ∈ $\mathbb{R}_n$[X], Δ(P) = P(X+1) – P(X).
a. Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n$[X], que l'on notera Δ_n.
b. Montrer que : $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'ordre n+1).
c. En déduire qu'il existe des constantes $a_0, \dots, a_{n+1}$ (que l'on déterminera) telles que :
∀ P ∈ $\mathbb{R}_n$[X], $\sum_{k=0}^{n+1} a_k.P(X+k)=0$.

46. Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E.
On suppose que pour tout élément x de E, (x,f(x)) est une famille liée.
Montrer que f est une homothétie.
Remarque : en dimension finie, on pourra utiliser une base de l'espace.

47. Soit : E = $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et soit p, qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par :
$v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, ∀ n ∈ ℕ, $v_{n+2} = v_{n+1} + 6.v_n$.
Montrer que p est un projecteur de E.

48. Soient f, g et h trois endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E, tels que :
fog = h, goh = f, hof = g.
a. Montrer que f, g et h ont même image et même noyau.
b. Montrer que : $f^5 = f$.

c. En déduire que : E = Im(f) $\oplus$ ker(f).

49. Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E tel que : fog = id_E.
    a. Montrer que : ker(gof) = ker(f), et : Im(gof) = Im(g).
    b. Montrer que : E = ker(f) $\oplus$ Im(g).
    c. Dans quel cas peut-on conclure : g = f^{-1} ?
    d. Calculer (gof)o(gof) et caractériser gof.

50. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit : (f,g) $\in \mathscr{L}(E)^2$.
    On veut montrer que : |rg(f) – rg(g)| ≤ rg(f+g) ≤ rg(f) + rg(g).
    a. Montrer que : Im(f+g) $\subset$ Im(f) + Im(g), et en déduire la deuxième inégalité.
    b. Montrer qu'il suffit de démontrer que : (rg(f) – rg(g)) ≤ rg(f+g), pour établir la première inégalité, et la déduire de l'inégalité que l'on vient de démontrer.

51. Soient : f,g $\in \mathscr{L}(E)$, tels que : gofog = g, fogof = f.
    a. Montrer que Im(f) et ker(g) sont supplémentaires dans E.
    b. Justifier que : f(Im(g)) = Im(f).

52. Soient E un **K**-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et : u $\in \mathscr{L}(E)$.
    a. Montrer que : $u^{-1}(u(F))$ = F + ker(u).
    b. Exprimer de même $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de Im(u).
    c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $u^{-1}(u(F)) = u(u^{-1}(F))$.

Matrices.

53. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension 4 et soit f dans $\mathscr{L}(E)$, tel que : $f^2 = 0$.
    Que peut-on dire de rg(f) ?
    Montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est 'simple'.

54. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : u $\in \mathscr{L}(E)$.
    a. Montrer que : ker(u) = Im(u), si et seulement si : $u^2 = 0$, et : n = 2.rg(u).
    b. Montrer que : ker(u) = Im(u), si et seulement si il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée inversible de type $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$.

55. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, et soit : f $\in \mathscr{L}(E)$, tel que : $f^2 = 0$.
    a. Que peut-on dire de Im(f) et ker(f) ?
    b. A l'aide du résultat précédent, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : mat(f,$\mathscr{B}$) = $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
    matrice définie par blocs, avec : r = rg(f).

56. On note : $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où : n $\in \mathbb{N}^*$.
    On note par ailleurs u_n, de E_n dans E_{n+1}, tel que : $u_n(P) = Q$, où : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $Q(x) = e^{x^2}.\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}.P(x)\right)$.
    Vérifier que ces données sont cohérentes, trouver Im(u_n), ker(u_n), et mat(u_n,$\mathscr{B}_n$,$\mathscr{B}_{n+1}$), où $\mathscr{B}_n$ est la base canonique de E_n.

57. Soit : n $\in \mathbb{N}^*$.
    Montrer que : $\forall$ Q $\in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists!$ P $\in \mathbb{R}_n[X]$, $Q = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$.
    Préciser P pour : n = 3, Q = X^3.

