

Algèbre linéaire.

Exercices 2021-2022

Niveau 1.

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

1. Etudier si les ensembles proposés sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés.
Si oui, en donner une base et la dimension.
 - $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$, et : $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2.x + y + z = 0\}$, dans \mathbb{R}^3 .
 - $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2.y - z - t = x - y + 3.z + 2.t = 0\}$, dans \mathbb{R}^4 .
 - $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$, dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel et soit $(u, v) \in E^2$, tel que : $u \neq 0$.
 - a. Montrer que la famille (u, v) est liée si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbf{K}, v = \lambda.u$.
 - b. A-t-on l'implication : $((u, v) \text{ est liée}) \Rightarrow (\exists \mu \in \mathbf{K}, u = \mu.v)$?
3. Déterminer dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la dimension de $\text{Vect}(\sin, \cos)$.
4. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel, et soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs de E .
Montrer que si : $a \in E$, tel que : $a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

Dans les 3 exercices suivants, indiquer si les sous-espaces vectoriels proposés sont supplémentaires.

5. Dans \mathbb{R}^3 , $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2.x + y + z = 0\}$, et : $G = \text{Vect}((0, 1, -1), (1, 1, 1))$.
6. Dans E rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) , on note :
 $u = e_1 - e_2 + e_3, v = 2.e_1 + 2.e_2 + e_3, w = 4.e_1 + 3.e_3, x = -e_1 + 2.e_2$,
puis : $F = \text{Vect}(u, v, w)$, et : $G = \text{Vect}(x)$.
7. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les sous-espaces vectoriels formés des matrices symétriques et antisymétriques.
Même question avec les fonctions paires et impaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. Dans \mathbb{R}^4 , soient :
 $E = \text{Vect}((0, 1, 0, 2)), F = \text{Vect}((1, 2, -1, 0)), G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2.y - z - t = x - y + 3.z + 2.t = 0\}$.
A-t-on : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?
9. Soient : $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$, et : $G = \{x \mapsto a.x + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Applications linéaires.

10. Soit : $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un \mathbf{K} -espace vectoriel quelconque.
 - a. Montrer que : $(u^2 = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(u) \subset \ker(u))$.
 - b. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, montrer de même que : $(f \circ g = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(g) \subset \ker(f))$.
11. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $f^3 = 0$.
Montrer que : $\text{rg}(f^2) \leq \frac{n}{2}$.

12. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel et : $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent (c'est-à-dire tel que : $\exists n \in \mathbf{N}^*, f^n = 0$).
En s'inspirant de la factorisation de $1 - x^n$, montrer que : $g = id_E - f$, est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
13. Pour : $n \geq 2$, on note : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Pour tout polynôme P , on pose par ailleurs : $F(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).X^k$.
Montrer que F définit un automorphisme de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$.
14. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit : $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que :
 $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{ker}(f) + \text{ker}(g)$.
En raisonnant sur les dimensions, montrer que les sommes précédentes sont directes.
15. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit : $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que : $f^2 + f \circ g = id_E$.
Montrer que f et g commutent (on pourra commencer par montrer que f est bijective).
16. Soit E l'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On définit φ et ψ sur E , par : $\forall f \in E, \varphi(f) = f'$, et : $\psi(f) = g$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t).dt$.
a. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E .
b. Déterminer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
c. Déterminer image et noyau de φ et de ψ .
17. Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie et : $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que pour tout sous-espace vectoriel E' de E , on a : $\dim(u(E')) = \dim(E') - \dim(E' \cap \text{ker}(u))$.
18. Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie.
Soient : $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et : $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que : $(g \circ f \text{ est un isomorphisme}) \Leftrightarrow (f \text{ est injective, } g \text{ est surjective, } F = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(g))$.
19. Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels et : $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On note : $A_f = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$.
a. Montrer que A_f est un espace vectoriel.
b. Montrer que si f est injective, alors : $A_f = \{g \in \mathcal{L}(F, E), \text{Im}(f) \subset \text{ker}(g)\}$.
c. Montrer que si f est surjective, alors : $A_f = \{g \in \mathcal{L}(F, E), \text{Im}(g) \subset \text{ker}(f)\}$.
20. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et : $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $rg(f) = rg(f^2)$.
a. Montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, et : $\text{ker}(f) = \text{ker}(f^2)$.
b. En déduire que : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(f)$.
c. Plus généralement, montrer que :
 $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, (rg(g \circ f) = rg(g)) \Leftrightarrow (E = \text{Im}(f) + \text{ker}(g))$,
 $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, (rg(g \circ f) = rg(f)) \Leftrightarrow (\{0\} = \text{Im}(f) \cap \text{ker}(g))$.
21. Images et noyaux itérés.
Soit f un endomorphisme d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie : $n \geq 1$.
Pour tout entier naturel p , on note : $I_p = \text{Im}(f^p)$, et : $N_p = \text{ker}(f^p)$, où : $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ (p fois).
a. Montrer que les suites (I_p) et (N_p) sont respectivement décroissantes et croissantes pour l'inclusion.

