Algèbre linéaire.

Chap. 04 : cours complet.

7. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de changement de base.

8. Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases.

9. Somme de sous-espaces vectoriels, sommes directes, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

10. Projecteurs.

11. Polynômes d'interpolation de Lagrange *(hors programme)*.

12. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

Théorème 12.4 : trace d'un projecteur

13. Dual d'un espace vectoriel.

Définition 13.1 : dual d'un espace
Théorème 13.1 : dimension du dual pour un espace de dimension finie
Définition 13.2 : hyperplan (en dimension finie)
Théorème 13.2 : noyau des formes linéaires non nulles
Théorème 13.3 et définition 13.3 : *(hors programme)* base duale d'une base en dimension finie
Théorème 13.4 et définition 13.4 : *(hors programme)* base préduale (ou anté-duale) d'une base de E*
Théorème 13.5 : équations d'un hyperplan

14. Groupe symétrique *(hors programme)*.

Définition 14.1 : $\mathcal{S}_n$
Théorème 14.1 : le groupe symétrique $(\mathcal{S}_n,\circ)$
Définition 14.2 : orbite d'un élément sous l'action d'un cycle
Théorème 14.2 : description des orbites d'une permutation
Théorème 14.3 : partition de $\mathbb{N}_n$ à l'aide d'une permutation
Définition 14.3 : p-cycle, transposition
Définition 14.4 : signature d'une permutation
Théorème 14.4 : décomposition d'une permutation en produit de transpositions
Théorème 14.5 : propriété de commutation des cycles à supports disjoints
Théorème 14.6 : décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints
Théorème 14.7 : la signature est un morphisme de groupes

15. Déterminant d'une famille finie de vecteurs dans une base en dimension finie *(hors programme)*.

Définition 15.1 : forme n-linéaire alternée en dimension n
Définition 15.2 : forme antisymétrique
Théorème 15.1 : équivalence alternée $\Leftrightarrow$ antisymétrique
Théorème 15.2 : propriétés et écriture d'une forme n-linéaire alternée dans une base
Théorème 15.3 et définition 15.3 : déterminant de n vecteurs dans une base
Théorème 15.4 : expression du déterminant de n vecteurs dans une base
Théorème 15.5 : caractérisation des bases
Théorème 15.6 et définition 15.4 : orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

16. Propriétés et calcul des déterminants.

Définition 16.1 : déterminant d'une matrice carrée
Théorème 16.1 : égalité entre déterminant de n vecteurs et celui de leur matrice représentative
Théorème 16.2 : déterminant de l'identité
Théorème 16.3 : conséquences de la n-linéarité sur les déterminants de matrices
Théorème 16.4 : déterminant d'une transposée
Définition 16.2 : *(hors programme)* cofacteurs d'une matrice carrée
Théorème 16.5 : développement d'un déterminant suivant une colonne
Théorème 16.6 : développement d'un déterminant suivant une ligne
Théorème 16.7 : déterminant d'une matrice carrée diagonale, ou triangulaire
Théorème 16.8 : déterminant par blocs

17. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.

Théorème 17.1 et définition 17.1 : *(hors programme)* déterminant d'un endomorphisme en dimension finie
Théorème 17.2 : égalité entre déterminant d'un endomorphisme et celui de sa matrice représentative
Théorème 17.3 : déterminant d'une composée d'endomorphismes
Théorème 17.4 : déterminant d'un produit de matrices
Théorème 17.5 : caractérisation des automorphismes
Théorème 17.6 : caractérisation des matrices carrées inversibles

18. Comatrice d'une matrice carrée *(hors programme)*.

Définition 18.1 : comatrice d'une matrice carrée
Théorème 18.1 : lien entre matrice et comatrice
Théorème 18.2 : expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible

19. Applications.

Définition 19.1 : *(hors programme)* système de Cramer
Théorème 19.1 : *(hors programme)* résolution d'un système de Cramer
Définition 19.2 : rang d'une matrice
Théorème 19.2 : lien entre rang d'une matrice et rang de ses vecteurs colonnes
Définition 19.3 : matrice extraite d'une matrice
Théorème 19.3 : caractérisation du rang par des déterminants extraits non nuls
Théorème 19.4 : rang d'une transposée

20. Exemple des déterminants tridiagonaux : suites récurrentes linéaires à deux termes.

Définition 20.1 : suite récurrente linéaire à deux termes, réelle ou complexe
Définition 20.2 : équation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire à deux termes
Théorème 20.1 : structure de **K**-espace vectoriel des suites récurrentes linéaires à deux termes
Théorème 20.2 : expression des suites récurrentes linéaires à deux termes
Définition 20.3 : déterminant tridiagonal
Théorème 20.3 : calcul d'un déterminant tridiagonal

Algèbre linéaire.

Chap. 04 : cours complet.

1. Espaces vectoriels réels ou complexes.

Définition 1.1 : K-espace vectoriel

Soit E un ensemble, **K** un corps (égal en général à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On dit que (E,+,.) est un K-espace vectoriel ou espace vectoriel sur **K** si et seulement si :

- + est une loi de composition interne sur E : $\forall (x,y) \in E^2$, x+y existe et : $x+y \in E$,
- + est associative : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- + possède un élément neutre dans E, en général noté 0 : $\forall x \in E$, $x + 0 = 0 + x = x$,
- tout élément de E admet un symétrique pour la loi + appelé opposé de x :
  $\forall x \in E, \exists x' \in E, (x' = -x)$, tel que : $x + x' = x' + x = 0$,

ce qui fait alors de (E,+) un groupe,

- + est commutative : $\forall (x,y) \in E^2$, $x + y = y + x$,

ce qui rend le groupe (E,+) commutatif ou abélien,

la loi . ayant de plus les propriétés suivantes :

- c'est une loi de composition externe sur E : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in$ **K**, $\lambda.x$ existe et : $\lambda.x \in E$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in$ **K**, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$,
- $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in$ **K**^{2}, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$,
- $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in$ **K**^{2}, $(\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$,
- $\forall x \in E$, $1.x = x$.

Les éléments de E sont appelés « vecteurs » et ceux de **K** « scalaires ».

Définition 1.2 : (hors programme) K-algèbre

Un ensemble $(E,+,*,.)$ est une **K**-algèbre si et seulement si :

- (E,+,.) est un **K**-espace vectoriel,
- $*$ est distributive par rapport à +,
- $\forall (x,y) \in E$, $\forall \lambda \in$ **K**, $\lambda.(x*y) = x*(\lambda.y) = (\lambda.x)*y$.

Si la loi $*$ est associative, commutative ou unitaire, on dit de même que l'algèbre est associative, commutative, unitaire.

Théorème 1.1 : exemples

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (suivant les cas), dits espaces vectoriels de référence.

- les ensembles de n-uplets de réels ou de complexes : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$,
- les ensembles de fonctions définies sur I (éventuellement $\mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un **K**-espace vectoriel (E,+,.) : $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(I,E)$,
- les ensembles de polynômes à coefficients réels ou complexes : $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$,
- les ensembles de suites réelles ou complexes : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
- les ensembles de matrices carrées ou rectangles à coefficients réels ou complexes : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Les ensembles suivants sont des **K**-algèbres :

- $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$,
- $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration :

Une fois définies les lois dans ces ensembles, la démonstration du fait que ce sont bien des **K**-espaces vectoriels ou des **K**-algèbres est immédiate.

On précise donc les lois :

- dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in$ **K**^{n}, $\forall (y_1, \dots, y_n) \in$ **K**^{n}, $\forall \lambda \in$ **K**,
  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,
  $\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$.
- dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(I,E)$: $\forall (f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $E)$, $\forall \lambda \in$ **K**,
  $(f + g)$ est la fonction de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou E, telle que : $\forall x \in I$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
  $\lambda.f$ est la fonction de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou E, telle que : $\forall x \in I$, $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$,

et pour $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$, $(f\times g)$ est la fonction de I dans **K**, telle que : $\forall x \in I$, $(f\times g)(x) = f(x).g(x)$,
l'élément unité pour la loi $\times$ étant alors la fonction 1 telle que : $\forall x \in I$, $1(x) = 1$.
C'est alors une **K**-algèbre commutative (la loi $\times$ est commutative).

- dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{K}_n[X]$: $\forall P = a_p.X^p + \ldots + a_0$, $Q = b_q.X^q + \ldots + b_0$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  pour : $N = \max(p,q)$, $P + Q = (a_N + b_N).X^N + \ldots + (a_0 + b_0)$,
  $\lambda.P = (\lambda.a_p).X^p + \ldots + (\lambda.a_0)$,

  et pour $\mathbf{K}[X]$, le produit $\times$ est défini par : $(P.Q) = \sum_{k=0}^{p+q}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i.b_{k-i}\right).X^k$,
  l'élément unité étant le polynôme constant égal à 1.
  C'est alors une **K**-algèbre commutative.
- dans $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$: $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
  $\lambda.(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda.a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$: $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,

  $$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,n}+b_{n,n} \end{pmatrix},$$

  $$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{1,1} & \cdots & \lambda.a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda.a_{n,1} & \cdots & \lambda.a_{n,n} \end{pmatrix},$$

  et pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le produit $\times$ est défini par : $A\times B = C$, avec : $\forall 1 \le i,j \le n$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}$,
  l'élément unité étant la matrice I_n.
  C'est alors une **K**-algèbre commutative pour : $n = 1$, non commutative pour : $n \ge 2$.

Définition 1.3 : combinaison linéaire de vecteurs

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) de vecteurs de E.
Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur de E qui s'écrit : $\sum_{i\in I}\lambda_i.x_i$, où les λ_i sont des scalaires qui sont tous nuls, sauf au plus un nombre fini d'entre eux.
En particulier, si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie de vecteurs de E, une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de E qui s'écrit : $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.x_i$, où les λ_i sont n scalaires.

Définition 1.4 : sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel, et F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F,+,.)$ est un **K**-espace vectoriel (donc pour les mêmes lois que celles de E, ou plus précisément pour les lois induites dans F par celles de E).

Théorème 1.2 : caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel et F un ensemble.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F est inclus dans E,
- F est non vide,
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $(\lambda.x + \mu.y) \in F$.

Démonstration :
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est bien inclus dans E, il contient l'élément neutre pour l'addition (puisque $(F,+)$ est un groupe), c'est-à-dire le vecteur nul, et F est non vide. Enfin, les lois + et . sont respectivement des lois de composition interne et externe, dont la stabilité de F par combinaison linéaire en découle.

• Réciproquement, si F vérifie les conditions proposées, alors :
 • la loi + est interne dans F : $\forall$ (x,y) $\in F^2$, pour : $\lambda = \mu = 1$, $1.x + 1.y = x + y \in F$,
 • la loi + étant associative et commutative dans E, elle le reste dans F,
 • F contient 0, puisque, étant non vide : $\exists$ x $\in$ F, et : $1.x - 1.x = 0 \in F$,
 • tout élément de F a son symétrique dans F car : $\forall x \in F$, $0.0 + (-1).x = -x \in F$,
 • la loi . est une loi de composition externe dans F puisque : $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $0.0 + \lambda.x = \lambda.x \in F$,
 • les quatre dernières propriétés étant vraies dans E, elles restent vraies dans F.

Théorème 1.3 et définition 1.5 : espace vectoriel produit

Soient (E+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels (où l'on note de la même façon dans E et F les lois de composition internes et externes).
Alors les lois + et . définies par :
 • $\forall$ ((x,y), (x',y')) $\in (E\times F)^2$, (x,y) + (x',y') = (x+x',y+y'),
 • $\forall$ (x,y) $\in E\times F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.(x,y) = (\lambda.x,\lambda.y)$,
font de E×F un **K**-espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit de E et de F.

Démonstration :
Avec les lois ainsi définies, on vérifie que les résultats vrais dans E et dans F entraînent les mêmes pour les nouvelles lois dans E×F.
En particulier, l'élément nul dans E×F est (0,0) et l'opposé d'un élément (x,y) de E×F est (-x,-y).

2. Combinaisons linéaires et familles.

Définition 2.1 : famille libre de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
On dit que (x_i) est une famille libre si et seulement si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est nécessairement à coefficients nuls.
En particulier, si la famille (x_i) est finie de la forme $(x_i)_{1\le i\le n}$, la famille est libre si et seulement si :
 $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$.

Définition 2.2 : famille liée de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
La famille (x_i) est dite liée si et seulement si elle n'est pas libre.
En particulier, si la famille (x_i) est finie de la forme $(x_i)_{1\le i\le n}$, la famille est liée si et seulement si :
 $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots,0)$, $(\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0)$.

Théorème 2.1 : caractérisation des familles liées

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
La famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille (on ne sait pas a priori lequel) peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration :
• Si la famille est liée, il existe une combinaison linéaire faisant intervenir un nombre fini de vecteurs de la famille, nulle et à coefficients non tous nuls, soit : $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n = 0$.
Puisque l'un des coefficient est non nul, on peut supposer que c'est λ_1 et alors : $x_1 = \sum_{k=2}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_1}.x_k$, et on a bien un des vecteurs de la famille s'écrivant comme combinaison linéaire des autres.
• Si maintenant, l'un d'entre eux s'écrit comme combinaison linéaire des autres, par exemple :
 $x_1 = \mu_2.x_2 + \ldots + \mu_n.x_n$, alors : $1.x_1 - \mu_2.x_2 - \ldots - \mu_n.x_n = 0$.
On vient bien d'obtenir une combinaison linéaire des vecteurs de la famille, nulle et à coefficients non tous nuls (à cause du coefficient 1).

Théorème 2.2 : cas où l'un des vecteurs de la famille est nul

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.
Si la famille comporte le vecteur nul ou deux fois le même vecteur, la famille est liée.

Démonstration :
• Si la famille comporte le vecteur nul : $x_1 = 0$, par exemple, alors : $1.x_1 = 0$, soit une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille : la famille est liée.

• Si la famille comporte deux fois le même vecteur, par exemple : $x_1 = x_k$, avec : $k \neq 1$, alors on a à nouveau une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille avec : $1.x_1 - 1.x_k = 0$.

Théorème 2.3 : famille finie de polynômes de degrés échelonnés

Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ de degrés échelonnés, soit tels que : $\deg(P_0) < \ldots < \deg(P_n)$.

Alors cette famille est libre dans $\mathbf{K}[X]$.

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur n.

• Pour : $n = 0$, P_0 étant un polynôme non nul, il constitue une famille libre dans $\mathbf{K}[X]$.

• Soit : $n \in \mathbb{N}$, pour lequel on suppose le résultat vrai.

Soit $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, et soit une combinaison linéaire nulle de ces polynômes, soit : $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k.P_k = 0$, avec : $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.

Si : $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors : $\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right).P_k = P_{n+1}$.

Or la somme à gauche est de degré au plus $\deg(P_n)$, alors que le polynôme de droite a un degré $\deg(P_{n+1})$ qui est strictement plus grand.

Donc : $\lambda_{n+1} = 0$, puis : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k.P_k = 0$, et $(P_0, \ldots, P_n)$ étant de degrés échelonnés, on en déduit que tous les λ_i sont nuls.

Finalement la famille est bien libre, ce qui termine la récurrence.

Définition 2.3 : rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.

On appelle rang de la famille, lorsqu'il existe, le plus grand nombre de vecteurs de la famille constituant une famille libre de vecteurs de E, et on le note $\mathrm{rg}((x_i))$.

Le rang d'une famille finie de n vecteurs existe donc toujours et est toujours inférieur ou égal à n.

Définition 2.4 : sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A une famille de vecteurs de E.

On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par la famille A l'ensemble noté Vect(A) des combinaisons linéaires de vecteurs de A, soit :

$\mathrm{Vect}(A) = \{x \in E, \exists (x_1, \ldots, x_p) \in A^p, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p, x = \lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_p.x_p\}$.

En particulier, si : $A = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a : $\mathrm{Vect}(A) = \{x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_p.x_p\}$.

Théorème 2.4 : caractérisation d'un sous-espace vectoriel engendré

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.

Vect(A) est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, c'est-à-dire :

$\forall$ G, sous-espace vectoriel de E, $(A \subset G) \Rightarrow (\mathrm{Vect}(A) \subset G)$.

Démonstration :

Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant A.

Alors G étant stable par combinaison linéaire, il contient toute combinaison linéaire de deux vecteurs qui lui appartiennent (en particulier deux vecteurs quelconques de A) et par récurrence toute combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs lui appartenant, ou appartenant à A.

Donc G contient bien Vect(A).

Définition 2.5 : base d'un K-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et (x_i) une famille de vecteurs de E.

On dit que (x_i) est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

3. Espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.1 : espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit que E est de dimension finie sur **K** si et seulement si E admet une famille génératrice finie.

Théorème 3.1 : de l'échange

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Soient : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, une famille libre d'éléments de E, et : $\mathscr{B}'_0 = (e'_1, \dots, e'_q)$, une famille génératrice de E.
Alors : $p \leq q$.
De plus, on peut échanger p des vecteurs de la famille $\mathscr{B}'_0$ avec les p vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de E.