58. Soit : A $\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$.
    Calculer A^2 puis A^{-1}.

59. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A, calculer A^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
b. En déduire M^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

Calcul de déterminants.

60. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et A' déduite de A par : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a'_{i,j} = (-1)^{i+j}.a_{i,j}$.
Calculer det(A') en fonction de det(A).

61. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_{i,j} = \pm 1$.
Montrer que det(A) est un entier divisible par 2^{n-1}.

62. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que de plus : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_{i,j} \geq 0$, et : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq 1$.

Montrer à l'aide d'une récurrence que : $|\det(A)| \leq 1$.

63. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, telles que : A.B – B.A = B.
a. Montrer que : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $A.B^k = B^k.(A + k.I_n)$.
b. En déduire que : det(B) = 0.
c. Que peut-on dire de tr(B) ?

64. Soient a, b, c dans **K**, on définit les matrices carrées : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et : $M(a,b) = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$.

a. Montrer que : $x \mapsto \varphi(x) = \det(M(a,b) - x.J)$, est un polynôme en x de degré au plus 1.
En déduire dans le cas où : $a \neq b$, et après avoir calculé $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, la valeur de det(M(a,b)).
b. Montrer que : $x \mapsto \psi(x) = \det(M(a,x))$, est un polynôme en x, et donc une fonction continue de x.
En déduire la valeur de $\det(M(a,a))$, (soit $\det(M(a,b))$ lorsque : a = b).
c. Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

65. Soit : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$, pour : $n \geq 1$.

a. En écrivant la dernière colonne sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$, et à l'aide de la n-linéarité, trouver une relation entre D_n et D_{n-1}.
b. En déduire la valeur de D_n à l'aide en particulier de : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminants tridiagonaux.

66. On pose : $A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$, pour : n ≤ 1, et : x ∈ ℝ.

Calculer $\det(A_n(x))$ pour tout entier n suivant la valeur de x.

Déterminant de Vandermonde.

67. Soient $(x_1,\ldots, x_n)$ des réels, et $f_1,\ldots, f_{n-1}$, des polynômes normalisés de degrés respectifs 1, 2,…,(n – 1).

a. Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, et en déduire la valeur du déterminant.

b. Montrer que : ∀ k ∈ ℕ*, cos(k.x) est un polynôme en cos(x), de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1}, et en déduire la valeur de : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix}$, où : $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Déterminants, applications linéaires et matrices.

68. Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, telle que : $f(X) = {}^tX$.

a. Calculer det(f).

b. Pouvait-on prévoir sa valeur ? ou que ce déterminant serait non nul ?

69. Soit A une matrice réelle à diagonale strictement dominante, donc telle que : ∀ 1 ≤ i ≤ n, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$.

On rappelle qu'une telle matrice est inversible (voir exercice 22).

On suppose de plus que : ∀ 1 ≤ i ≤ n, $a_{i,i} > 0$.

a. Montrer que f : $x \mapsto \det(A + x.I_n)$, est polynomiale de degré n et préciser son coefficient dominant.

b. Montrer que la matrice $(A + x.I_n)$ est à diagonale strictement dominante pour tout : $x \in \mathbb{R}^+$.

c. Etudier la limite de f en +∞, et en déduire que : det(A) > 0.

70. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que : ∃ P ∈ $Gl_n(\mathbb{C})$, $B = P^{-1}.A.P$.

On note : $P = P_1 + i.P_2$, avec : $(P_1,P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a. Montrer que : $P_1.B = A.P_1$, et : $P_2.B = A.P_2$.

b. Montrer que l'application : $x \mapsto \det(P_1 + x.P_2)$, est polynomiale en x.

c. En déduire que : ∃ a ∈ ℝ, $\det(P_1 + a.P_2) \neq 0$.

d. Conclure que : ∃ Q ∈ $Gl_n(\mathbb{R})$, $B = Q^{-1}.A.Q$.

e. Que vient-on de démontrer ?