- b. Justifier l'existence d'un entier : $r \in \mathbb{N}$, tel que : $I_{r+1} = I_r$.
- c. Vérifier que les deux suites (I_p) et (N_p) sont alors constantes à partir du rang r .
- d. Montrer que : $I_r \oplus N_r = E$.
- e. Justifier que la plus petite valeur r vérifiant l'égalité de la question b est telle que : $r \leq n$.

Projecteurs.

22. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et : $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $f^2 - 3.f + 2.id_E = 0$.
- a. Montrer que $\ker(f - id_E)$ et $\ker(f - 2.id_E)$ sont supplémentaires dans E .
- b. On note p (respectivement q) le projecteur de E sur $\ker(f - id_E)$ (respectivement $\ker(f - 2.id_E)$) dans la direction $\ker(f - 2.id_E)$ (respectivement $\ker(f - id_E)$).
Déterminer $p + q$ et montrer que : $f = p + 2.q$.
- c. Calculer f^n pour toute valeur entière n en fonction de p et q .
- d. Justifier que f est inversible et exprimer f^{-1} en fonction de p et q .
23. Soient : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, et : $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de \mathbb{R}^3 .
Montrer que : $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im}(u)$, puis que : $v \circ u = id_{\mathbb{R}^2}$.
24. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E .
On note ϕ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \phi(f) = f \circ p + p \circ f$.
- a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- b. Montrer que : $\forall f \in \mathcal{L}(E), (\phi(f) = f) \Leftrightarrow (f(\ker(p)) \subset \text{Im}(p), \text{ et } : f(\text{Im}(p)) \subset \ker(p))$.
25. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit : $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $(f \text{ est un projecteur}) \Leftrightarrow (rg(f) + rg(f - id_E) = n)$.
On pourra faire intervenir $\ker(f)$ et $\ker(f - id_E)$.

Matrices.

26. On note, pour : $0 \leq k \leq 3$, $P_k = (X + 1)^k$, puis : $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.
- a. Justifier que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- b. Déterminer la matrice de passage de \mathcal{B} , base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, à \mathcal{B}' puis celle de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .
27. Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- a. Montrer que : $A^2 - 4.A + I_2 = 0$.
- b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
- c. Montrer alors que : $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k \in \text{Vect}(I_2, A)$ (on distinguera suivant le signe de k).
28. Soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- Calculer $(A + I_3)^3$, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1} .
29. On note : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- a. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) F de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant J et stable par multiplication.

b. Préciser la dimension et une base de F .

30. On note : $F = \{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où : $n \geq 2$, et : $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en préciser une base et la dimension.
 b. Calculer le produit de deux éléments de F à l'aide de U .
 c. Calculer : $M(a,b)^p$, pour tout : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et : $p \in \mathbb{N}$.
 d. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit inversible et préciser alors $M(a,b)^{-1}$.