Démonstration :

• On sait que e_1 est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}'_0$, et les coefficients ne peuvent être tous nuls, sinon e_1 serait nul et la famille $\mathscr{B}$ ne pourrait être libre.
Quitte donc à permuter les vecteurs de $\mathscr{B}'_0$, on peut supposer que le coefficient $\lambda_{1,1}$ de e'_1 dans cette combinaison : $e_1 = \lambda_{1,1}.e'_1 + \dots \lambda_{q,1}.e'_q$, est non nul : $\lambda_{1,1} \neq 0$.
Alors : $e'_1 = \dfrac{1}{\lambda_{1,1}}.e_1 - \sum_{i=2}^{q} \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{1,1}}.e'_i$, et : $E = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_q) \subset \text{Vect}(e_1, e'_2, \dots, e'_q) \subset E$,
d'où l'égalité des espaces vectoriels et le fait que la famille : $\mathscr{B}'_1 = (e_1, e'_2, \dots, e'_q)$ est génératrice de E.
• On itère maintenant le processus pour remplacer d'autres vecteurs de $\mathscr{B}'_0$ par d'autres provenant de $\mathscr{B}$. Supposons pour cela qu'on a formé une nouvelle famille $\mathscr{B}'_k$ génératrice de E en remplaçant les k premiers vecteurs de la famille $\mathscr{B}'_0$ par $e_1, \dots, e_k$ (par exemple), avec : $k \leq p - 1$, $k \leq q - 1$.
Alors : $e_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_q)$, et : $\exists\, (\lambda_{1,k+1}, \dots, \lambda_{k,k+1}, \lambda_{k+1,k+1}, \dots \lambda_{q,k+1}) \in \mathbf{K}^q$, tel que :
$e_{k+1} = \lambda_{1,k+1}.e_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}.e_k + \lambda_{k+1,k+1}.e'_{k+1} + \dots + \lambda_{q,k+1}.e'_q$.
Il n'est pas possible d'avoir : $\lambda_{k+1,k+1} = \dots = \lambda_{q,k+1} = 0$, sinon la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ et donc $\mathscr{B}$ serait liée.
Quitte là encore, à permuter les vecteurs $e'_{k+1}, \dots, e'_q$, on peut supposer que : $\lambda_{k+1,k+1} \neq 0$, et :

$$e'_{k+1} = \frac{1}{\lambda_{k+1,k+1}}.e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{k+1,k+1}}.e_i - \sum_{i=k+2}^{q} \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{1,k+1}}.e'_i \,.$$

On en déduit à nouveau que : $E = \text{Vect}(\mathscr{B}'_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}, e'_{k+2}, \dots e'_q) \subset E$, et la nouvelle famille :
$\mathscr{B}'_{k+1} = (e_1, \dots, e_{k+1}, e'_{k+2}, \dots e'_q)$, est encore génératrice de E.
• Enfin, si : $q < p$, alors en prenant : $k = q - 1$, dans la construction précédente, on obtient que :
$e'_q \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_q)$, puis que : $\mathscr{B}'_q = (e_1, \dots, e_q)$ est génératrice de E.
On aurait alors en particulier : $q+1 \leq p$, et : $e_{q+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_q)$, et la famille $(e_1, \dots, e_{q+1})$, sous-famille de la famille $\mathscr{B}$, serait liée, et la famille $\mathscr{B}$ le serait aussi.
Donc on a bien : $p \leq q$, et on a obtenu une nouvelle famille génératrice de E en ayant échangé p vecteurs de la famille $\mathscr{B}'_0$ par ceux de la famille $\mathscr{B}$.

Théorème 3.2 : existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Alors E admet une base comportant un nombre fini de vecteurs, et toutes les bases de E comportent le même nombre fini de vecteurs.

Démonstration :

• Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E.
Soit la famille ne comporte que le vecteur nul, et alors : $\forall\, x \in E$, $x = 0$.
Dans ce cas, et par convention, on a : $E = \text{Vect}(\varnothing)$.
Soit la famille comporte au moins un vecteur non nul, et on considère alors l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de cette famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.
Cet ensemble d'entiers est non vide (puisqu'il y a une sous-famille libre comportant un seul vecteur) et majoré par p : il contient donc un plus grand élément : $n \leq p$.
Considérons maintenant une sous-famille libre $\mathscr{B}$ à n éléments parmi les $(e_i)_{1\leq i\leq p}$, et supposons pour simplifier que c'est $(e_1, \dots, e_n)$.
Tout vecteur e_k, avec : $n < k \leq p$, (s'il y en a) est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ car :
$\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_k) \in \mathbf{K}^{n+1}$, non tous nuls tel que : $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_n.e_n + \lambda_k.e_k = 0$,
puisque la famille ne peut pas être libre car comportant trop de vecteurs.

Mais λ_k ne peut être nul, sinon tous les coefficients seraient nuls (la famille $\mathscr{B}$ est libre), et on a donc :

$e_k = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_k}.e_i$.

Puis tout vecteur de E étant combinaison linéaire de la famille (e_1, …, e_p), il est encore combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

On vient donc de démontrer que : $\forall$ x $\in$ E, x $\in$ Vect($\mathscr{B}$).

Mais on a aussi évidemment : $\forall$ x $\in$ Vect($\mathscr{B}$), x $\in$ E, puisque E est stable par combinaison linéaire.

On a donc établi globalement que : E = Vect($\mathscr{B}$).

La famille $\mathscr{B}$ étant libre par construction, et maintenant génératrice de E, c'est une base de E.

• Soient maintenant deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$' de E comportant n et n' vecteurs.

Puisque $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}$' est génératrice de E, on a : n $\leq$ n'.

En échangeant les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$', on a évidemment : n' $\leq$ n, et finalement : n = n'.

Définition 3.2 : dimension d'un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

Si E admet une base comportant un nombre fini de vecteurs, on appelle dimension de E le nombre de vecteurs de cette base qui est donc le même pour toutes les bases de E.

Théorème 3.3 : cardinal des familles libres ou génératrices dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de E.

Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est génératrice de E, alors : p $\geq$ n.

Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre, alors : p $\leq$ n.

On a les équivalences :

($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ base de E) $\Leftrightarrow$ ($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ libre et : p = n) $\Leftrightarrow$ ($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ génératrice de E et : p = n).

Démonstration :

Soit $\mathscr{B}$ une base de E (comportant donc n éléments).

Le théorème de l'échange montre que si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est génératrice de E, alors : p $\geq$ n, puisque $\mathscr{B}$ est libre.

De même, si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre, alors : p $\leq$ n, puisque cette fois, $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Il est clair ensuite que :

- ($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ base de E) $\Rightarrow$ ($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ libre et : p = n), et :
- ($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ base de E) $\Rightarrow$($(x_i)_{1\leq i\leq p}$ génératrice de E et : p = n).

Réciproquement, si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ libre et : p = n, alors on peut obtenir à partir de la famille génératrice $\mathscr{B}$ de E, une nouvelle famille génératrice de E en remplaçant p vecteurs de $\mathscr{B}$ par ceux de $(x_i)_{1\leq i\leq p}$.

Mais comme : p = n, cela signifie les remplacer tous, autrement dit la nouvelle famille obtenue, (soit la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ en fait) est génératrice de E. Mais comme elle était libre, c'est en fait une base de E.

Si enfin, la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est supposée génératrice de E, alors elle ne peut être liée, sinon l'un des vecteurs, par exemple x_n serait combinaison linéaire des vecteurs x_1, …, x_{n-1} et la famille (x_1, …, x_{n-1}) serait génératrice de E.

On aurait alors une famille génératrice de E à (n – 1) éléments et une famille libre ($\mathscr{B}$) avec n éléments, ce qui est impossible.

La famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est donc libre, et étant de plus génératrice de E, c'est une base de E.

Théorème 3.4 : de la base incomplète

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et : $\mathscr{B}$ = (e_1, …, e_n), une base de E.

Si (x_1, …, x_p) est une famille libre de vecteurs de E, alors il est possible de compléter la famille (x_1, …, x_p) à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$ en une nouvelle base de E.

Démonstration :

Puisque (e_1, …, e_n) est une base de E, c'est une famille génératrice de E.

On sait donc par le théorème de l'échange que : p $\leq$ n, et qu'il est possible d'échanger p vecteurs de $\mathscr{B}$ avec les p vecteurs de l'autre famille pour former une nouvelle famille génératrice de E.

Mais puisque cette famille génératrice comporte n vecteurs, soit la dimension de E, c'est une base de E, et on l'a bien obtenue (autre façon de voir) en complétant (x_1…, x_p) à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$.

remarque :

Il existe également un théorème dit « de la base extraite » dont l'énoncé est le suivant :
« si (E,+,.) est un espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, \dots, x_p)$ engendre E, alors il existe une sous-famille $(x_i)_{i\in J}$, de $(x_1, \dots, x_p)$, avec : $J \subset \{1, \dots, p\}$ qui constitue une base de E.

Théorème 3.5 : dimension d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, inférieure à celle de E.

Démonstration :

Soit : $F = \{0\}$, et F est de dimension finie égale à 0.
Sinon, considérons toutes les familles libres de vecteurs de F.
Toutes ces familles ont un cardinal (nombre d'éléments) inférieur à : $n = \dim(E)$.
Soit alors p le nombre maximum d'éléments d'une telle famille et : $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_p)$, une telle famille.
Alors $\mathscr{B}'$ est une base de F.
En effet : $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}') \subset F$, puisque $\mathscr{B}'$ est constituée d'éléments de F, lui-même stable par combinaison linéaire.
Puis : $\forall x \in F$, la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est liée (puisqu'étant formée de plus de p éléments de F).
Donc : $\exists (\lambda_1, \dots \lambda_p, \lambda_{p+1}) \in \mathbf{K}^{p+1}$, $(\lambda_1, \dots \lambda_p, \lambda_{p+1}) \neq (0,\dots,0)$, $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p + \lambda_{p+1}.x = 0$,
et λ_{p+1} n'est pas nul, sinon tous les coefficients seraient nuls, du fait de la liberté de la famille $\mathscr{B}'$.
On en déduit que : $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}')$, et : $F \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}')$.
Finalement, $\mathscr{B}'$ est génératrice de F et c'est une base de F, qui est donc de dimension : $p \leq n = \dim(E)$.

Théorème 3.6 : caractérisation du rang d'une famille de vecteurs

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel et $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de vecteurs de E.
Alors le rang de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille.
Soit donc : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p))$.

Démonstration :

Le rang de la famille est le nombre d'éléments de la plus grande sous-famille libre extraite de $(x_1, \dots, x_p)$.
Notons k ce nombre et supposons (pour simplifier que $(x_1, \dots, x_k)$) est la famille libre en question.
Alors : $\forall\, k+1 \leq i \leq p$, la famille $(x_1, \dots, x_k, x_i)$ est liée, et :
$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_i) \in \mathbf{K}^{k+1}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_i) \neq (0, \dots, 0)$, $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_k.x_k + \lambda_i.x_i = 0$
Mais λ_i ne peut être nul, sinon la liberté de $(x_1, \dots, x_k)$ entraînerait la nullité de tous les coefficients.
On en déduit que x_i est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_k)$.
On constate ensuite que : $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$,
et ce qu'on vient d'établir montre que toute combinaison linéaire de $(x_1, \dots x_p)$ peut se réécrire en une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_k)$, ce qui nous donne : $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, d'où l'égalité.
La famille $(x_1, \dots, x_k)$ étant libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, elle en constitue une base et :
$\dim(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = k = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

Théorème 3.7 : égalité de sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors : $(F = G) \Leftrightarrow (F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G))$.
En particulier, si E est lui-même de dimension finie, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :
$(E = F) \Leftrightarrow (\dim(F) = \dim(E))$.

Démonstration :

Si : $F = G$, il est immédiat que : $F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G)$.
Si réciproquement, $F \subset G$, et : $\dim(F) = \dim(G)$, soit : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, une base de F.
Alors : $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
Mais $\mathscr{B}$ est aussi une famille d'éléments de G, libre, et comportant : $p = \dim(G)$, éléments. Donc c'est une base de G et : $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$.
La deuxième équivalence vient du fait qu'on a toujours : $F \subset E$.

4. Applications linéaires.

Définition 4.1 : application linéaire entre K-espaces vectoriels, $\mathscr{L}(E,F)$

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.
On dit que u est une application de E dans F est linéaire si et seulement si :
$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2, u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$, et on note : $\mathscr{L}(E,E) = \mathscr{L}(E)$.

Théorème 4.1 : structure de K-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.
$\mathscr{L}(E,F)$ peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel et $\mathscr{L}(E)$ d'une structure de **K**-algèbre.

Démonstration :

Comme au début du chapitre, on précise les lois utilisées et la démonstration du fait que l'on a bien un **K**-espace vectoriel ou une **K**-algèbre, se prouve sans difficulté particulière.
Pour cela, donc : $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E,F), \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,

- $(u+v)$ est l'application linéaire de E dans F définie par : $\forall x \in E, (u+v)(x) = u(x) + v(x)$,
- $(\lambda.u)$ est l'application linéaire de E dans F définie par : $\forall x \in E, (\lambda.u)(x) = \lambda.u(x)$,

et pour $\mathscr{L}(E)$, la deuxième application interne qui en fait une **K**-algèbre est définie par :

- $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2, \forall x \in E, (uov)(x) = u(v(x))$,

l'élément unité étant l'application identité (qui est bien linéaire) de E dans E.
Cette algèbre est en général non commutative.

Définition 4.2 : le groupe linéaire d'un espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
L'ensemble des automorphismes de E forme un groupe pour la composition des applications, appelé groupe linéaire de E et noté Gl(E).

Définition 4.3 : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.
Une application linéaire de E dans F est appelée morphisme ou homomorphisme de E dans F.
Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
Un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E dans lui-même.

Définition 4.4 : image et noyau d'une application linéaire

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle image de u et noyau de u les ensembles :

- $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$,
- $\ker(u) = \{x \in E, u(x) = 0\}$.

Théorème 4.2 : image et noyau d'un morphisme sont des sous-espaces vectoriels

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors Im(u) est un sous-espace vectoriel de F et ker(u) un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

- Im(u) est inclus dans F, il est non vide, car : $0 = u(0) \in \mathrm{Im}(u)$.

Enfin : $\forall (y,y') \in (\mathrm{Im}(u))^2, \forall (\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2, \exists (x,x') \in E^2, y = u(x), y' = u(x')$, et :
$\lambda.y + \lambda'.y' = \lambda.u(x) + \lambda'.u(x') = u(\lambda.x + \lambda'.x') \in \mathrm{Im}(u)$.

- ker(u) est inclus dans E, il est non vide, car : $u(0) = 0$, et : $0 \in \ker(u)$.

Enfin : $\forall (x,x') \in (\ker(u))^2, \forall (\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2, u(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.u(x) + \lambda'.u(x') = 0$, et : $[\lambda.x + \lambda'.x'] \in \ker(u)$.

Théorème 4.3 : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors :

- (u injective) $\Leftrightarrow$ ($\ker(u) = \{0\}$).
- (u surjective) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Im}(u) = F$).

Démonstration :

- Supposons u linéaire et injective. Alors 0 a un seul antécédent par u qui est 0, et : $\ker(u) = \{0\}$.

Si maintenant : $\ker(u) = \{0\}$, alors :

$\forall (x,x') \in E^2$, $(u(x) = u(x')) \Rightarrow (u(x - x') = 0) \Rightarrow (x - x' \in \ker(u)) \Rightarrow (x - x' = 0$, et : $x = x')$: u est injective.

• Soit : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors : u surjective, si et seulement si : $(\forall y \in F, \exists x \in E, y = u(x))$, ou encore : $(\forall y \in F, y \in \mathrm{Im}(u))$.

Donc c'est bien équivalent à : F Im(u).

Théorème 4.4 : caractérisation d'une application linéaire par son action sur une somme directe

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels.

Soient $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$, et $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille telle que :

$\forall 1 \le i \le n$, $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$.

Alors il existe une unique application linéaire : $u \in \mathscr{L}(E,F)$, telle que : $\forall 1 \le i \le n$, $u_i = u|_{E_i}$.

Démonstration :

Supposons que u existe.

Alors, pour tout vecteur x se décomposant en : $x = x_1 + \ldots x_n$, suivant la somme directe, on a :

$u(x) = u(x_1) + \ldots u(x_n) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n)$.

Réciproquement, montrons que u définie par la formule précédente convient.

• C'est bien une application de E dans E, puisque pour un x donné, la décomposition est unique et u(x) aussi.

• Pour : $x \in E_i$, $x = 0 + \ldots + 0 + x + 0 + \ldots + 0$, sa décomposition suivant la somme directe, alors :

$u(x) = u_1(0) + \ldots + u_{i-1}(0) + u_i(x) + u_{i+1}(0) + \ldots + u_n(0) = u_i(0)$,

et la restriction de u à E_i est bien u_i.

• u est linéaire, car :

$\forall x = x_1 + \ldots + x_n \in E$, $\forall y = y_1 + \ldots + y_n \in E$, (avec leur décomposition), $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,

$(\lambda.x + \mu.y)$ se décompose en : $(\lambda.x_1 + \mu.y_1) + \ldots + (\lambda.x_n + \mu.y_n)$, car cette décomposition convient et elle est unique, et : $u(\lambda.x + \mu.y) = u_1(\lambda.x_1 + \mu.y_1) + \ldots + u_n(\lambda.x_n + \mu.y_n)$, par définition de u, d'où :

$u(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.u_1(x_1) + \mu.u_1(y_1) + \ldots + \lambda.u_n(x_n) + \mu.u_n(y_n) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.

Théorème 4.5 : isomorphisme entre l'image d'un morphisme et un supplémentaire de son noyau

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soit E' un supplémentaire de ker(u) dans E.

Alors u permet de définir un isomorphisme de E' sur Im(u).

Démonstration :

Soit u' l'application définie par : $\forall x \in E'$, $u'(x) = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$.

On a bien défini une application linéaire (c'est immédiat) de E' dans Im(u).

• u' est injective car :

$\forall x \in E'$, $(x \in \ker(u')) \Rightarrow (u'(x) = u(x) = 0) \Rightarrow (x \in \ker(u))$. Donc : $x \in (\ker(u) \cap E')$, et : $x = 0$.

• u' est surjective car :

$\forall y \in \mathrm{Im}(u)$, $\exists x \in E$, $u(x) = y$. Or x peut se décomposer en : $x = x' + x_0$, avec : $x' \in E'$, $x_0 \in \ker(u)$.

Donc : $y = u(x') + u(x_0) = u(x') = u'(x')$, et : $y \in \mathrm{Im}(u')$.

Finalement : $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u')$, et l'autre inclusion étant immédiate, u' est bien surjective.

5. Applications linéaires en dimension finie.

Théorème 5.1 : famille génératrice de l'image d'un morphisme en dimension finie

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une famille génératrice de E.

Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de Im(u).

En particulier, Im(u) est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, inférieure à celle de E.

Démonstration :

On a immédiatement :

$\forall x \in E$, $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $x = x_1.e_1 + \ldots + x_n.e_n$, et donc : $u(x) = x_1.u(e_1) + \ldots + x_n.u(e_n)$.

Donc : $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Comme par ailleurs, il est clair que : $\forall 1 \le i \le n$, $u(e_i) \in \mathrm{Im}(u)$, comme sous-espace vectoriel de F donc stable par combinaison linéaire, on a aussi : $\mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

On en déduit bien l'égalité et le fait que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est bien génératrice de Im(u).

Théorème 5.2 : caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie n.
Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E, et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de vecteurs de F.
Alors : $\exists\, ! \; u \in \mathscr{L}(E,F), \forall\, 1 \le i \le n, u(e_i) = a_i$.
Autrement dit, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ E.

Démonstration :

Pour tout vecteur x de E, on peut l'écrire sous la forme : $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$.
Dans ce cas, si une application u répondant aux critères proposés existe, alors : $u(x) = x_1.a_1 + \dots + a_n.x_n$.
Donc si u existe, ça ne peut être que l'application que l'on vient de décrire.
Réciproquement, soit u définie telle qu'au dessus.
Alors u est bien une application de E dans F, puisque la décomposition d'un vecteur x quelconque de E étant unique, u(x) est défini de façon unique et appartient bien à F.
De plus, u est linéaire.
En effet : $\forall\, (x,y) \in E^2, \forall\, (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $y = y_1.e_1 + \dots + y_n.e_n$, et :
$\lambda.x + \mu.y = (\lambda.x_1 + \mu.y_1).e_1 + \dots + (\lambda.x_n + \mu.y_n).e_n$, et par construction de u :
$u(\lambda.x + \mu.y) = (\lambda.x_1 + \mu.y_1).a_1 + \dots + (\lambda.x_n + \mu.y_n).a_n = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$.
Enfin, u répond bien aux conditions :
$\forall\, 1 \le i \le n$, $e_i = 0.e_1 + \dots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \dots + 0.e_n$, et : $u(e_i) = 1.a_i = a_i$.
Donc le u trouvé convient et il est bien unique.

Définition 5.1 : rang d'une application linéaire en dimension finie

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie, et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle rang de u la dimension de Im(u) : rg(u) = dim(Im(u)).

Théorème 5.3 : du rang

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels, E de dimension finie et : $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors : dim(Im(u)) + dim(ker(u)) = dim(E).

Démonstration:

Puisque E est de dimension finie, Im(u) aussi.
Soit $(a_1, ..., a_p)$ une base de Im(u), et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E, antécédents des (a_i).
Considérons également une base $(e'_1, ..., e'_q)$ de ker(u), et montrons que la réunion $(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q)$ forme une base de E.
Soit donc une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs : $\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p + \mu_1.e'_1 + \dots + \mu_q.e'_q = 0$.
En prenant l'image par u de cette combinaison linéaire, cela donne : $\lambda_1.a_1 + \dots + \lambda_p.a_p = 0$,
mais comme la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, comme base de Im(u), on en déduit : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Puis : $\mu_1.e'_1 + \dots + \mu_q.e'_q = 0$, entraîne également : $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$, puisque la famille $(e'_1, \dots, e'_q)$, comme base de ker(u), est libre.
Il est clair ensuite que : $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q) \subset E$.
Enfin, soit : $x \in E$.
Alors : $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, et : $\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, $u(x) = \lambda_1.a_1 + \dots + \lambda_p.a_p = \lambda_1.u(e_1) + \dots + \lambda_p.u(e_p)$.
Donc : $u(x - \lambda_1.e_1 - \dots - \lambda_p.e_p) = 0$, et : $\exists\, (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbf{K}^q$, $x - \lambda_1.e_1 - \dots - \lambda_p.e_p = \mu_1.e'_1 + \dots + \mu_q.e'_q$.
Finalement : $x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_q)$, et la famille proposée est bien génératrice de E.
C'est bien une base de E, donc : dim(E) = p + q = dim(Im(u)) + dim(ker(u)).

Théorème 5.4 : caractérisation des isomorphismes entre espaces de dimension finie

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- u est un isomorphisme de E sur F,
- u est injective et : dim(E) = dim(F),
- u est surjective et : dim(E) = dim(F).

En particulier, pour : $u \in \mathscr{L}(E)$, toujours avec E de dimension finie, on a les équivalences :
(u bijective) $\Leftrightarrow$ (u injective) $\Leftrightarrow$ (u surjective).

Démonstration :

C'est une conséquence presque immédiate du théorème du rang.
Si u est un isomorphisme de E sur F, alors u est injective et surjective, donc : Im(u) = F, ker(u) = {0}.
Donc : dim(E) = dim(Im(u)) + dim(ker(u)) = dim(F) + 0 = dim(F).
Réciproquement, si u est injective, avec : dim(E) = dim(F), alors : ker(u) = {0}, et :
dim(Im(u)) = dim(E) – dim(ker(u)) = dim(F).
Or on a de plus : Im(u) $\subset$ F, donc : Im(u) = F, et u est surjective, donc constitue bien un isomorphisme de E sur F.
De même si u est surjective, avec : dim(E) = dim(F), alors : dim(ker(u)) = dim(E) – dim(F) = 0.
Donc u est injective et constitue bien à nouveau un isomorphisme de E sur F.
Le cas d'applications de E dans E, espace vectoriel de dimension finie, est un cas particulier.

Théorème 5.5 : conservation du rang par isomorphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, u un isomorphisme de E sur F.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rg}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.

Démonstration :

Soit : E' = $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
Alors : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$ = dim(E').= p, et on peut considérer une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E'.
Montrons que $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de $\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.
• On a : $\forall y \in \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, $y = \lambda_1.u(e_1) + \dots + \lambda_p.u(e_p) = u(\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p)$.
Or : $(\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p) \in$ E', donc est combinaison linéaire des $(x_i)_{1\le i\le n}$, et son image est combinaison linéaire des $(u(x_i))_{1\le i\le n}$. A ce titre, y appartient à $\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.
Soit maintenant : $y \in \mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.
Alors : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n = \lambda_1.u(x_1) + \dots + \lambda_n.u(x_n) = u(\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n)$, et : $(\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n) \in$ E'.
Donc $(\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n)$ est combinaison linéaire des $(e_i)_{1\le i\le p}$ et son image est dans $\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$.
Finalement : $\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$.
• La famille $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est par ailleurs libre, puisque u est injective.
En effet, si on a : $\lambda_1.u(e_1) + \dots + \lambda_p.u(e_p) = 0$, alors : $u(\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p) = 0$, et : $(\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_p.e_p) = 0$.
Mais la famille $(e_i)_{1\le i\le p}$ étant libre, tous les coefficients sont nuls.
• Finalement, $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ est une base de $\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$, et : $\dim(\mathrm{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))) = p$.
On a bien : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rg}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.

Théorème 5.6 : dimension de $\mathscr{L}$(E,F)

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}$(E,F) est de dimension finie et : dim($\mathscr{L}$(E,F)) = dim(E).dim(F).
En particulier, toujours si E est de dimension finie, $\mathscr{L}$(E) a pour dimension $(\dim(E))^2$.

Démonstration :

Considérons une base : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de E et une base : $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$, de F.
Puis, soit la famille $\mathscr{U}$ des applications linéaires $(u_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ définies par l'image des vecteurs de $\mathscr{B}$:
$\forall 1 \le i \le n, \forall 1 \le j \le p, \forall 1 \le k \le n, u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k}.e'_j$,
où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronnecker, valant 1 si : i = k, 0 sinon.
La famille $\mathscr{U}$ est une base de $\mathscr{L}$(E,F).
• Elle est libre.
En effet, si : $\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \lambda_{i,j}.u_{i,j} = 0$, alors : $\forall 1 \le k \le n$, $\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \lambda_{i,j}.u_{i,j}(e_k) = 0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j}.e'_j$.
Comme la famille $(e'_1, \dots, e'_p)$ est libre, on en déduit que : $\forall 1 \le k \le n, \forall 1 \le j \le p, \lambda_{k,j} = 0$.
• Elle est génératrice de $\mathscr{L}$(E,F).
On a évidemment : Vect($\mathscr{U}$) $\subset$ $\mathscr{L}$(E,F), car ce sont bien des applications linéaires de E dans F, et $\mathscr{L}$(E,F) est stable par combinaison linéaire.
Puis : $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \forall 1 \le k \le n, u(e_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}.e'_j = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} a_{i,j}.u_{i,j}(e_k) = \left(\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} a_{i,j}.u_{i,j}\right)(e_k)$.
Donc u et $\left(\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} a_{i,j}.u_{i,j}\right)$ sont deux applications linéaires de E dans F qui associent aux vecteurs de la

base $\mathcal{B}$ les mêmes images : elles sont donc égales, soit : $u = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} a_{i,j}.u_{i,j}$.

On vient donc de montrer que : $\mathcal{L}$(E,F) ⊂ Vect($\mathcal{U}$), et finalement : $\mathcal{L}$(E,F) = Vect($\mathcal{U}$).

• Puisque $\mathcal{L}$(E,F) admet une famille génératrice finie, c'est un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et sa dimension vaut le nombre de vecteurs dans la famille $\mathcal{U}$, soit : dim($\mathcal{L}$(E,F)) = n.p = dim(E).dim(F).

6. Matrices.

Définition 6.1 et théorème 6.1 : les espaces vectoriels de matrices

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans **K** peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel de dimension n.p.

Démonstration :

Les lois qui font de ces ensembles des **K**-espaces vectoriels ont été reprécisées au début.

La structure de **K**-espace vectoriel s'obtient alors sans difficulté.

Pour la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**), on utilise la famille $(E_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$, définie par :

$\forall\, 1 \le i \le n,\ \forall\, 1 \le j \le p,\ \forall\, 1 \le u \le n,\ \forall\, 1 \le v \le p,\ E_{i,j}^{u,v} = \delta_{i,u}.\delta_{j,v}$,

autrement dit, la matrice $E_{i,j}$ est constituée de 0, sauf le terme d'indices i et j (à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne) qui seul vaut 1.

Cette famille est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**), puisque :

$\forall$ A ∈ $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**), A = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.E_{i,j}$, $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) ⊂ Vect($(E_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$), d'où : $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) = Vect($(E_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$).

D'autre part, la famille est libre, puisque si : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.E_{i,j} = 0$, alors tous les coefficients $(a_{i,j})$ sont nuls (il suffit d'examiner les coefficients de la matrice somme qui sont justement les $a_{i,j}$).

Cette famille est appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**).

Donc $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**) est de dimension n.p.

Définition 6.2 : produit de matrices

Pour : A ∈ $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**), B ∈ $\mathcal{M}_{p,q}$(**K**), on définit la matrice produit : C ∈ $\mathcal{M}_{n,q}$(**K**), de A par B, par :

$\forall\, 1 \le i \le n,\ \forall\, 1 \le j \le q,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}.b_{k,j}$.

Théorème 6.2 : structure de groupe et d'algèbre pour $\mathcal{M}_n$(K)

L'ensemble $\mathcal{M}_n$(**K**) des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans **K** peut être muni d'une structure de **K**-algèbre de dimension n^2.

L'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n$(**K**) est un groupe pour la multiplication des matrices noté Gl_n(**K**), et appelé groupe linéaire d'ordre n.

Démonstration :

Là encore, on précise la deuxième loi interne, multiplicative, comme on l'a fait dans le premier théorème du chapitre, pour obtenir :

$\forall$ (A,B) ∈ $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, A.B = C, où : $\forall\, 1 \le i, j \le n,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}$,

et les propriétés attendues se démontrent sans problème.

L'algèbre $\mathcal{M}_n$(**K**) est associative, unitaire, d'élément unité la matrice I_n, et non commutative pour : n ≥ 2.

Définition 6.3 : matrice transposée d'une matrice

Soit : A ∈ $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**).

On appelle transposée de A la matrice notée : A' = ${}^tA$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}$(**K**), définie par :

$\forall\, 1 \le i \le p,\ \forall\, 1 \le j \le n,\ a'_{i,j} = a_{j,i}$,

et on a : $\forall$ A ∈ $\mathcal{M}_{n,p}$(**K**), ${}^t({}^tA) = A$.

Définition 6.4 : matrice symétrique, antisymétrique

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n$(**K**) est :

• symétrique si et seulement si : ${}^tA = A$,
• antisymétrique si et seulement si : ${}^tA = -A$.
L'ensemble des matrices symétriques n×n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Théorème 6.3 : dimension et supplémentarité de $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$

La transposition est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.
Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ forment des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de dimensions respectives $\frac{n.(n+1)}{2}$ et $\frac{n.(n-1)}{2}$.

Démonstration :

• Il est clair que : $\forall$ (A,B) $\in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}))^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $C = \lambda.A + \mu.B$, on a :
${}^tC = C'$, avec : $\forall\, 1 \le i \le p$, $\forall\, 1 \le j \le n$, $c'_{i,j} = c_{j,i} = \lambda.a_{j,i} + \mu.b_{j,i}$, et : ${}^tC = \lambda.{}^tA + \mu.{}^tB$.
• Pour la supplémentarité, on peut travailler par analyse-synthèse.
En effet, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Alors si on peut trouver : $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, et : $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, telles que : $M = S + A$, alors :
${}^tM = S - A$, et : $S = \frac{1}{2}.(M + {}^tM)$, et : $A = \frac{1}{2}.(M - {}^tM)$.
Réciproquement, l'unique couple (S,A) trouvé convient puisque :
${}^tS = \frac{1}{2}.({}^tM + M) = S$, ${}^tA = \frac{1}{2}.({}^tM - M) = -A$, et : $S + A = M$.
Donc pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe un unique couple appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})\times\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, dont la somme est égale à M : les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
• Pour leur dimension, on propose une base en disant, par exemple pour $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, que :
$\forall\, S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, $\forall\, 1 \le i, j \le n$, $s_{i,j} = s_{j,i}$, et en reprenant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on obtient :

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}.E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} s_{i,j}.(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

On obtient ainsi une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, dont on montre sans difficulté qu'elle est libre.
C'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, qui comporte : $n + \frac{(n-1).n}{2} = \frac{n.(n+1)}{2}$, éléments.
De même, on montre que la famille $((E_{i,j} - E_{j,i}))_{1\le i\le n-1, i+1\le j\le n}$, constitue une base de $\mathcal{A}(\mathbf{K})$, qui est donc de dimension : $\frac{(n-1).n}{2}$ (ou de dimension : $n^2 - \frac{(n-1).n}{2} = \frac{n.(n+1)}{2}$).

Définition 6.5 : matrice définie par blocs

On peut définir une matrice : $M \in \mathcal{M}_{p+s,a+r}(\mathbf{K})$, par blocs de la façon suivante :
$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, où : $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in M_{p,r}(\mathbf{K})$, $B \in M_{s,q}(\mathbf{K})$, $D \in M_{s,r}(\mathbf{K})$.

Définition 6.6 : matrices triangulaires ou diagonales par blocs

Une matrice : $M \in \mathcal{M}_{p+s,a+r}(\mathbf{K})$, écrite par blocs sous la forme :
$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, où : $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$, $C \in M_{p,r}(\mathbf{K})$, $B \in M_{s,q}(\mathbf{K})$, $D \in M_{s,r}(\mathbf{K})$,
est dite triangulaire par blocs si et seulement si on a : B = 0, et diagonale par blocs si : B = 0, et : C = 0.

Théorème 6.4 : somme et produit de matrices par blocs

Pour M et M' des matrices de $\mathcal{M}_{p+s,q+r}(\mathbf{K})$, écrites par blocs sous la forme :
$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$,
où : $(A,A') \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}))^2$, $(C,C') \in (\mathcal{M}_{p,r}(\mathbf{K}))^2$, $(B,B') \in (\mathcal{M}_{s,q}(\mathbf{K}))^2$, $(D,D') \in (\mathcal{M}_{s,r}(\mathbf{K}))^2$,

on a : M + M' = $\begin{pmatrix} A+A' & C+C' \\ B+B' & D+D' \end{pmatrix}$.

De même, pour M et M' écrites par blocs ayant des types compatibles, on a :

M.M' = $\begin{pmatrix} A.A'+C.B' & A.C'+C.D' \\ B.A'+D.B' & B.C'+D.D' \end{pmatrix}$.

Démonstration :

Il suffit de constater que dans les sommes ou les produits proposés, les coefficients obtenus par les deux formules coïncident.

7. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de changement de base.

Définition 7.1 : matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Un vecteur x de E admet une unique décomposition selon la base $\mathscr{B}$ de E de la forme : x = $\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$.

On définit la matrice colonne : X ∈ $\mathscr{M}_{n,1}$(**K**), des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$, en posant : X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 7.2 : matrice de changement de base (matrice de passage)

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de deux bases : $\mathscr{B} = (e_i)$, et : $\mathscr{B}' = (e'_i)$.

On a donc : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i$.

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice : P ∈ $\mathscr{M}_n$(**K**), ainsi obtenue.

La matrice P est donc construite en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 7.1 : lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans différentes bases

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de deux bases : $\mathscr{B} = (e_i)$, et : $\mathscr{B}' = (e'_i)$, et soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Soit x un vecteur de E, X et X' les matrices colonnes de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Alors : X = P.X'.

Démonstration :

Il suffit d'exprimer les différentes écritures d'un vecteur donné :

$\forall\ x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j.e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j.\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.x'_j\right).e_i$, et donc :

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}.x'_j$, ce qui globalement, s'écrit bien : X = P.X'.

8. Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases.

Définition 8.1 : matrice représentative d'une application linéaire dans des bases

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Soit : u ∈ $\mathscr{L}$(E,F).

Pour tout : $1 \leq j \leq p$, et tout vecteur e_j de $\mathscr{B}$, on note : $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.f_i$.