<u>Niveau 3.</u>

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

71. Soient : $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $E^+ = \{f \in E$, f est nulle sur $\mathbb{R}^-\}$, $E^- = \{f \in E$, f est nulle sur $\mathbb{R}^+\}$, et E^0 l'ensemble des fonctions constantes sur ℝ.

a. Montrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer que : $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

72. Soient : $F = \{f \in C^0([-1,1],\mathbb{C}), \int_{-1}^{+1} f(t).dt = 0\}$, et : $G = \{f \in C^0([-1,1],\mathbb{C})$, f constante$\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^0([-1,1],\mathbb{C})$.

73. Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites complexes, les sous-espaces vectoriels :
$F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 = u_1 = 0\}$,
$G = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 \in \mathbb{C}, u_1 \in \mathbb{C}, \forall n, u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 4.u_n\}$,
sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

74. Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E de dimension n.
On suppose que f est nilpotent d'indice p, à savoir : $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$.
a. Montrer qu'il existe : $x \in E$, tel que : $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ libre.
b. En déduire que : $p \leq n$, puis que : $f^n = 0$.

75. On note : $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et D l'application dérivée dans E.
On définit par ailleurs : $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'' - 3.f' + 2.f$.
a. Exprimer φ en fonction de D.
b. Montrer que : $\ker(\varphi) = \ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E)$.
c. En déduire $\ker(\varphi)$, sans l'aide de la résolution des équations différentielles du second ordre.

76. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
- $\exists u \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $\mathrm{Im}(u) = F$, et : $\ker(u) = G$,
- $\dim(F) + \dim(G) = n$.

77. Soient E un **K**-espace vectoriel et E' un sous-espace vectoriel, et F_1, F_2 des supplémentaires de E' dans E.
Soit p la projection de E sur F_1 parallèlement à E'.
Montrer que p définit un isomorphisme de F_2 sur F_1.

78. Soient E_0, E_1, … , E_n, des **K**-espaces vectoriels, et f_0, f_1, … ,f_{n+1}, des applications linéaires, vérifiant :
$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n+1}} \{0\},$$
et la propriété de suite exacte, à savoir : $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $\mathrm{Im}(f_k) = \ker(f_{k+1})$.
a. Que cela signifie-t-il pour f_1 et f_n ?
b. En supposant tous les espaces de dimension finie, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.\dim(E_k) = 0$.
c. Construire une suite exacte à avec F+G, $F \cap G$ et $F \times G$, où F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie E et retrouver la formule de Grassmann.

Matrices.

79. Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, soit : $\{C \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), X.C = C.X\}$.
On pourra utiliser une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

80. Soit : $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang r.
Montrer qu'on peut trouver deux matrices : $B \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et : $C \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{R})$, telles que : A = B.C.

81. Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, telle que : $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$.
Pour : $n \geq 2$, on note : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.
Montrer que : $\forall n \geq 2$, on a : $b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Trace.

82. Soit : $H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, telle que : $\mathrm{rg}(H) \leq 1$.
a. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, telle que : $H = U.{}^tV$, et : $\mathrm{tr}(H) = {}^tV.U$.
b. En déduire que : $H^2 = \mathrm{tr}(H).H$.
c. Soit : $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
Montrer l'équivalence : $(A^2 = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{rg}(A) \leq 1$, et : $\mathrm{tr}(A) = 0)$.

83. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système d'inconnues X et Y suivant :

$\{tr(X).Y + tr(Y).X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, et : $X.Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\}$.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

84. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de F.
   a. En utilisant une base de E adaptée à F, montrer que F est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
   b. Montrer que le nombre minimum d'hyperplans pour obtenir le résultat précédent est dim(F).

85. a. Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifient : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, tr(A.X) = tr(B.X), montrer que : A = B.
   b. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$.
   Montrer que : $\exists ! F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, f(A) = tr(A.F).
   c. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, f(A.B) = f(B.A).
   Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbf{K}$, $f = \lambda.tr$.

86. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, (n+1) réels distincts deux à deux.
   Pour tout k, on pose : $P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{(X-a_j)}{(a_k-a_j)}$.
   a. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et trouver les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.
   b. Montrer que : $\forall (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que pour tout i, $Q(a_i) = b_i$.
   c. Montrer que : $\exists (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P(a_k)$.
   d. Déterminer les éléments c_k.

87. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, et a un réel.
   Soient y_1^*, y_2^*, y_3^* les formes linéaires qui, à P de E, font correspondre respectivement P(a), P'(a), P''(a).
   a. Ces formes sont-elles indépendantes ?
   b. Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$, et aux formes y_k^* qui à P font correspondre $P^{(k)}(a)$.
   c. Montrer qu'on obtient ainsi une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

88. Dans : $E = \mathbb{R}_3[X]$, avec a, b, c, réels deux à deux distincts, on note y_1^*, y_2^*, y_3^*, les formes qui à P dans E, font correspondre P(a), P(b), P(c), et y_4^* définie par : $y_4^*(P) = \int_a^b P(t).dt$.
   La famille $(y_i^*)_{1\leq i\leq 4}$ est-elle libre dans E* ?

89. Soient E un **K**-ev, et y*, z* des éléments de E* non nuls.
   Montrer qu'il existe un vecteur x de E vérifiant : $y^*(x).z^*(x) \neq 0$.

Formes multilinéaires.

90. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B}$ une base de E, et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Pour : $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on pose : $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n)$.
   Montrer que f est n-linéaire alternée, puis que : $f = tr(u).\det_{\mathcal{B}}$.

91. a. Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}$, et a, $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E.
   Montrer que : $\det_B(a+x_1, a+x_2,\dots,a+x_n) = \det_B(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)$.

b. En déduire : $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$, où a_i, b_i sont des scalaires.

Calculs de déterminants.

92. Calculer le déterminant de la matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $a_{i,j} = (i + j - 1)^2$.
    On pourra faire intervenir une famille de n polynômes de degré 2.

93. On note, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, A la matrice $n\times n$ dont le terme générique $a_{i,j}$ vaut : $S_k = \sum_{p=1}^{k} p$ où : $k = \min(i,j)$.
    Préciser la matrice A et calculer son déterminant.

94. Soit : $(a, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, et :
$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+x_n \end{vmatrix},\quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),$$
où le 1 est sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
    a. Ecrire D_n à l'aide des colonnes E_i et C.
    b. En déduire, à l'aide de la n-linéarité du déterminant, la valeur de D_n.

95. Déterminants de Cauchy et de Hilbert.
    Soient : $n \geq 2$, et : $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels tels que : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$.
    On pose par ailleurs : $D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.
    a. En utilisant comme pivot la dernière colonne dans un premier temps, puis la dernière ligne dans un deuxième temps, montrer que : $D_n = \frac{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n).(a_1-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)}{(a_1+b_n)\dots(a_{n-1}+b_n).(a_n+b_n).(a_n+b_{n-1})\dots(a_n+b_1)}.D_{n-1}$.
    b. En déduire la valeur de D_n pour tout : $n \geq 1$ (déterminant de Cauchy).
    c. Dans le cas particulier où : $a_i = i$, $b_j = j$, $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, donner la valeur de D_n (déterminant de Hilbert).

96. Pour : $(p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note : $\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.
    a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x) = (p+1)!.x^p$.
    b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi_p(n+1) = (p+1)!.\sum_{k=1}^{n} k^p$.
    c. En déduire la valeur de : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, en calculant 3 déterminants.

97. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$.
    a. Que dire de A si : n = 1 ?

Pour : $n \geq 2$, on note : $r = rg(A)$.
b. Montrer que : $\det(A) = 0$.
c. Montrer qu'il existe une matrice X de rang $(n - r)$ telle que : $\det(A + X) \neq 0$.
En déduire que : $r = 0$, puis que A est nulle.