31. Soient : $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nulles avec : $n \geq 2$, vérifiant : $A.B.C = 0$.
 Montrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

32. a. Déterminer noyau et image de f dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- b. Sont-ils supplémentaires ?
 f est-il un projecteur ?

33. On note : $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et u l'application de E dans E , qui à X fait correspondre $X.A$.

Montrer que : $u \in \mathcal{L}(E)$, trouver son image, son noyau, et sa matrice représentative dans la base canonique de E .

34. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X+1)$.

- a. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

35. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , et soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(f)$.
 Montrer à l'aide par exemple d'une analyse-synthèse, qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice par blocs avec : } A' \in \text{Gl}_r(\mathbb{K}), \text{ où : } r = \text{rg}(f).$$

36. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et : $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $u \neq 0, u^2 = 0$.

- a. Si u est solution du problème, comparer $\text{Im}(u)$ et $\text{ker}(u)$, et en déduire $\text{rg}(u)$.
 b. A l'aide d'une analyse-synthèse, montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

37. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, et soit : $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $f^3 = 0, f^2 \neq 0$.

- a. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que : $\forall g \in \mathcal{L}(E), (g \circ f = f \circ g) \Leftrightarrow (g \in \text{Vect}(id_E, f, f^2))$.

c. Généraliser pour un espace de dimension n .

38. Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit : $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$.

a. On suppose qu'il existe : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, telle que : $A.X = 0$.

En utilisant i_0 tel que : $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, aboutir à une contradiction.

b. En déduire que la matrice A est inversible.

Trace.

39. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

a. Pour : $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, calculer $tr(f \circ g - g \circ f)$.

b. En déduire que dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe pas de couple (f, g)

d'endomorphismes tel que : $f \circ g - g \circ f = id_E$.

40. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $tr(A) \neq 0$, et soit ϕ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(M) = tr(A).M - tr(M).A.$$

a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\ker(\phi) \subset Vect(A)$, puis que : $\ker(\phi) = Vect(A)$.

c. Montrer que : $Im(\phi) \subset \ker(tr)$, puis que : $Im(\phi) = \ker(tr)$.

41. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On considère l'équation : $X + tr(X).A = B$, d'inconnue : $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

a. Montrer qu'une solution de cette équation est nécessairement de la forme : $X = B + \lambda.A$, où : $\lambda \in \mathbf{K}$.

b. Réciproquement, montrer que :

- si : $tr(A) \neq -1$, cette équation admet une solution unique que l'on précisera.

- si : $tr(A) = -1$, l'équation n'admet pas de solution ou en admet une infinité suivant la valeur de $tr(B)$, et préciser alors ces solutions.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

42. Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension : $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que si : $D \not\subset H$, alors D et H sont supplémentaires dans E .

b. La réciproque est-elle vraie ?

43. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$, et soit ϕ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2.P(X)$.

a. Déterminer le degré de $\phi(P)$ en fonction de celui de P , pour : $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

b. En déduire que ϕ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on notera encore ϕ).

c. Déterminer $\ker(\phi)$ et une base de $Im(\phi)$.

d. On considère alors l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} notée θ et définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \theta(P) = \int_0^1 P(t).dt.$$

Montrer que θ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que : $\ker(\theta) = Im(\phi)$.

44. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in E$, et f une forme linéaire non nulle sur E .

On appelle ϕ l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E, \phi(x) = f(x).u$.

Montrer que : $\det(id_E + \phi) = 1 + f(u)$.

Calcul de déterminants.

45. Montrer que si α, β, γ sont des réels entre 0 et π , de somme π , alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) & \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

46. Calculer : $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$, où : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis déterminer : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, D = 0\}$.

47. Calculer le déterminant des matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$, où : $n \in \mathbb{N}^*$, b. $\begin{pmatrix} a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$, où : $a \in \mathbb{R}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

48. Soient a_1, \dots, a_n des nombres complexes.

On définit la matrice A par : $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = a_{\max(i,j)}$.

a. Ecrire la matrice A et calculer son déterminant.

b. En déduire les déterminants $\det((\max(i, j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n})$, et $\det((\min(i, j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n})$.