La matrice A ainsi obtenue est la matrice représentative de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Elle est donc construite en écrivant en colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ exprimées dans la base $\mathscr{C}$.

On la note parfois : A = mat(u,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$).

Théorème 8.1 : isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Alors : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\mathrm{mat}(\lambda.u + \mu.v, \mathcal{B},\mathcal{C}) = \lambda.\mathrm{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C}) + \mu.\mathrm{mat}(v,\mathcal{B},\mathcal{C})$.
L'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ qui à une application linéaire u de E dans F, fait correspondre $\mathrm{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration :

• Soient u et v des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, λ et μ des scalaires.
Notons : $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$, et : $U = \mathrm{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, $V = \mathrm{mat}(v,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Alors : $\forall 1 \le j \le p$, $(\lambda.u + \mu.v)(b_j) = \lambda.u(b_j) + \mu.v(b_j) = \lambda.\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}.c_i + \mu.\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}.c_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda.u_{i,j} + \mu.v_{i,j}).c_i$.

Il est alors clair, en écrivant les matrices, que : $\mathrm{mat}(\lambda.u+\mu.v,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \lambda.U + \mu.V$, ce que l'on voulait.

• Les espaces de départ et d'arrivée étant de même dimension égale à n.p, il suffit maintenant de démontrer que l'application considérée est injective.
Or si la matrice représentative de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est nulle, c'est que tout vecteur de $\mathcal{B}$ a pour image le vecteur nulle. Mais comme l'application nulle a cette propriété, et qu'il n'y a qu'une seule application linéaire de E dans F à l'avoir, c'est que : u = 0.

Théorème 8.2 : traduction matricielle du lien entre un vecteur et son image par un morphisme

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n, munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, de matrice représentative A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Pour un vecteur x de E, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, et Y la matrice colonne des coordonnées de son image : y = u(x), dans la base $\mathcal{C}$.
Alors : Y = A.X.

Démonstration :

Soit : $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$, et : $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$.

Alors : $\forall x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{p} x_j.b_j$, et : $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i.c_i = \sum_{j=1}^{p} x_j.u(b_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.c_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_j\right).c_i$,

ce qui correspond bien à : Y = A.X.

Définition 8.2 : application linéaire ou endomorphisme canoniquement associé à une matrice

Soit : $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, et : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
L'application linéaire u de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$, telle que : $\mathrm{mat}(u,\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n) = A$, où $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$, est appelée application linéaire canoniquement associée à A.
Dans le cas où : n = p, u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Théorème 8.3 : matrice d'une composée

Soient (E,+,.), (F,+,.), (G,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie, munis de bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
Alors : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G)$, $\mathrm{mat}(v\circ u,\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mathrm{mat}(v,\mathcal{C},\mathcal{D}).\mathrm{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Démonstration :

Notons : $\mathcal{B} = (b_1, .., b_q)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p)$, et : $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_n)$,
puis : $U = \mathrm{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, $V = \mathrm{mat}(v,\mathcal{C},\mathcal{D})$, et : $W = \mathrm{mat}(v\circ u,\mathcal{B},\mathcal{D})$.
Alors : $\forall 1 \le k \le q$,

• $v\circ u(b_k) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,k}.d_i$, et par ailleurs :

• $v(u(b_k)) = v\left(\sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.c_j\right) = \sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.v(c_j) = \sum_{j=1}^{p} u_{j,k}.\sum_{i=1}^{n} v_{i,j}.d_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} v_{i,j}.u_{j,k}\right).d_i$.

Donc : $\forall 1 \le i \le n$, $\forall 1 \le k \le q$, $w_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} v_{i,j}.u_{j,k}$, ce qui correspond bien au produit matriciel annoncé.

Théorème 8.4 : liens entre les matrices de passage pour trois bases de l'espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni de trois bases : $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$, $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\le i\le n}$, et : $\mathcal{B}'' = (e''_i)_{1\le i\le n}$.

Alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{mat}(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

De plus : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Par ailleurs, les matrices P et P' de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ sont inverses l'une de l'autre.

Enfin, la relation : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$, peut se retrouver en utilisant le lien existant entre les coordonnées d'un même vecteur de E dans les trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

Démonstration :

Puisque : $\forall\ 1 \le j \le n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.e_i = id_E(e'_j)$, il est immédiat que : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{mat}(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Puis : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \text{mat}(id_E, \mathcal{B}',\mathcal{B}).\text{mat}(id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}') = \text{mat}(id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$.

Par ailleurs, puisque : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \text{mat}(id_E, \mathcal{B},\mathcal{B}) = I_n$, d'une part, et d'autre part : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$, les matrices $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont bien inverses l'une de l'autre.

Enfin, si on note plus simplement : $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $P' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$, $P'' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$, X, X' et X'' les matrices colonnes de coordonnées d'un vecteur x de E dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors :

$X = P.X'$, $X' = P'.X''$, d'où : $X = P.P'.X''$, et d'autre part : $X = P''.X''$, soit finalement : $P'' = P.P'$.

Théorème 8.5 : lien entre les matrices d'un même endomorphisme dans différentes bases

Soient (E,+,.) et (F,+,.) des **K**-espaces vectoriels de dimension finie p et n.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, P et Q les matrices de passages A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ d'une part, et de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'autre part.

Soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec : $A = \text{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C})$, $A' = \text{mat}(u,\mathcal{B}',\mathcal{C}')$.

Alors : $A' = Q^{-1}.A.P$.

En particulier, si : $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, et : $u \in \mathcal{L}(E)$, on a : $P = Q$, et : $A' = P^{-1}.A.P$.

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $Q^{-1}.A.P = \text{mat}(id_E,\mathcal{C},\mathcal{C}').\text{mat}(u,\mathcal{B},\mathcal{C}).\text{mat}(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \text{mat}(u,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = A'$.

9. Somme de sous-espaces vectoriels, sommes directes, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 9.1 et définition 9.1 : somme de sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $(E_i)_{1\le i\le n}$ des sous-espaces vectoriels de E.

L'ensemble des vecteurs de E, s'écrivant comme sommes de vecteurs des différents sous-espaces E_i, soit donc :

$E_1 + \ldots + E_n = \{x \in E, \exists\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1\times E_2\times\ldots\times E_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\}$,

est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$.

Démonstration :

Il est clair que $E_1 + \ldots + E_n$ est inclus dans E, puisque constitué de vecteurs, sommes de vecteurs de E qui est lui-même stable par combinaison linéaire.

De plus $E_1 + \ldots + E_n$ est non vide, puisque chaque E_i est non vide (ils contiennent tous le vecteur nul) et donc : $0 + \ldots + 0 = 0$, est encore élément de E.

Enfin : $\forall\ (x,y) \in (E_1 + \ldots + E_n)^2$, $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\exists\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in (E_1\times E_2\times\ldots\times E_n)^2$, et :

$\lambda.x + \mu.y = (\lambda_1.x_1 + \mu_1.y_1) + \ldots + (\lambda_n.x_n + \mu_n.y_n) \in E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$, puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 9.2 : autre définition d'une somme de sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $(E_i)_{1\le i\le n}$ des sous-espaces vectoriels de E.

Alors : $E_1 + \ldots + E_n = \text{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$.

C'est donc en particulier le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$.

Démonstration :

• Tout élément de $E_1 + \ldots + E_n$ est somme d'éléments des différents E_i, donc comme combinaison linéaire d'éléments de $E_1 \cup \ldots \cup E_n$, c'est un élément de $\text{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$.

• Un élément de $\text{Vect}(E_1 \cup \ldots \cup E_n)$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.

En regroupant dans cette combinaison linéaire (impliquant un nombre fini de vecteurs) ceux qui

appartiennent à E_1, à E_2, et à chaque E_i, on fait apparaître une somme de vecteurs, chacun appartenant à l'un des E_i et à ce titre, on obtient bien un élément de $E_1 + \ldots + E_n$.
• A ce titre, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $E_1 \cup \ldots \cup E_n$, donc tous les E_i.

Définition 9.2 : somme directe de deux ou de plusieurs sous-espaces vectoriels

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme (F + G) est directe, si et seulement si on a : $F \cap G = \{0\}$.
Lorsque la somme de F et de G est directe, elle est notée : $F \oplus G$.
Plus généralement, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $(E_1 + \ldots + E_n)$ est directe si et seulement si l'intersection de chaque E_i avec la somme de tous les autres est réduite à {0}, soit :
$\forall\, 1 \leq i \leq n,\ E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n) = \{0\}$.
Dans ce cas, à nouveau, la somme de ces sous-espaces vectoriels se note : $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

Définition 9.3 : sous-espaces supplémentaires

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si on a : $E = F \oplus G$.

Théorème 9.3 : existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.
Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E, tel que : $E = F \oplus G$.
On dit alors que G est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de F dans E.
On a de plus, pour tout supplémentaire G de F dans E : $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration :

F étant lui-même de dimension finie, il admet une base $(e_1, \ldots, e_p)$ qui peut être complétée en une base de E : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Posons : $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
Alors : $F \cap G = \{0\}$.
En effet : $\forall\, x \in F \cap G$,
• $x \in F$, et : $\exists\, (x_1, \ldots x_p) \in \mathbf{K}^p$, $x = x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p$,
• $x \in G$, et : $\exists\, (x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{n-p}$, $x = x_{p+1}.e_{p+1} + \ldots + x_n.e_n$,
et donc : $x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p - x_{p+1}.e_{p+1} - \ldots - x_n.e_n = 0$.
Or puisque la famille $\mathscr{B}$ est une base de E, elle est libre et tous les coefficients sont nuls, d'où : $x = 0$.
Puis : $F + G = E$.
En effet : $\forall\, x \in E$, $\exists\, (x_1, \ldots x_n) \in \mathbf{K}^n$, $x = (x_1.e_1 + \ldots + x_p.e_p) + (x_{p+1}.e_{p+1} + \ldots + x_n.e_n)$, puisque $\mathscr{B}$ est génératrice de E et le vecteur x se décompose suivant F+G.
Donc : $E \subset F+G$, et comme l'inclusion inverse est évidente, on a bien : $E = F+G$.
Enfin, si G est un supplémentaire quelconque de F, on a :
$\dim(G) = \dim(E) + \dim(F \cap G) - \dim(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

Théorème 9.4 : des quatre dimensions ou formule de Grassmann

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors (F + G) est de dimension finie ainsi que $F \cap G$, et :
$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration :

Puisque F et G sont de dimension finie, ils admettent tous deux une famille génératrice finie, et la réunion de ces deux familles fournit une famille génératrice finie de F+G qui est donc de dimension finie.
Puis $(F \cap G)$ étant inclus dans un espace de dimension finie (F+G), il est lui-même de dimension finie.
Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $(F \cap G)$.
Comme $(F \cap G)$ est un sous-espace vectoriel de F et de G, on peut considérer un supplémentaire F' de $(F \cap G)$ dans F et une $(a_{k+1}, \ldots, a_p)$ de ce supplémentaire d'une part, et un supplémentaire G' de $(F \cap G)$ dans G, ainsi qu'une base $(b_{k+1}, \ldots, b_q)$ de cet autre supplémentaire d'autre part.
Montrons que $(e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_p, b_{k+1}, \ldots, b_q)$ est une base de F+G.
• C'est une famille génératrice de F+G, puisque ce sont tous bien des vecteurs de F+G et :
$\forall\, u \in (F+G)$, $\exists\, (x,y) \in F \times G$, $u = x+y$, et : $\exists\, (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, $\exists\, (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbf{K}^q$, tels que :
$x = \lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \ldots + \lambda_p.a_p$, puisque : $F = (F \cap G) \oplus F'$, et :
$y = \mu_1.e_1 + \ldots + \mu_k.e_k + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \ldots + \mu_q.b_q$, puisque là aussi : $G = (F \cap G) \oplus G'$, d'où :

$u = (\lambda_1 + \mu_1).e_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k).e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \ldots + \lambda_p.a_p + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \ldots + \mu_q.b_q$.

• C'est une famille libre.

Soit en effet : $\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \ldots + \lambda_p.a_p + \mu_{k+1}.b_{k+1} + \ldots + \mu_q.b_q = 0$.

Alors : $(\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_k.e_k + \lambda_{k+1}.a_{k+1} + \ldots + \lambda_p.a_p) = -(\mu_{k+1}.b_{k+1} + \ldots + \mu_q.b_q) \in (F\cap G')$.

Donc ce vecteur appartient à G' car : $(F\cap G') \subset G'$, et à $(F\cap G)$ car : $(F\cap G') \subset (F\cap G)$.

Donc il est nul, et la famille $(b_{k+1}, \ldots, b_q)$ étant libre, tous les coefficients correspondant sont nuls.

Puis : $\lambda_1.e_1 + \ldots + \lambda_k.e_k = -(\lambda_{k+1}.a_{k+1} + \ldots + \lambda_p.a_p)$, et là encore comme F et F' sont supplémentaires, le vecteur apparaissant dans cette égalité est nul, et tous les coefficients sont nuls.

• C'est donc une base de (F+G) et :

$\dim(F+G) = k + (p - k) + (q - k) = p + q - k = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$.

Définition 9.4 : décomposition d'un espace vectoriel en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que E se décompose en somme directe suivant les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ si et seulement si : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

Théorème 9.5 : propriété récursive des sommes directes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.

Si la somme $(E_1 + \ldots + E_n)$ des n sous-espaces vectoriels est directe, alors la somme de $(n - 1)$ quelconques parmi eux l'est encore, et la somme d'une sous-famille quelconque de parmi les n aussi.

Démonstration :

Montrons que la somme $(E_1 + \ldots + E_{n-1})$ est encore directe, et pour cela étudions : $(E_2 + \ldots E_{n-1}) \cap E_1$.

Soit donc un élément : $x \in E_1$, et : $x \in (E_2 + \ldots + E_{n-1})$.

Alors : $x = x_1 \in E_1$, et : $\exists (x_2, \ldots x_{n-1}) \in E_2\times\ldots\times E_{n-1}$, $x = x_2 + \ldots + x_{n-1}$,

d'où : $x = x_2 + \ldots + x_{n-1} + 0 \in (E_2 + \ldots + E_n)$, et : $x \in E_1 \cap (E_2 + \ldots + E_n)$, donc : $x = 0$.

On peut généraliser ce résultat à l'intersection d'un quelconque des $(n - 1)$ avec la somme des $(n - 2)$ autres, puis à $(n - 1)$ quelconques parmi les n de départ.

Enfin, par récurrence descendante, toute sous-famille d'une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe, est encore en somme directe.

Théorème 9.6 : définition équivalente d'une somme directe, d'une décomposition en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.

• La somme $E_1 + \ldots + E_n$ est directe si et seulement si le vecteur nul de E admet comme unique décomposition : $0 = 0 + \ldots + 0$, comme somme de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.

• E se décompose en somme directe suivant les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ autrement dit on a : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.

Démonstration :

• Si la somme est directe, soit : $0 = x_1 + \ldots + x_n$, une décomposition du vecteur nul suivant $E_1 + \ldots + E_n$.

Alors : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $x_i = -x_1 - \ldots - x_{i-1} - x_{i+1} - \ldots - x_n$.

Donc : $x_i \in E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n)$, donc est nul et l'unique décomposition du vecteur nul suivant la somme est bien : $0 = 0 + \ldots + 0$.

Si réciproquement, on suppose que l'unique décomposition de 0 suivant la somme des sous-espaces est la décomposition précédente, alors cette somme est directe.

En effet, si pour : $1 \leq i \leq n$, on a : $x_i \in E_i \cap (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n)$, alors :

$x_i = x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n$, et : $0 = x_1 + \ldots + x_{i-1} - x_i + x_{i+1} + \ldots + x_n$,

soit une décomposition de 0 suivant la somme.

Donc : $x_1 = \ldots = x_{i-1} = -x_i = x_{i+1} = \ldots = x_n$, et x_i est bien nul.

• Supposons maintenant que : $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

Alors E étant la somme des sous-espaces vectoriels E_i, il existe pour tout vecteur de E une décomposition suivant cette somme, comme somme de vecteurs de $E_1, \ldots, E_n$.

Supposons maintenant pour un vecteur x de E, deux telles décompositions.

Alors : $x = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, avec : $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1\times\ldots\times E_n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1\times\ldots\times E_n$.

Donc : $(x_1 - y_1) + \ldots + (x_{n-1} - y_{n-1}) = y_n - x_n \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1})$, et donc est nul, et : $x_n = y_n$.

On termine par récurrence descendante pour obtenir : $x_n = y_n$, $x_{n-1} = y_{n-1}$, …, $x_1 = y_1$, et la décomposition est unique.

Réciproquement, supposons maintenant que tout vecteur de E se décompose de façon unique comme

somme de vecteurs de $E_1, \dots, E_n$.
Alors : $E = E_1 + \dots + E_n$, puisque tout vecteur de E est bien somme de vecteurs appartenant aux E_i.
Montrons maintenant que la somme est directe, et pour cela, soit : $x \in E_1 \cap (E_2 + \dots + E_n)$, par exemple.
Alors : $x = x_1 = x_2 + \dots + x_n$, avec : $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, et : $0 = 0 + \dots + 0 = x_1 - x_2 - \dots - x_n$.
Cela fournit deux décompositions du vecteur nul suivant $E_1 + \dots + E_n$ et : $0 = x_1 = \dots = x_n$, puis : $x = 0$.
La somme est bien directe.

Théorème 9.7 : caractérisation en dimension finie d'une décomposition en somme directe
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$,
- $\dim(E_1 + \dots + E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$, et : $E = E_1 + \dots + E_n$,
- on obtient une base de E en réunissant des bases choisies dans chaque E_i.

Démonstration :
- Montrons que : i) $\Rightarrow$ ii).

Si : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, alors :
$E = E_1 + \dots + E_n$, et : $\dim(E_1 + \dots + E_n) = \dim(E_1 + \dots + E_{n-1}) + \dim(E_n) - \dim((E_1 + \dots + E_{n-1}) \cap E_n)$.
Comme la dernière intersection est réduite à {0}, sa dimension est nulle.
On continue ensuite par récurrence descendante pour obtenir le résultat voulu.
- Montrons : ii) $\Rightarrow$ iii).

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des bases des différents E_i, et : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$.
Puisque chaque base $\mathcal{B}_i$ est génératrice de E_i, $\mathcal{B}$ est génératrice de E, et : $\text{card}(\mathcal{B}) \geq \dim(E)$.
Comme de plus le nombre d'éléments de $\mathcal{B}$ est :
$\text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n) = \dim(E)$, on a : $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
Donc $\mathcal{B}$ est bien une base de E.
- Montrons que : iii) $\Rightarrow$ i).

Soient donc $\mathcal{B}$ une base de E obtenue comme réunion de base $\mathcal{B}_i$ des différents E_i.
$\mathcal{B}$ étant génératrice de E, on en déduit que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc des $\mathcal{B}_i$, donc, en regroupant les différents vecteurs appartenant à chaque E_i, comme somme de vecteurs des différents E_i.
Soit donc : $E = E_1 + \dots + E_n$ (en fait, une simple inclusion, mais l'inverse est immédiate).
Puis soit par exemple : $x \in E_1 \cap (E_2 + \dots + E_n)$.
Alors : $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, $x = x_1 = x_2 + \dots + x_n$.
En exprimant les différents vecteurs x_i suivant les bases $\mathcal{B}_i$, cela fournit, par différence une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ égale à 0.
Mais $\mathcal{B}$ étant une famille libre, tous les coefficients de cette combinaison sont nuls, et : $x = 0$.
On en déduit que la somme est directe (en obtenant le même résultat pour les autres intersections).

Définition 9.5 : base d'un espace vectoriel adaptée à un sous-espace vectoriel, à une somme directe de sous-espaces vectoriels
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.
On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est adaptée à F, si elle est obtenue comme réunion d'une base de F et d'une base d'un supplémentaire de F dans E.
On dit qu'une base de E est adaptée à une décomposition de E en somme directe, si elle obtenue comme réunion de bases de chacun des sous-espaces vectoriels concernés par cette somme directe.

10. Projecteurs.

Définition 10.1 : projecteurs associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple : $(y,z) \in F \times G$, tel que : $x = y + z$.
On appelle : $p(x) = y$, le projeté de x sur F parallèlement à G et : $q(x) = z$, le projeté de x sur G parallèlement à F.
Les applications p et q de E dans E sont appelés projecteurs associés à la décomposition : $E = F \oplus G$.

Théorème 10.1 : propriétés pour des projecteurs associés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p et q les projecteurs associés à la décomposition : $E = F \oplus G$.
Alors :
- $p \in \mathscr{L}(E)$, $q \in \mathscr{L}(E)$,
- $pop = p$, $qoq = q$, $poq = qop = 0$, $p + q = id_E$,
- $\ker(p) = Im(q) = G$, $\ker(q) = Im(p) = F$.

Démonstration :

- Pour : $(x,x') \in E^2$, $(\lambda,\lambda') \in \mathbf{K}^2$, on décompose : $x = y + z$, $x' = y' + z'$, suivant : $E = F \oplus G$,
et : $\lambda.x + \lambda'.x' = (\lambda.y + \lambda'.y') + (\lambda.z + \lambda'.z')$, est une décomposition de $[\lambda.x + \lambda'.x']$ suivant : $E = F \oplus G$.
Mais une telle décomposition étant unique, c'est LA décomposition de $[\lambda.x + \lambda'.x']$ suivant : $E = F \oplus G$.
Puis : $p(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.y + \lambda'.y'$, par décomposition, et : $p(\lambda.x + \lambda'.x') = \lambda.p(x) + \lambda'.p(x')$.
Le résultat est identique pour q.
- Il est presque immédiat que : $pop = p$, puisque, avec les notations précédentes, pour : $x \in E$,
$p(x) = p(x) + 0$, avec : $p(x) \in F$, $0 \in G$, et : $p(p(x)) = p(x)$, et : $q(p(x)) = 0$.
De même pour q.
Puis : $x = y + z = p(x) + q(x)$, et : $id_E = p + q$, puisque cette égalité est vérifiée pour tout vecteur x de E.
- $\forall x \in F$, $x = p(x)$, et donc : $F \subset Im(p)$. Mais vu la définition de p, on a aussi : $Im(p) \subset F$, d'où l'égalité.
Puis : $\forall x \in G$, $p(x) = 0$, et : $x \in \ker(p)$. Mais on a également : $\forall x \in \ker(p)$, $x = 0 + z$, et : $x \in G$, d'où lé encore l'égalité.
On a encore des résultats identiques pour q.

Théorème 10.2 : caractérisation des sous-espaces vectoriels définissant un projecteur

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $p \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $pop = p$.
Alors Im(p) et ker(p) sont supplémentaires dans E, et p est un projecteur de E sur Im(p) parallèlement à ker(p).

Démonstration :

- Soit : $x \in (\ker(p) \cap Im(p))$.
Alors : $\exists y \in E$, $y = p(x)$. Mais de plus : $p(x) = 0 = p(p(y)) = p(y) = x$. Donc : $x = 0$.
Image et noyau de p sont en somme directe dans E.
- Soit : $x \in E$. Alors : $p(x) = p(p(x))$, et : $p(x - p(x)) = 0$, d'où : $[x - p(x)] = z \in \ker(p)$.
Autrement dit : $x = p(x) + z$, ce qui fournit une décomposition de x selon $(Im(p) + \ker(p))$.
Finalement les deux espaces image et noyau de p sont bien supplémentaires dans E.
- Soit enfin : $x \in E$, et sa décomposition en : $x = y + z$, avec : $y \in Im(p)$, $z \in \ker(p)$.
Alors : $\exists x' \in E$, $y = p(x')$, et : $p(x) = p(y) + p(z) = p(p(x')) + 0 = p(x') = y$.
Donc p est bien la projection de E sur Im(p) parallèlement à ker(p).

Définition 10.2 : famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
On note p_i le projecteur de E sur E_i parallèlement à la somme $(E_1 \oplus \dots \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus \dots \oplus E_n)$.
La famille $(p_i)_{1\le i\le n}$ est dite associée à la décomposition.

Théorème 10.3 : généralisation du théorème 10.1

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$, des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et soit $(p_i)_{1\le i\le n}$ la famille de projecteurs associée à cette décomposition.
Alors on a :
- $\forall 1 \le i \le n$, $p_i^2 = p_i$,
- $\forall 1 \le i \ne j \le n$, $p_i \circ p_j = 0$,
- $p_1 + \dots + p_n = id_E$.

Démonstration :

Puisque les p_i sont tous des projecteurs de E, on a évidemment : $\forall 1 \le i \le n$, $p_i^2 = p_i$.
Soit maintenant x un vecteur quelconque de E, et : $x = x_1 + \dots x_n$, sa décomposition suivant la somme directe.
Alors : $\forall 1 \le i \ne j \le n$, $p_j(x) = x_j \in E_j$.

Or : $E_j \cap E_i \subset (E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n) \cap E_i = \{0\}$, et donc : $p_i(x_j) = 0$.
Soit bien : $p_i \circ p_j = 0$.
Enfin : $(p_1 + \ldots + p_n)(x) = x_1 + \ldots + x_n = x$, on a bien également : $p_1 + \ldots + p_n = id_E$.

11. Polynômes d'interpolation de Lagrange *(hors programme).*

Définition 11.1 : polynômes de Lagrange

Soient : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires réels ou complexes distincts deux à deux.
On appelle polynômes de Lagrange associés à la famille $(a_i)_{0 \le i \le n}$ les polynômes $(L_i)_{0 \le i \le n}$ définis par :

- $\forall\ 0 \le i \le n$, $L_i(a_i) = 1$,
- $\forall\ i \ne j$, $L_i(a_j) = 0$.
- $\forall\ 0 \le i \le n$, $d°(L_i) = n$.

Théorème 11.1 : existence et unicité des bases de Lagrange

Soient : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires réels ou complexes distincts deux à deux.
Il existe une unique famille $(L_i)_{0 \le i \le n}$ de polynômes vérifiant les conditions d'interpolation de Lagrange.
Ils forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée base de Lagrange de $\mathbf{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_i)_{0 \le i \le n}$.
De plus : $\forall\ 0 \le i \le n$, $L_i = \dfrac{(X-a_0)\ldots(X-a_{i-1}).(X-a_{i+1})\ldots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1}).(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$.

Démonstration :

Démontrons que les conditions proposées donnent ces polynômes et qu'ils forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
• Les polynômes doivent être de degré n, et chacun admettre n racines distinctes.
Donc : $\forall\ 0 \le i \le n$, $L_i = \lambda_i.(X - a_0)\ldots(X - a_{i-1}).(X - a_{i+1})\ldots(X - a_n)$, puisqu'après factorisation, il reste en facteur un polynôme constant.
La valeur que doit prendre le polynôme en a_i donne alors la valeur de la constante, puis la forme finale du polynôme L_i cherché.
• Réciproquement, ces polynômes sont bien tous de degré n, chaque L_i vaut 1 en a_i et admet comme racines toutes les autres valeurs.
• Ils forment bien une base de $\mathbf{K}_n[X]$, puisqu'ils sont d'une part au nombre de (n+1) soit la dimension de $\mathbf{K}_n[X]$, et d'autre part, ils forment une famille libre.
En effet, si : $\lambda_0.L_0 + \ldots + \lambda_n.L_n = 0$,
alors en considérant les fonctions polynômes associées évaluées en les différents a_i, on obtient :
$\forall\ 1 \le i \le n$, $\lambda_i.1 = 0$.
Enfin, si on veut les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbf{K}_n[X]$ dans cette base, il suffit d'écrire :
$P = \lambda_0.L_0 + \ldots + \lambda_n.L_n$, puis à nouveau d'évaluer cette égalité en les a_i, pour obtenir :
$P = P(a_0).L_0 + \ldots + P(a_n).L_n$.

12. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

Définition 12.1 et théorème 12.1 : trace d'une matrice carrée

Soit : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$.

On définit la trace de A comme la somme des éléments diagonaux de A, soit : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Démonstration :

Il est immédiat que tr est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$, puisqu'elle est bien à valeurs dans $\mathbf{K}$, et d'autre part : $\forall\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$,

$$tr(\lambda.A + \mu.B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda.a_{i,i} + \mu.b_{i,i}) = \lambda.\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu.\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda.tr(A) + \mu.tr(B).$$

Théorème 12.2 : propriétés basiques de la trace des matrices

$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $tr({}^tA) = tr(A)$.
$\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $tr(A.B) = tr(B.A)$.
Plus généralement, la trace d'un produit fini de matrices carrées est inchangée par permutation circulaire des matrices dans le produit.

Démonstration :

Le premier résultat est immédiat, puisque pour une matrice carrée A, les matrices A et ${}^tA$ ont les mêmes éléments diagonaux, donc même trace.
Pour le deuxième point, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Soit : C = A.B.

Alors : $\forall\ 1 \le i \le n$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,i}$, et : $\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,i} = \sum_{(i,k)\in N_n^2} a_{i,k}.b_{k,i}$.

Le résultat étant une formule symétrique en A et B, on a bien : tr(A.B) = tr(B.A).
Enfin, dans un produit de p matrices carrées $n\times n$:
$\mathrm{tr}(A_1\ldots A_p) = \mathrm{tr}(A_1.[A_2\ldots A_p]) = \mathrm{tr}([A_2\ldots A_p].A_1) = \mathrm{tr}(A_2\ldots A_p.A_1)$,
que l'on peut généraliser par récurrence à une permutation circulaire quelconque de ces p matrices.

Théorème 12.3 et définition 12.2 : trace d'un endomorphisme

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie et : $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors la trace de la matrice représentative de u dans une base de E est indépendante de cette base.
On note alors tr(u) la valeur commune de toutes ces traces, soit : $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{mat}(u,\mathcal{B}))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et A et A' les matrices représentatives de u dans ces deux bases.
Alors : $A' = P^{-1}.A.P$, et : $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(P^{-1}.A.P) = \mathrm{tr}(A.P.P^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

Théorème 12.4 : trace d'un projecteur

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Si p est un projecteur de E alors : rg(p) = tr(p).

Démonstration :

Puisque Im(p) et ker(p) sont supplémentaires dans E, considérons une base $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de Im(p) et une base $(e_{k+1}, \ldots e_n)$ de ker(p).

Alors la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{pmatrix}$, et sa trace vaut : k = dim(Im(p)) = rg(p).

13. Dual d'un espace vectoriel.

Définition 13.1 : dual d'un espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On appelle dual de E l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbf{K})$, ensemble des formes linéaires sur E et on le note E*.

Théorème 13.1 : dimension du dual

Soit (E,+,.) un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Alors : dim(E*) = n = dim(E).

Démonstration :

Puisque : $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbf{K})$, on a : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E,\mathbf{K})) = \dim(E).\dim(\mathbf{K}) = \dim(E).1 = n = \dim(E)$.

Définition 13.2 : hyperplan

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement si H admet un supplémentaire de dimension 1dans E.
Lorsque E est de dimension finie, cela signifie que H est de dimension (dim(E) – 1).

Théorème 13.2 : noyau des formes linéaires non nulles

Soit (E,+,.) un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit : $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, et : $H = \ker(\varphi)$. Alors H est un hyperplan de E.
De plus, si : $\psi \in E^*$, et s'annule sur H, alors : $\exists\ \lambda \in \mathbf{K}$, $\psi = \lambda.\ \varphi$.
Si enfin le noyau de ψ est H, alors : $\lambda \neq 0$.

Démonstration :

• Puisque φ est une application linéaire de E dans **K**, on peut lui appliquer le théorème du rang.
Or φ est non nulle, donc : $\exists x \in E$, $\varphi(x) \neq 0$, et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \geq 1$.
Mais de plus : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbf{K}$, et : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq 1$.
Finalement : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$, et : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{K}$,
avec de plus : $\dim(H) = \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n - 1$.

• Soit maintenant une autre forme linéaire ψ s'annulant sur H.
Soit x_0 un vecteur n'appartenant pas à H. Alors : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$.
Puis : $\varphi(x_0) \neq 0$, sinon φ serait nulle sur E.
Enfin : $\forall x \in E$, $\exists x_H \in H$, $\exists \alpha \in \mathbf{K}$, $x = x_H + \alpha.x_0$,
et : $\psi(x) = \alpha.\psi(x_0) = \alpha.\dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(x_0) = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(\alpha.x_0 + x_H) = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}.\varphi(x)$.
En posant : $\lambda = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)} \in \mathbf{K}$, on a bien : $\psi = \lambda.\varphi$.
Si enfin, ψ a pour noyau H, alors λ est non nulle, sinon ψ s'annulerait sur E tout entier.

Théorème 13.3 et définition 13.3 : (hors programme) base duale d'une base en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E.
Alors la famille de formes linéaires : $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, définies par :
$\forall 1 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronnecker, qui vaut 1 si : $i = j$, et 0 si : $i \neq j$,
est une base de E* appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.
On appelle aussi ces formes linéaires les formes coordonnées associées à la base $\mathcal{B}$.
En particulier, si : $x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, alors : $\forall 1 \leq k \leq n$, $e_k^*(x) = x_k$.

Démonstration :

Les formes linéaires ainsi définies sont correctement définies, puisqu'elles le sont par l'image des vecteurs d'une base de E.
Cette famille est libre, car :
$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, tel que : $\lambda_1.e_1^* + \dots \lambda_n.e_n^* = 0$, alors : $\forall 1 \leq k \leq n$, $[\lambda_1.e_1^* + \dots \lambda_n.e_n^*](e_k) = 0 = \lambda_k$.
Donc c'est une famille libre de n éléments de E* qui est de dimension n, et c'est bien une base de E*.

Théorème 13.4 et définition 13.4 : (hors programme) base préduale (ou anté-duale) d'une base de E*

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n et : $\mathcal{R} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, une base de E*.
Il existe une unique base $\mathcal{C}$ de E qui a pour duale la base $\mathcal{R}$ soit telle que : $\mathcal{C}^* = \mathcal{R}$.
Cette base $\mathcal{C}$ est appelée base préduale de $\mathcal{R}$.

Démonstration :

• Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E, et $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ leurs bases duales respectives.
Soit maintenant P la matrice de passage dans E de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$.
Alors : $Q = {}^tP^{-1}$.
En effet, en notant : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, on a :
$\forall 1 \leq i, j \leq n$, $\delta_{i,j} = e'^*_i(e'_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{k,i}.e_k^*\left(\sum_{u=1}^{n} p_{u,j}.e_u\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{k,i}.p_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} q'_{i,k}.p_{k,j}$, avec : $q'_{i,k} = q_{k,i}$.
On a donc montré que : ${}^tQ.P = I_n$, soit bien : $Q = {}^tP^{-1}$.

• Soient maintenant que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E aient pour base duale la base $\mathcal{R}$ de E* donnée, et appelons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est ${}^tP^{-1}$, mais puisque : $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'^* = \mathcal{R}$, elle vaut aussi : I_n.
Donc : $P = I_n$, et : $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, autrement dit, si une base répond au problème posé, elle est unique.

• Enfin, soit $\mathcal{B}_0$ une base de E, $\mathcal{B}_0^*$ sa base duale, Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la base de E telle que la matrice ${}^tQ^{-1}$ soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{C}$.
Alors la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{C}^*$ est : $P = Q^{-1}.{}^t({}^tQ^{-1})^{-1} = Q^{-1}.Q = I_n$, et : $\mathcal{C}^* = \mathcal{R}$.

Théorème 13.5 : équations d'un hyperplan

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit H un hyperplan de E.
Pour un vecteur x de E, on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Alors : $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, tel que : $(x \in H) \Leftrightarrow (a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0)$.
La dernière égalité est appelée « équation de H dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ ».
De plus, si : $b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0$, est une autre équation de H dans la base $\mathscr{B}$, alors :
$\exists \lambda \in \mathbf{K}^*, \forall 1 \leq i \leq n, b_i = \lambda.a_i$.

Démonstration :

• Puisque H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle dont H est le noyau.
Il suffit pour cela de considérer une base $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ de H, de la compléter avec un vecteur e'_n en une base de E, de considérer la base duale de cette base $(e'_1{}^*, \dots, e'_n{}^*)$ et la forme linéaire $e'_n{}^*$ a bien pour noyau H.
• Soit maintenant la base $\mathscr{B}$ proposée.
Alors $e'_n{}^*$ peut se décomposer suivant la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ en : $e'_n{}^* = a_1.e_1^* + .. + a_n.e_n^*$, où les coefficients $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des scalaires non tous nuls, puisque : $e'_n{}^* \neq 0$.
Et on a : $\forall x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $(x \in H) \Leftrightarrow (e'_n{}^*(x) = 0) \Leftrightarrow (a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = 0)$.
• Soit enfin : $b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0$, une autre équation de H dans la base $\mathscr{B}$.
Cela signifie : $\forall x \in E$, $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, $(x \in H) \Leftrightarrow (b_1.x_1 + \dots + b_n.x_n = 0) \Leftrightarrow (\varphi(x) = 0)$,
où φ est la forme linéaire : $\varphi = b_1.e_1^* + \dots + b_n.e_n^*$.
Autrement dit : $H = \ker(\varphi)$.
Mais deux formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles entre elles et :
$\exists \lambda \in \mathbf{K}^*, \forall 1 \leq i \leq n, b_i = \lambda.a_i$.
Remarque : λ est non nul car λ et e_n^* ont exactement le même noyau H.

14. Groupe symétrique *(hors programme).*

Définition 14.1 : $\mathscr{S}_n$

Soit : $n \geq 1$.
L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même est noté $\mathscr{S}_n$.
Ses éléments sont appelés permutations de $\mathbb{N}_n$.

Théorème 14.1 : le groupe symétrique ($\mathscr{S}_n$,o)

Soit : $n \geq 1$.
L'ensemble $\mathscr{S}_n$ muni de la loi o de composition forme un groupe, appelé groupe symétrique d'ordre n.
Il compte n! éléments.

Démonstration :

La composée de deux éléments de $\mathscr{S}_n$, donc de deux bijections de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même, est bien une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même, et la loi est donc bien une loi de composition interne.
Elle est associative, et possède un élément neutre, l'identité de $\mathbb{N}_n$.
Tout élément de $\mathscr{S}_n$ étant une bijection de $\mathbb{N}_n$, possède une réciproque qui est l'inverse de cet élément pour la loi o.
Finalement, c'est bien un groupe (non commutatif pour : $n \geq 3$).
Pour dénombrer ses éléments, on peut utiliser une arborescence.
L'élément 1 peut avoir n images possibles, puis cette image étant choisie, l'élément 2 n'a plus que $(n - 1)$ images possibles et ainsi de suite jusqu'à l'élément n, soit au total n! possibilités.

Définition 14.2 : orbite d'un élément sous l'action d'un cycle

Soit : $n \geq 1$, et : $\sigma \in \mathscr{S}_n$.
Pour : $k \in \mathbb{N}_n$, on appelle orbite de k sous l'action de σ l'ensemble : $Orb(k) = \{\sigma^p(k), p \in \mathbb{Z}\}$.
C'est donc l'ensemble des images de k par σ et ses itérées ainsi que par les itérées de sa réciproque.

Théorème 14.2 : description des orbites d'une permutation

Soit : $n \geq 1$, et : $\sigma \in \mathscr{S}_n$.
Deux orbites d'éléments de $\mathbb{N}_n$ sous l'action de σ sont soit égales, soit disjointes.

Démonstration :

Soit k et k' deux éléments de $\mathbb{N}_n$ et Orb(k) et Orb(k') leurs orbites respectives.
Si ces deux orbites ont un élément en commun, alors : $\exists (p,p') \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma^p(k) = \sigma^{p'}(k')$.
On a alors : $k' = \sigma^{p-p'}(k)$, et toute image de k' par une itérée de σ est alors une image de k par une itérée

de σ, ce qui entraîne : $Orb(k') \subset Orb(k)$.
Mais de façon similaire, on a également : $Orb(k) \subset Orb(k')$, d'où l'égalité.
L'autre possibilité est qu'elles n'aient pas d'élément en commun, donc qu'elles soient disjointes.

Théorème 14.3 : partition de $\mathbb{N}_n$ à l'aide d'une permutation

Soit : $n \geq 1$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
L'ensemble des orbites distinctes des éléments de $\mathbb{N}_n$ sous l'action de σ forme une partition de $\mathbb{N}_n$.

Démonstration :

On sait déjà que ces orbites sont deux à deux disjointes.
Mais comme par ailleurs chaque élément de $\mathbb{N}_n$ appartient au moins à une orbite, leur réunion donne bien $\mathbb{N}_n$ et elles forment ainsi une partition de $\mathbb{N}_n$.

Définition 14.3 : p-cycle, transposition

Soit : $n \geq 1$.
On appelle p-cycle une permutation de $\mathbb{N}_n$ telle que la partition de $\mathbb{N}_n$ en orbites disjointes ne comporte que des orbites à un seul élément, sauf une qui en comporte p.
Le support d'un p-cycle est alors le sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ formé des éléments de l'orbite à p éléments.
Si les éléments de ce support sont : a_1, $a_2 = \sigma(a_1)$, …, $a_p = \sigma(a_{p-1})$, on note alors ce cycle : $(a_1 \dots a_p)$.
Un 2-cycle est appelé transposition.

Définition 14.4 : signature d'une permutation

Soit : $n \geq 1$, et : $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Si p désigne le nombre d'orbites disjointes dans la partition de $\mathbb{N}_n$ obtenue à l'aide de σ, on appelle signature de σ le nombre : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.

Théorème 14.4 : décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Soit : $n \geq 2$, et : $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Alors σ peut se décomposer en un produit (une composée) de transpositions de $\mathbb{N}_n$.
Cette décomposition n'est a priori pas unique.

Démonstration :

Démontrons ce résultat par récurrence sur n.
Il est immédiat pour : $n = 2$ (identité ou 2-cycle).
Supposons-le alors vrai pour : $n \geq 2$, et soit : $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$.
• si : $\sigma(n+1) = n + 1$, alors σ permet de définir σ' dans $\mathbb{N}_n$ par : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sigma'(i) = \sigma(i)$, et cette permutation σ' peut s'écrire comme un produit de transpositions de $\mathbb{N}_n$, ce qui fournit également une décomposition de σ.
• si : $\sigma(n+1) = j \neq n+1$, alors si on note t la transposition échangeant j et $(n+1)$, on a : $(t o \sigma)(n+1) = n+1$.
Donc $t o \sigma$ nous ramène dans le cas précédent, et elle se décompose en un produit de transpositions.
Mais comme enfin : $t o t = id_{\mathbb{N}_n}$, t est se propre inverse et on compose $(t o \sigma)$ par t pour obtenir finalement la décomposition de σ cherchée.

Théorème 14.5 : propriété de commutation des cycles à supports disjoints

Soit : $n \geq 1$.
Deux cycles à supports disjoints de $\mathbb{N}_n$ commutent.

Démonstration :

Notons : $c_1 = (a_1 \dots a_p)$, $c_2 = (b_1 \dots b_q)$.
On calcule alors l'image de tout élément i de $\mathbb{N}_n$ par $c_1 o c_2$ puis par $c_2 o c_1$, en distinguant trois cas :
• si i n'est dans le support ni de c_1, ni de c_2, alors : $c_1 o c_2(i) = c_2 o c_1(i) = i$,
• si i est dans le support de c_1, avec : $i = a_j$, alors : $c_2 o c_1(i) = c_2(a_{j+1}) = a_{j+1}$, et : $c_1 o c_2(i) = c_1(i) = a_{j+1}$.
• si i est dans le support de c_2, on raisonne de la même façon.

Théorème 14.6 : décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints

Soit : $n \geq 1$, et : $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Alors σ peut se décomposer en un produit (une composée) de cycles à supports disjoints, en prenant

comme convention que l'identité se décompose en un produit vide de tels cycles.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration :

• Démontrons l'existence d'une telle décomposition par récurrence.
Il est vrai pour : n = 2 (identité ou 2-cycle).
Supposons-le vrai pour un n donné, $n \geq 2$, et considérons une permutation σ de $\mathbb{N}_{n+1}$.
On distingue alors deux cas :

• $\sigma(n+1) = n+1$.
Dans ce cas, si on note σ' la permutation de $\mathbb{N}_n$ définie par : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sigma'(i) = \sigma(i)$, alors on peut décomposer σ' en produit de cycles à supports disjoints, et on constate alors que cette décomposition vaut aussi pour σ.

• $\sigma(n+1) \neq n+1$.
Alors il existe un entier : $p \geq 1$, $\sigma^p(n+1) = n+1$.
En effet, l'ensemble $\{\sigma^k(n+1), k \in \mathbb{N}^*\}$ étant inclus dans $\mathbb{N}_{n+1}$, il est fini et :
$\exists\ (k,k') \in \mathbb{N}^{*2}$, $k > k'$, $\sigma^k(n+1) = \sigma^{k'}(n+1)$, et : $p = k - k'$, fournit l'entier annoncé.
Notons alors q le plus petit entier p supérieur à 1 ayant cette propriété.
Il est facile de voir alors que tous les $\sigma^i(n+1)$, pour : $1 \leq i \leq q$, sont distincts sinon cela fournirait un entier : $1 \leq q' < q$, tel que : $\sigma^{q'}(n+1) = n+1$.
Notons alors c le cycle : $c = ((n+1)\ \sigma(n+1)\ \ldots\ \sigma^{q-1}(n+1))$.
La permutation $c^{-1}o\sigma$ vérifie alors : $c^{-1}o\sigma(n+1) = n+1$, et on peut la décomposer en un produit de cycles à supports disjoints $c_1o\ldots oc_k$, d'où on déduit que : $\sigma = coc_1o\ldots oc_k$.
Mais on constate de plus que : $\forall\ 1 \leq i \leq q$, $[c^{-1}o\sigma](\sigma^i(n+1)) = c^{-1}(\sigma^{i+1}(n+1)) = \sigma^i(n+1)$, tous les éléments du support de c sont invariants par $c^{-1}o\sigma$ et ne sont donc pas dans les supports des cycles $c_1, \ldots, c_k$.
On a donc bien dans tous les cas obtenus une décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

• Démontrons maintenant l'unicité d'une telle décomposition.
L'identité ne peut se décomposer qu'en un produit vide de tel cycles.
Soit donc σ une permutation pour laquelle on dispose de deux telles décompositions :
$\sigma = c_1o\ldots oc_k$, et : $\sigma = c'_1o\ldots oc'_{k'}$,
et soit : $1 \leq i \leq n$, tel que : $\sigma(i) \neq i$.
Alors i est dans le support d'un des cycles c_i (par exemple c_1, puisqu'ils commutent) et d'un des c'_i, par exemple c'_1.
Si ν est la longueur du cycle c_1, alors c_1 s'écrit : $c_1 = (i\ c_1(i)\ \ldots\ c_1^{\nu-1}(i))$, où toutes les images écrites sont distinctes. Mais ce résultat vaut aussi pour c'_1, donc ils sont de même longueur et égaux.
En réitérant ce processus, on obtient finalement que : $k = k'$, et que les cycles des deux décompositions sont identiques.

Théorème 14.7 : la signature est un morphisme de groupes

Soit : $n \geq 1$.
L'application ε définit un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n,o)$ dans $(\{-1,+1\},\times)$.
On a donc en particulier : $\forall\ (\sigma,\sigma') \in \mathcal{S}_n^2$, $\varepsilon(\sigma o\sigma') = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\sigma')$.

Démonstration :

• Une transposition a pour signature (-1). En effet, elle génère (n – 1) orbites disjointes (soit (n – 2) avec un seul élément et une avec 2 éléments).

• Soit maintenant σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ avec k orbites disjointes et : $t = (a\ b)$, une transposition.
Etudions le nombre d'orbites disjointes de : $\sigma' = to\sigma$, et pour cela on va distinguer deux cas (on pourra d'aider d'un dessin) :

• a et b sont dans la même orbite de σ.
Les éléments de cette orbite sont permutés circulairement sous la forme :
$\Omega = (a_1\ \ldots\ a_{i-1}\ a\ a_{i+1}\ \ldots\ a_{j-1}\ b\ a_{j+1}\ \ldots\ a_p)$.
Tout d'abord les éléments en dehors de Ω ont une image par σ' identique à celle qu'ils ont par σ.
Donc les orbites de σ distinctes Ω ne sont pas modifiées par t, et il y en a le même nombre, soit (k – 1).
Examinons maintenant les images des éléments de Ω par σ' :
$\sigma'(a_1) = a_2, \ldots, \sigma'(a_{i-1}) = b, \sigma'(b) = a_{j+1}, \ldots, \sigma'(a_p) = a_1$, d'une part, et :
$\sigma'(a) = a_{i+1}, \sigma'(a_{i+1}) = a_{i+2}, \ldots, \sigma'(a_{j-1}) = a$, d'autre part.
Autrement dit, l'orbite Ω de σ s'est scindée en deux orbites disjointes sous l'action de $to\sigma$.
Par conséquent : $\varepsilon(\sigma') = (-1)^{n-(k+1)} = -\varepsilon(\sigma)$.

- a et b sont dans des orbites disjointes de σ.

Notons toujours ces orbites : $\Omega_1 = (a_1 \dots a_{i-1}\ a\ a_{i+1} \dots a_p)$, et : $\Omega_2 = (b_1 \dots b_{j-1}\ b\ b_{j+1} \dots b_q)$.
Là encore, les éléments de $\mathbb{N}_n$ en dehors de ces deux orbites ont une image par σ' identique à celle qu'ils ont par σ, et les $(k-2)$ orbites extérieures à Ω_1 et Ω_2 ne sont pas modifiées, ni leur nombre.
Examinons enfin ce que deviennent les éléments de Ω_1 et Ω_2 par de σ' :
$\sigma'(a_1) = a_2, \dots \sigma'(a_{i-1}) = b, \sigma'(b) = b_{j+1}, \dots, \sigma'(b_p) = b_1, \dots \sigma'(b_{j-1}) = a, \sigma'(a) = a_{i+1}, \dots, \sigma'(a_p) = a_1$,
et les deux orbites se fondent en une seule sous l'action de σ'.
D'où : $\varepsilon(\sigma') = (-1)^{n-(k-1)} = -\varepsilon(\sigma)$.

- Considérons maintenant une permutation σ que l'on décompose en produit de k transpositions :
$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(t_k o \dots o t_1) = -\varepsilon(t_{k-1} o \dots o t_1) = (-1)^k.\varepsilon(id_{\mathbb{N}n}) = (-1)^k$, ce qu'on obtient immédiatement par récurrence.
- Soient enfin deux permutations σ et σ' qui se décomposent en produit de k et k' transpositions.

Alors : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$, $\varepsilon(\sigma') = (-1)^{k'}$, et comme $\sigma o \sigma'$ peut s'écrire comme le produit de (k+k') transpositions, on a : $\varepsilon(\sigma o \sigma') = (-1)^{k+k'} = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\sigma')$.

15. Déterminant d'une famille finie de vecteurs dans une base *(hors programme)*.

Définition 15.1 : forme n-linéaire alternée en dimension n

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
On dit que f est une forme n-linéaire alternée sur E si et seulement si :

- f est une application de E^n dans **K**,
- f est linéaire par rapport à toutes ses variables, c'est-à-dire :
$\forall\ 1 \le i \le n$, $\forall\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots X_n) \in E^{n-1}$, $\forall\ (x_i, x'_i) \in E^2$, $\forall\ (\lambda, \lambda') \in \mathbf{K}^2$,
$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda.x_i + \lambda'.x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda.f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \lambda'.f(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$,
- f est alternée, c'est-à-dire : $\forall\ 1 \le i \ne j \le n$, $\forall\ (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(x_i = x_j) \Rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = 0)$.

Définition 15.2 : forme antisymétrique

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n.
On dit que f, de E^n dans **K**, est antisymétrique si et seulement si :

- $\forall\ 1 \le i \ne j \le n$, $\forall\ (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$.

Théorème 15.1 : équivalence alternée $\Leftrightarrow$ antisymétrique

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et f une application de E^n dans **K**.
On a l'équivalence : (f n-linéaire alternée) $\Leftrightarrow$ (f n-linéaire antisymétrique).

Démonstration :

Procédons par double implication.

- [$\Rightarrow$] Supposons f n-linéaire alternée, et soit : $(x_1, \dots, x_n)$, ainsi que : $1 \le i \ne j \le n$.

Alors, en remplaçant x_i et x_j par $(x_i + x_j)$, et en développant à l'aide de la n-linéarité, on obtient :
$0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, d'une part, puisque f est alternée, et
$= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$
$+ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, d'autre part.
Or le premier et le quatrième terme de la somme sont nuls (deux vecteurs identiques) et on en déduit la propriété indiquant que f est antisymétrique.

- [$\Leftarrow$] Supposons f n-linéaire antisymétrique, et soit : $(x_1, \dots, x_n)$, ainsi que : $1 \le i \ne j \le n$, avec : $x_i = x_j$.

Alors : $f(x_i, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_i, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$, mais aussi : $-f(x_i, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, puisque f est antisymétrique.
On en déduit la nullité de l'expression.

Théorème 15.2 : propriétés et écriture d'une forme n-linéaire alternée dans une base

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et f une application n-linéaire alternée de E^n dans **K**.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E.

- si la famille est liée, alors : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$,
- si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$, alors : $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_{n-1}.x_{n-1})$,

et la n-linéarité permet de généraliser cette propriété à toutes les variables de f, autrement dit, on ne modifie pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille,

• soit : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et : $\forall\ 1 \leq j \leq n,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.e_i$, la décomposition de x_j suivant $\mathscr{B}$.

Alors : $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}.f(e_1,\dots,e_n)$.

Démonstration :

• Soit $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E.
Quitte à intervertir deux vecteurs (ce qui multiplie f par -1 puisqu'elle est antisymétrique), on peut supposer que x_n peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs, soit :
$\exists\ (\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1},\ x_n = \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_{n-1}.x_{n-1}$.
A l'aide de la n-linéarité puis du caractère alterné de f, on a alors :
$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1.f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1) + \dots + \lambda_{n-1}.f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1}) = 0$.

• Soit $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E.
Comme précédemment : $\forall\ (\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$,
$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_{n-1}.x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1.f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1) + \dots + \lambda_{n-1}.f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1})$,
et : $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_{n-1}.x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

• Avec les notations proposées, on a donc : $f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}.e_i, x_2,\dots,x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}.f(e_i, x_2,\dots,x_n)$.

On développe ainsi tous les vecteurs x_j, en utilisant n indices (le premier étant renommé i_1) $i_1, \dots, i_n$.

On obtient : $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1}.a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}.f(e_{i_1}, e_{i_2},\dots,e_{i_n})$.

Mais dans cette somme, si deux indices parmi les $i_1, \dots, i_n$ prennent des valeurs égales, l'image par f du n-uplet correspondant est nulle puisque f est alternée.
Donc la somme ne porte en fait que sur les n-uplets d'indices tous distincts.
On considère donc tous les n-uplets $(i_1, \dots, i_n)$ possibles tels que : $(1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n)$, soit injective.
Autrement dit cela revient à sommer sur toutes les bijections possibles $\sigma : (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots i_n)$, de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même, ce qui conduit à la formule annoncée.

Théorème 15.3 et définition 15.3 : déterminant de n vecteurs dans une base

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E qui vaut 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$.
Cette unique forme est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$ et est notée $\det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration :

D'après le résultat précédent, si f existe, elle ne peut avoir comme expression, que ce qu'on a trouvé précédemment, c'est-à-dire, pour une famille $(x_1, \dots x_n)$ de vecteurs de E :

$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$, où les $a_{i,j}$ correspondent aux coordonnées des vecteurs (x_j) dans la base $\mathscr{B}$.

Montrons réciproquement que cette unique fonction trouvée répond au problème.

• c'est bien une application de E^n dans **K**,

• elle est n-linéaire, car : $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \forall\ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1},\ \forall\ (x_i, x'_i) \in E^2,\ \forall\ (\lambda, \lambda') \in \mathbf{K}^2$, on a :

$$f(x_1, \dots, \lambda.x_i + \lambda'.x'_i, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots(\lambda.a_{\sigma(i),i} + \lambda'.a'_{\sigma(i),i})\dots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \lambda.\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n} + \lambda'.\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \lambda.f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda'.f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n),$$

• elle est alternée car : $\forall\ (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, tel que : $\exists\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ x_i = x_j$, alors, en notant pour toute permutation σ, $\sigma' = \sigma o(i\ j)$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} = -\sum_{\sigma'\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma').a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(j),i}\dots a_{\sigma'(i),j}\dots a_{\sigma'(n),n} .$$

Or : $(x_i = x_j) \Rightarrow (\forall\ 1 \leq k \leq n,\ x_{k,i} = x_{k,j})$, et donc :

$$f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{\sigma'\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma').a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(j),j}\dots a_{\sigma'(i),i}\dots a_{\sigma'(n),n} = -\sum_{\sigma'\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma').a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(i),i}\dots a_{\sigma'(j),j}\dots a_{\sigma'(n),n}$$, soit :

$f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$, ce qui montre finalement que cette quantité est nulle.

• elle vaut 1 pour le n-uplet $(e_1, \dots, e_n)$.

En effet, les coordonnées de e_j dans la base $\mathscr{B}$ sont : $e_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}.e_i$, où on utilise le symbole de Kronnecker, et dans la somme donnant $f(e_1, \ldots, e_n)$, tous les produits sont nuls dès que pour un indice on a : $\sigma(i) \neq i$.
Autrement dit, la somme se réduit à la seule permutation identité de $\mathbb{N}_n$, soit : $f(e_1, \ldots e_n) = 1$.

Théorème 15.4 : expression du déterminant de n vecteurs dans une base
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E, avec :
$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.e_i$, la décomposition de x_j suivant $\mathscr{B}$.
Alors : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$.
De plus, pour toute forme φ n-linéaire alternée sur E : $\exists\ \lambda \in$ **K**, $\varphi = \lambda.\det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration :
L'expression du déterminant a été obtenue à la démonstration précédente.
De plus, si φ est n-linéaire alternée sur E, alors, en reprenant la notation en coordonnées précédente d'un vecteur de E, on a vu que : $\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}.\varphi(e_1,\ldots,e_n)$, soit :
$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n).\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, et on obtient le résultat voulu avec : $\lambda = \varphi(e_1, \ldots, e_n)$.

Théorème 15.5 : caractérisation des bases
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
La famille $(x_n, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Démonstration :
- si une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est liée, alors comme $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E, on a : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- si une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est libre, alors elle forme une base $\mathscr{X}$ de E.

La forme n-linéaire alternée $\det_{\mathscr{X}}$ est alors proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$ et :
$\exists\ \lambda \in$ **K**, $\det_{\mathscr{X}} = \lambda.\det_{\mathscr{B}}$.
Enfin : $\det_{\mathscr{X}}(x_1, \ldots x_n) = 1 = \lambda.\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, et : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Théorème 15.6 et définition 15.6 : orientation d'un espace vectoriel de dimension finie
Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Alors : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.
Orienter E correspond à choisir une base $\mathscr{B}$ de E.
Les bases $\mathscr{B}'$ de E telles que : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, seront alors dites « directes » et les autres bases de E seront dites « indirectes ».

Démonstration :
Le fait que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ soit non nul a été vu dans la démonstration précédente.
Ce déterminant est donc soit strictement positif, soit strictement négatif, ce qui définit deux classes de bases relativement à $\mathscr{B}$: les bases directes (ou de même sens que $\mathscr{B}$), et les bases indirectes (ou de sens contraire à $\mathscr{B}$).

16. Propriétés et calcul des déterminants.

Définition 16.1 : déterminant d'une matrice carrée
Soit : $n \geq 1$, et : $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

On appelle déterminant de A le scalaire : $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}$, et on le note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Théorème 16.1 : égalité entre déterminant de n vecteurs et celui de leur matrice représentative

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n.
Le déterminant de n vecteurs de E dans une base de E est le déterminant de la matrice de leurs coordonnées dans cette base, écrites en colonnes.

Démonstration :

Il suffit de comparer les deux expressions et c'est immédiat.

Théorème 16.2 : déterminant de l'identité

Soit : $n \geq 1$.
Alors : $\det(I_n) = 1$.

Démonstration :

En utilisant la définition du déterminant d'une matrice, et puisque : $(I_n) = (\delta_{i,j})$, dans la somme donnant $\det(I_n)$, tous les produits sont nuls sauf celui correspondant à l'identité de $\mathbb{N}_n$ qui donne 1.

Théorème 16.3 : conséquences de la n-linéarité sur les déterminants de matrices

Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Alors :

- $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\det(\lambda.A) = \lambda^n.\det(A)$.
- on ne change pas la valeur de det(A) en remplaçant dans A une colonne par elle-même à laquelle on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Démonstration :

Notons par exemple $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de A dans $\mathbf{K}^n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.

- $\det(\lambda.A) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda.c_1, \dots, \lambda.c_n) = \lambda^n.\det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n) = \lambda^n.\det(A)$, à l'aide de la n-linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$.
- $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$, notons A' la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à une colonne (par exemple la $(n-1)^{\text{ième}}$) une combinaison linéaire des autres avec les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$.

Alors : $\det(A') = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + \lambda_1.c_1 + \dots + \lambda_{n-1}.c_{n-1}) = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n) = \det(A)$.

Théorème 16.4 : déterminant d'une transposée

Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Alors : $\det(A) = \det({}^tA)$.
Toute opération autorisée sur les colonnes d'une matrice pour le calcul d'un déterminant est aussi valable pour les lignes de cette matrice.

Démonstration :

Notons : $A' = {}^tA$.
Alors : $\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma).a'_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{1,\sigma(1)}...a_{n,\sigma(n)}$.

Mais pour une permutation σ donnée, le produit $(a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)})$ s'écrit aussi $(a_{\sigma^{-1}\circ\sigma(1),\sigma(1)}...a_{\sigma^{-1}\circ\sigma(n),\sigma(n)})$, et puisque σ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même, les termes $\sigma(1),\dots,\sigma(n)$ correspondent à $1,\dots,n$, mais dans un ordre éventuellement différent.

Donc en permutant les termes, le produit peut s'écrire : $a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1}...a_{\sigma^{-1}(n),n}$.

D'où : $\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma^{-1}(1),1}...a_{\sigma^{-1}(n),n}$.

Enfin, pour toute permutation σ, on a : $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, et l'application : $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, est une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.
Donc sommer les σ ou sommer leurs images par cette bijection, c'est la même chose.
Finalement, on en déduit l'égalité voulue.
Pour ainsi effectuer une opération sur les lignes d'une matrice dans le calcul d'un déterminant, il suffit

donc d'effectuer les opérations similaires sur les colonnes de sa transposée.

Définition 16.2 : (hors programme) cofacteurs d'une matrice carrée

Soit : $n \geq 1$, et : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On appelle cofacteur (i,j) de A la quantité : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}.\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$,

soit le déterminant d'ordre (n – 1) obtenu à partir de A en supprimant i-ème ligne et j-ème colonne.
Le déterminant d'ordre (n – 1) qui apparaît est appelé mineur de A associé à $a_{i,j}$.

Théorème 16.5 : développement d'un déterminant suivant une colonne

Soit : $n \geq 1$, et : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Alors : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$.

On appelle cela développer le déterminant de A suivant la j-ème colonne.

Démonstration :

Notons $(c_1, \ldots, c_n)$ les colonnes de A vues comme des vecteurs de $\mathbf{K}^n$ muni de sa bas canonique $\mathcal{B}$.

Notons par ailleurs : $c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.e_i$, la décomposition de c_j suivant la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\det_{\mathcal{B}}(c_1,\ldots,c_{j-1},e_i,c_{j+1},\ldots,c_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{1j-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On peut alors permuter circulairement les (n – (j – 1)) dernières colonnes pour envoyer la $j^{\text{ième}}$ à la $n^{\text{ième}}$ place. Mais comme le déterminant est une forme antisymétrique, cette opération fait apparaître un signe en facteur, égal à la signature de cette permutation, et qui vaut $(-1)^{n-j}$ (elle peut aussi se décomposer en un produit de (n – j) transpositions.

Puis la $i^{\text{ième}}$ ligne peut maintenant être amenée en dernière ligne en utilisant une permutation des lignes, de signature cette fois $(-1)^{n-i}$.

Donc : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.(-1)^{i+j}.\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} \vdots & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i-11} & \cdots & a_{1-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} & 1 \end{vmatrix}$, puisque : $(-1)^{n-i+n-j} = (-1)^{i+j}$.

Considérons maintenant une matrice B quelconque n×n dont la dernière colonne est nulle sauf le dernier coefficient qui vaut 1.

Alors : $\det(B) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma).b_{\sigma(1),1}\ldots b_{\sigma(n),n}$.

Mais dans les produits qui apparaissent, si on a : $\sigma(n) \neq n$, alors : $b_{\sigma(n)n} = 0$, et si : $\sigma(n) = n$, $b_{\sigma(n)n} = 1$.
Donc la somme peut en fait être réduite à l'ensemble S'_n des permutations σ de $\mathbb{N}_n$ telles que : $\sigma(n) = n$.

D'où : det(B) = $\sum_{\sigma\in S'_n}\varepsilon(\sigma).b_{\sigma(1),1}...b_{\sigma(n-1),n-1}.1$.

Enfin, on peut remplacer les permutations σ de S'ₙ par celles de $\mathcal{S}_{n-1}$ puisque $b_{\sigma(n)n}$ n'intervient plus.
Et comme la signature n'est pas modifiée dans ce remplacement, on aboutit à :

det(B) = $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}}\varepsilon(\sigma).b_{\sigma(1),1}...b_{\sigma(n-1),n-1}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice (n-1)×(n-1) extraite de B.

Donc dans la formule précédente donnant det(A), on obtient finalement : $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.\Delta_{ij}$.

Théorème 16.6: développement d'un déterminant suivant une ligne

Soit : n ≥ 1, et : A = $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Alors : ∀ 1 ≤ i ≤ n, $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.\Delta_{ij}$.

On appelle cela développer le déterminant de A suivant la i-ème ligne.

Démonstration :

Pour la matrice A, on commence par écrire : det(A) = det(^tA), puis on développe ce deuxième déterminant suivant une colonne, ce qui revient à développer celui de A suivant une ligne.

Théorème 16.7 : déterminant d'une matrice carrée diagonale ou triangulaire

Si A est une matrice carrée diagonale ou triangulaire (supérieure ou inférieure), det(A) est le produit des éléments diagonaux de A.

Démonstration :

Soit A une matrice diagonale ou triangulaire supérieure.
On peut alors, à l'aide du résultat précédente, développer A suivant sa dernière ligne.
Tous les mineurs correspondants sont alors nuls, sauf éventuellement celui correspondant à $a_{n,n}$, et :
det(A) = $a_{n,n}$.det(A_{n-1}), où A_{n-1} est la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne.
Par récurrence, il est alors clair que le déterminant de A est bien le produit de ses éléments diagonaux.
Pour une matrice triangulaire inférieure, il suffit d'utiliser sa transposée.

Théorème 16.8 : déterminant par blocs

Soit : M = $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, avec : A ∈ $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, C ∈ $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.

Alors : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A).\det(C)$.

Si plus généralement A est une matrice diagonale ou triangulaire par blocs (avec des blocs diagonaux constitués de matrices carrées), le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux de A.

Démonstration :

• On sait que la méthode du pivot appliquée aux colonnes de A permet de ramener A à une matrice triangulaire supérieure T.
Cette méthode utilise des transpositions de colonnes ou remplace l'une d'entre elles par elle-même à laquelle on ajoute une combinaison linéaire des autres (parmi celles de A donc les p premières de M).
Ces opérations permettent alors d'obtenir : det(A) = ε.det(T), où ε est un signe dépendant des transpositions effectuées sur les colonnes de A, chacune générant un facteur (-1).
Si on effectue les mêmes opérations maintenant sur M (en se limitant donc à des opérations sur les p premières colonnes de M), on transforme M en : $\begin{pmatrix} T & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Les opérations effectuées, au vu des propriétés du déterminant, permettent là encore d'écrire :
det(M) = ε.$\det\begin{pmatrix} T & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Enfin, T étant triangulaire supérieure, on peut développer (comme dans la démonstration précédente) ce déterminant successivement par rapport à ses p premières colonnes, pour obtenir :

$\det(M) = \varepsilon.t_{1,1}\ldots t_{p,p}.\det(C) = \varepsilon.\det(T).\det(C) = \det(A).\det(C)$.

• Si M est maintenant triangulaire supérieure (ou inférieure) ou diagonale par blocs, on généralise par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux de M le résultat établi pour deux blocs diagonaux.

17. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.

Théorème 17.1 et définition 17.1 : (hors programme) déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\ldots,u(e_n))$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ et est appelé déterminant de u.

On le note det(u), et on a donc : $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\ldots,u(e_n))$, pour toute base $\mathscr{B}$ de E.

Démonstration :

Considérons l'application $f_{\mathscr{B}}$ définie par : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $f_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$.

C'est une application de E^n dans **K**.

De plus il est facile de voir qu'elle est n-linéaire, du fait de la linéarité de u et de la n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$.

Elle est également alternée, puisque $\det_{\mathscr{B}}$ l'est.

Donc : $\exists \lambda_{\mathscr{B}} \in \mathbf{K}$, $f_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}}.\det_{\mathscr{B}}$.

Ce scalaire correspond d'ailleurs à : $f_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda_{\mathscr{B}}.\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda_{\mathscr{B}}.1 = \lambda_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\ldots,u(e_n))$.

Pour une autre base $\mathscr{B}'$ de E, on a de même : $\exists \lambda_{\mathscr{B}'} \in \mathbf{K}$, $f_{\mathscr{B}'} = \lambda_{\mathscr{B}'}.\det_{\mathscr{B}'}$.

Enfin : $\exists \lambda_0 \in \mathbf{K}^*$, $\det_{\mathscr{B}'} = \lambda_0.\det_{\mathscr{B}}$.

Mais alors, on constate immédiatement que : $f_{\mathscr{B}'} = \lambda_0.f_{\mathscr{B}}$, (en remplaçant simplement), et donc :

$\lambda_0.\lambda_{\mathscr{B}}.\det_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}'}.\lambda_0.\det_{\mathscr{B}}$.

On en conclut que : $\lambda_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}'}$, d'où : $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\ldots,u(e_n)) = \det_{\mathscr{B}'}(u(e'_1), \ldots, u(e'_n))$.

Théorème 17.2 : égalité entre déterminant d'un endomorphisme et de sa matrice représentative

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

Le déterminant de u est celui de sa matrice représentative dans n'importe quelle base de E

Démonstration :

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base de E, et notons : $\forall 1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.e_i$.

Alors : $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\ldots,u(e_n)) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n} = \det(A)$,

en utilisant la définition du déterminant de n vecteurs dans une base et celui d'une matrice carrée.

Théorème 17.3 : déterminant d'une composée d'endomorphismes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

Alors : $\det(uov) = \det(u).\det(v)$.

Démonstration :

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base quelconque de E, et reprenons $f_{\mathscr{B}}$ l'application définie au-dessus.

Alors : $\det(uov) = \det_{\mathscr{B}}(uov(e_1), \ldots, uov(e_n))$, d'où :

$\det(uov) = f_{\mathscr{B}}(v(e_1), \ldots, v(e_n)) = \det(u).\det_{\mathscr{B}}(v(e_1), \ldots, v(e_n)) = \det(u).\det(v)$.

Théorème 17.4 : déterminant d'un produit de matrices

Soit : $n \geq 1$, et : $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$.

Alors : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Démonstration :

Si on note u et v les endomorphismes canoniquement associés (dans $\mathbf{K}^n$) à A et B, alors :

$\det(A.B) = \det(uov) = \det(u).\det(v) = \det(A).\det(B)$.

Théorème 17.5 : caractérisation des automorphismes

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et : $u \in \mathscr{L}(E)$.

u est un automorphisme de E si et seulement si : $\det(u) \neq 0$, et dans ce cas : $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Démonstration :

Soit : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, une base quelconque de E.

Alors : $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

En utilisant les théorèmes vus précédemment, on a alors :

$(\det(u) \neq 0) \Leftrightarrow ((u(e_1), \ldots, u(e_n))$ base de E$) \Leftrightarrow$ (u automorphisme de E).

Dans ce cas, on peut écrire : $\det(id_E) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(u).\det(u^{-1})$, d'où le résultat.

Théorème 17.6 : caractérisation des matrices carrées inversibles

Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

A est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration :

Là encore, à l'aide des endomorphismes canoniquement associés à A (puis à A^{-1}), on en déduit les résultats.

18. Comatrice d'une matrice carrée *(hors programme)*.

Définition 18.1 : comatrice d'une matrice carrée

Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

On appelle comatrice de A, la matrice de ses cofacteurs, et on la note Com(A).

Théorème 18.1 : lien entre matrice et comatrice

Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Alors : $A.{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A).A = (\det(A)).I_n$.

Démonstration :

Notons B la matrice ${}^t\mathrm{Com}(A).A$.

Son coefficient générique vaut : $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$, $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ki}.a_{kj}$.

• Il est clair que si : $i = j$, alors : $b_{i,j} = \det(A)$ (obtenu en développant suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne).

• si : $i \neq j$, alors : $b_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1i} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1i} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{1j-1} & a_{ii} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1i} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{ni} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, où on a remplacé la $j^{\text{ième}}$ colonne de A par la $i^{\text{ième}}$, et ce que l'on vérifie aisément en développant ce dernier déterminant.

Mais par ailleurs il est nul, puisque les colonnes i et j sont identiques.

Finalement : $B = \det(A).I_n$.

L'autre produit se traite de façon identique, mais en utilisant des développements suivant les lignes.

Théorème 18.2 : expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, inversible.

Alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.{}^t\mathrm{Com}(A)$.

Démonstration :

Le résultat précédent, si A est inversible, permet d'obtenir : $A.\left(\dfrac{1}{\det(A)}.{}^t\mathrm{Com}(A)\right) = I_n$.

D'où la valeur de A^{-1}.

19. Applications.

Définition 19.1 : (hors programme) système de Cramer

On appelle système de Cramer un système linéaire de n équations à n inconnues, s'écrivant matriciellement : A.X = B, où A est une matrice carrée inversible.

Théorème 19.1 : (hors programme) résolution d'un système de Cramer

Soit : A.X = B, un système de Carmer.

Ce système admet une solution unique X_0 donné par : $X_0 = \frac{1}{\det(A)}.{}^tCom(A).B$, et :

$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

, où dans le déterminant supérieur, on a remplacé la i-ème colonne par la matrice colonne B.

Démonstration :

Le système admet une solution unique car A est inversible et elle vaut : $X_0 = A^{-1}.B = \frac{1}{\det(A)}.{}^tCom(A).B$.

Quant au deuxième résultat, en développant le déterminant supérieur suivant la i$^{\text{ième}}$ ligne, on obtient :

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{1}{\det(A)}.\sum_{k=1}^{n} b_k.\Delta_{ki} = \frac{1}{\det(A)}.\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ki}.b_k$, soit bien la valeur donnée par la formule précédente.

Définition 19.2 : rang d'une matrice

Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Le rang de A est le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Théorème 19.2 : lien entre rang d'une matrice et rang de ses vecteurs colonnes

Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Le rang de A est égal à la dimension de l'espace image de l'endomorphisme canoniquement associé à A, également au rang de la famille des colonnes de A vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

Le premier résultat est immédiat, puisque c'est la définition même du rang d'un endomorphisme.
Pour le second, puisque les colonnes de A forment une famille génératrice de l'image de l'endomorphisme, le rang de cette famille est bien la dimension de l'image et donc le rang de A.

Définition 19.3 : matrice extraite d'une matrice

Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue à partir de A en supprimant des lignes et/ou des colonnes, en respectant l'ordre des éléments restants par rapport à celui qu'ils avaient dans A.

Théorème 19.3 : caractérisation du rang par des déterminants extraits non nuls

Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Alors le rang de A est la taille de la plus grande matrice carrée extraite de A inversible.
C'est aussi la taille du plus grand déterminant extrait de A non nul.

Démonstration :

Notons r le rang de A, s la taille de la plus grande matrice carrée, extraite de A, inversible.

- $r \geq s$.

En effet, soit B une matrice carrée extraite de A de taille $q > r$.
Cette matrice est obtenue à l'aide de q colonnes de A (notons les $c_{j_1}, \ldots, c_{j_q}$), qui forment donc une famille liée de $\mathbf{K}^n$.
Donc on peut trouver $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ dans $\mathbf{K}^q$, tel que, dans $\mathbf{K}^n$, on ait : $\lambda_1.c_{j_1} + \ldots + \lambda_q.c_{j_q} = 0$.
Dans ces n égalités (ce sont des n-uplets), on ne garde alors que les lignes dont les numéros correspondent à ceux de B, et on obtient ainsi une combinaison linéaire nulle des colonnes de B.
On en déduit que B n'est pas inversible, et donc que s est inférieur ou égal à r.

- $s \geq r$.

Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et : $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ les bases canoniques de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$.
Comme le rang de A vaut r, on peut trouver r colonnes de A formant une famille libre dans $\mathbf{K}^n$, puisque les colonnes de A forment une base de Im(u).
Pour simplifier (quitte à les permuter), on supposera que ce sont les r premières colonnes.
On peut alors compléter cette famille à l'aide de $(n - r)$ vecteurs de la base canonique $\mathscr{B}'$ pour former une nouvelle base de $\mathbf{K}^n$, et la matrice A' des coordonnées des n vecteurs ainsi obtenus est inversible.
Notons que dans cette matrice $n \times n$, les r premières colonnes sont identiques à celles de A et les $(n - r)$ restantes sont composées de 0 à l'exception d'un seul 1.
Si maintenant on calcule le déterminant de A' (qui est donc non nul), en le développant successivement par rapport à ses $(n - r)$ dernières colonnes, on aboutit à :

$\det(A') = \pm.\det\begin{pmatrix} a_{j_1,1} & \cdots & a_{j_1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_r,1} & \cdots & a_{j_r,r} \end{pmatrix}$, le numéro des lignes $j_1, \ldots, j_r$, correspondant à celles sur lesquelles il n'y a pas de 1 dans les dernières colonnes de A', et le signe $\pm$ aux signes venant des cofacteurs de A'.
Finalement, on vient de mettre en évidence un déterminant non nul, extrait de A.
Donc : $s \geq r$.

- Finalement, on a bien l'égalité.

Théorème 19.4 : rang d'une transposée
La rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Démonstration :
Soit : $n \geq 1$, et : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Tout déterminant extrait de A non nul, fournit un déterminant (transposé) extrait de ${}^tA$ non nul, donc : $rg({}^tA) \geq rg(A)$.
Puis : $rg(A) = rg({}^t({}^tA)) \geq rg({}^tA) \geq rg(A)$, d'où des égalités en place des inégalités et : $rg({}^tA) = rg(A)$.
Remarque : il existe évidemment d'autres démonstrations de ce résultat .
Par exemple, si u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ canoniquement associée à A, en s'inspirant de la démonstration du théorème du rang, on peut noter $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de ker(u), et $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de Im(u), et des antécédents $e_1, \ldots, e_r$ de ces vecteurs par u.
On montre alors que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Puis si on complète $(e'_1, \ldots, e'_r)$ en une base $(e'_1, \ldots, e'_p)$ de $\mathbb{R}^p$.
On note enfin P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à (e_i), et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à (e'_i).
Alors la matrice de u dans les bases (e_i) et (e'_i) est la matrice par blocs : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$.
De plus cette matrice est liée à A par la relation : $J_r = Q^{-1}.A.P$, soit : $A = Q.J_e.P^{-1}$.
Enfin : ${}^tA = {}^t(P^{-1}).{}^tJ_r.{}^tQ$, et ${}^tQ$ et ${}^t(P^{-1})$ étant inversibles, $rg({}^tA) = rg({}^tJ_r) = rg(J_r) = r = rg(A)$.

20. Exemple des déterminants tridiagonaux : suites récurrentes linéaires à deux termes.

Définition 20.1 : suite récurrente linéaire à deux termes, réelle ou complexe
On appelle suite récurrente linéaire à deux termes une suite réelle ou complexe (u_n) telle que : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2$, avec : $\beta \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n$.

Définition 20.2 : équation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire à deux termes

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe telle que : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2, \beta \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n$.
On appelle équation caractéristique associée à cette suite l'équation : $r^2 = \alpha.r + \beta$.

Théorème 20.1 : structure de K-espace vectoriel des suites récurrentes linéaires à deux termes

Soit : $(\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2, \beta \neq 0$.
L'ensemble $E_{\alpha,\beta}$ des suites (u_n) de $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, (E) $u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n$, forme un **K**-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration :

• c'est bien entendu un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, puisqu'il est inclus dans cet espace vectoriel, non vide car la suite nulle appartient à $E_{\alpha,\beta}$, et enfin stable par combinaison linéaire, car si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient la relation de récurrence (E) pour tout entier n, et λ et μ sont des éléments de **K**, il est immédiat que $(\lambda.(u_n) + \mu.(v_n))$ vérifie également cette relation pour tout entier n.
• soient les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :
$a_0 = 1, a_1 = 0, \forall n \geq 0, a_{n+2} = \alpha.a_{n+1} + \beta.a_n$, et :
$b_0 = 0, b_1 = 1, \forall n \geq 0, b_{n+2} = \alpha.b_{n+1} + \beta.b_n$.
Ces deux suites forment une base de $E_{\alpha,\beta}$. En effet :
• elles appartiennent à $E_{\alpha,\beta}$ de façon évidente,
• elles forment une famille libre car, si : $\lambda.(a_n) + \mu.(b_n) = 0$, alors les deux premiers termes donnent :
$\lambda.a_0 + \mu.b_0 = 0 = \lambda$, et : $\lambda.a_1 + \mu.b_1 = 0 = \mu$.
• elles forment une famille génératrice, car : $\forall (u_n) \in E_{\alpha,\beta}, (u_n) = u_0.(a_n) + u_1.(b_n)$, comme on le vérifie immédiatement par récurrence double sur n.
Finalement $E_{\alpha,\beta}$ est bien un **K**-espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 20.2 : expression des suites récurrentes linéaires à deux termes

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe telle que : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2, \beta \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta.u_n$.
• si, dans le cas réel ou complexe, l'équation caractéristique associée admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , il existe deux constantes réelles ou complexes a et b, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a.r_1^n + b.r_2^n$.
• si, dans le cas réel ou complexe, l'équation caractéristique associée admet une racine double r, il existe deux constantes réelles ou complexes a et b telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a.n + b).r^n$.
• si, dans le cas réel, l'équation caractéristique associée admet deux racines complexes conjuguées $\rho.e^{i\theta}$ et $\rho.e^{-i\theta}$, il existe deux constantes réelles a et b telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n.(a.\sin(n.\theta) + b.\cos(n.\theta))$.

Démonstration :

Plaçons nous pour commencer dans le cas de suites complexes.
Si l'on cherche les suites géométriques appartenant à $E_{\alpha,\beta}$, de la forme : $(u_n) = (r^n)$, on constate que cette suite est dans $E_{\alpha,\beta}$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = \alpha.r^{n+1} + \beta.r^n$.
Or si cette égalité est vraie pour tout n, elle l'est en particulier pour : n = 0, d'où : $r^2 = \alpha.r + \beta$.
Réciproquement, si la dernière égalité est vérifiée, alors (r^n) est dans $E_{\alpha,\beta}$ (il suffit de multiplier par r^n).
On obtient l'équation caractéristique associée à $E_{\alpha,\beta}$ et elle correspond au polynôme $[X^2 - \alpha.X - \beta]$.
• Si ce polynôme a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors on vérifie immédiatement que (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de $E_{\alpha,\beta}$, puisqu'elles sont dans cet ensemble et qu'elles forment une famille libre.
En effet : $\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \lambda_1.(r_1^n) + \lambda_2.(r_2^n) = 0$, entraîne (pour n valant 0 ou 1) :
$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, et : $\lambda_1.r_1 + \lambda_2.r_2 = 0$, soit : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, puisque : $r_1 \neq r_2$.
Donc pour toute suite (u_n) de $E_{\alpha,\beta}$, il existe donc bien deux constantes complexes a et b telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a.r_1^n + b.r_2^n$, et l'on peut par exemple déterminer a et b à l'aide de u_0 et u_1.
• Si le polynôme admet une racine double r, on sait que (r^n) est élément de $E_{\alpha,\beta}$ mais on vérifie de plus à la main que $(n.r^n)$ est encore dans $E_{\alpha,\beta}$, et que ces deux suites forment encore une famille libre, donc une base de $E_{\alpha,\beta}$.
Donc : $\forall (u_n) \in E_{\alpha,\beta}, \exists (a,b) \in \mathbb{C}^2, (u_n) = a.(n.r^n) + b.(r^n)$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a.n + b).r^n$, valeurs a et b que l'on peut à nouveau déterminer avec u_0 et u_1.
Dans le cas réel, maintenant, $E_{\alpha,\beta}$ est toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
• si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes ou une racine double (réelle), les études et résultats précédents restent valables.
• si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (conjuguées puisque l'équation caractéristique est à coefficients réels), on peut les écrire : $r_\pm = \rho.e^{\pm i.\theta}$, avec : $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0\ (\pi)$.

Les deux suites : $\frac{1}{2}.((r_+^n) + (r_-^n))$, et : $\frac{1}{2.i}.((r_+^n) - (r_-^n))$, vérifient la relation de récurrence (E), comme combinaison linéaire de deux éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E^{\mathbb{C}}_{\alpha,\beta}$.
Mais elles s'écrivent encore : $\frac{1}{2}.((r_+^n) + (r_-^n)) = (\rho^n.\cos(n.\theta))$, et : $\frac{1}{2.i}.((r_+^n) - (r_-^n)) = (\rho^n.\sin(n.\theta))$.
Donc ce sont deux suites réelles vérifiant la relation (E), et ce sont donc des éléments de $E_{\alpha,\beta}$.
Comme enfin, puisque θ n'est pas congru à 0 modulo π, elles forment une famille libre ainsi qu'on le vérifie immédiatement, elles forment finalement une base de $E_{\alpha,\beta}$, là encore en utilisant un argument de dimension et pour toute suite (u_n) de $E_{\alpha,\beta}$, il existe bien deux constantes réelles a et b telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n.(a.\sin(n.\theta) + b.\cos(n.\theta))$.

remarque :

On peut traiter ce problème tout autrement (avec de la diagonalisation), de la façon suivante :
Une suite (u_n) appartient à $E_{\alpha,\beta}$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$, où on a noté :
$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, et : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, et donc si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n.X_0$.
Le polynôme caractéristique de A est alors : $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha.\lambda - \beta$, qui revient à l'équation caractéristique de la suite récurrente.
• si ce polynôme a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors A est diagonalisable.
Les suites de $E_{\alpha,\beta}$ sont telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = P.\begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}.P^{-1}.X_0$,
et en développant, on constate qu'elles sont toutes de la forme : $(u_n) = a.(r_1^n) + b.(r_2^n)$.
Donc : $E_{\alpha,\beta} \subset \mathrm{Vect}((r_1^n), (r_2^n))$, et comme $E_{\alpha,\beta}$ est de dimension 2, on conclut à l'égalité de ces espaces.
Pour toute suite (u_n) de $E_{\alpha,\beta}$, il existe donc bien deux constantes complexes a et b telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a.r_1^n + b.r_2^n$.
• si le polynôme caractéristique de A a une racine double r (non nulle, puisque : $\beta \neq 0$), alors A est trigonalisable, mais pas diagonalisable.
En effet, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à $r.I_2$, donc égale à $r.I_2$, ce qui n'est pas le cas.
Les suites de $E_{\alpha,\beta}$ sont donc telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = P.\begin{pmatrix} r & \lambda \\ 0 & r \end{pmatrix}^n.P^{-1}.X_0 = P.\begin{pmatrix} r^n & n.\lambda.r^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}.P^{-1}.X_0$,
ainsi qu'on le vérifie immédiatement par récurrence (avec λ non nul).

Définition 20.3 : déterminant tridiagonal

Une matrice (ou un déterminant) est dite tridiagonale si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont nuls en dehors de la diagonale principale ainsi que les diagonales situées immédiatement au-dessus et en dessous de cette diagonale.

Théorème 20.3 : calcul d'un déterminant tridiagonal

Un déterminant tridiagonal se calcule par récurrence.
Plus précisément, si : $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, $\Delta_n = \det(A_n)$, vérifie la relation de récurrence :
$\forall n \geq 3, \Delta_n = a_n.\Delta_{n-1} - b_{n-1}.c_{n-1}.\Delta_{n-2}$.
En particulier si les a_i, b_i et c_i sont des familles constantes, alors (Δ_n) constitue une suite récurrente linéaire à deux termes vérifiant : $\forall n \geq 3, \Delta_n - a.\Delta_{n-1} + b.c.\Delta_{n-2} = 0$.

Démonstration :

On développe Δ_n par rapport à sa dernière ligne puis la dernière colonne du déterminant qui apparaît.
Il suffit alors, dans le cas où les trois familles sont constantes, de résoudre l'équation caractéristique associée.