Déterminants tridiagonaux.

49. Soient : $(a, b) \in \mathbb{K}^2, \alpha \in \mathbb{R}$, et : $n \geq 2$.

Calculer : $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$, puis : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2.\cos(\alpha) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2.\cos(\alpha) \end{vmatrix}$.

Pour D_n , on distinguera les cas : $a \neq b$, et : $a = b$.

Déterminant de Vandermonde.

50. Pour : $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose : $V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, puis : $P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que : $P_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

b. Que vaut $V_n(x_1, \dots, x_n)$ si deux des x_i sont égaux entre eux ?

c. Dans le cas où les x_i sont distincts 2 à 2, donner une expression factorisée de P_n .

d. En déduire que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, V_n(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \cdot V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ puis la valeur de } V_n(x_1, \dots, x_n).$$

e. Retrouver, directement à partir de l'expression de $V_n(x_1, \dots, x_n)$ la relation de récurrence précédente.

Déterminants par blocs.

51. Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telles que C et D commutent et D est inversible.

On pose par ailleurs : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, et : $N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

A l'aide d'un produit faisant intervenir la matrice N , montrer que : $\det(M) = \det(A.D - B.C)$.

52. Soit : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, et soit M définie par blocs par : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

En utilisant des combinaisons de lignes ou de colonnes, montrer que : $\det(M) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$.

Déterminants et applications linéaires.

53. Soit : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice représentative dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer $rg(A)$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que : $(x, y, z, t) \in \text{Im}(u)$.

54. Soit : $F = \{ x \mapsto e^x \cdot P(x), \text{ avec } : P \in \mathbb{R}_n[X] \}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b. Montrer que la dérivation de fonctions est un endomorphisme de F dont on calculera le déterminant.

55. Soit f un endomorphisme de \mathbb{C} considéré comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

a. Rappeler la dimension de \mathbb{C} dans ce cas, puis une base de \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel.

b. Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) de complexes tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a \cdot z + b \cdot \bar{z}$.

c. Exprimer $\det(f)$ en fonction de a et de b .

Systèmes linéaires.

56. Résoudre le système : $(S_1) \begin{cases} m \cdot x + y + z & = & 1 \\ x + m \cdot y + z & = & m \\ x + y + m \cdot z & = & 1 \\ x + y + z & = & m \end{cases}$,

avec : $m \in \mathbb{R}$.

57. Peut-on trouver des valeurs de m , pour lesquelles le système (S) admet d'autres solutions que $(0,0,0)$?

$$(S) \begin{cases} x - (m+1) \cdot y - z & = & 0 \\ m \cdot x + 2 \cdot y - (3m+2) \cdot z & = & 0 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z & = & 0 \end{cases}$$

Calcul de rang de matrice.

58. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, et : $\alpha \in \mathbb{C}$, on note : $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M(\alpha))$, et en déduire $rg(M(\alpha))$, suivant la valeur de α .

Niveau 2.

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

59. Dans : $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} , pour : $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sin(x+n).$$

Déterminer, pour tout : $n \in \mathbb{N}$, $\dim(F_n)$, où : $F_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

60. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{F}(-1, +1, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions définies par :

$$\forall x \in]-1, +1[, f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

61. Montrer que : $\text{Vect}(\sin, \cos) \oplus \{ f \in C^0([0, \pi], \mathbb{R}), f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \} = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$.

62. Dans $\mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, et : $G = \{ P \in \mathbb{R}[X], P(a) = P'(a) = 0 \}$, avec : $a \in \mathbb{R}$, sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

63. Soit : $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et u qui à f fait correspondre f'' .

a. Déterminer $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

b. A-t-on : $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$?

64. Soient : $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, et T l'application définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(4.(t-t^2)).dt.$$

a. Justifier que T est un endomorphisme de E .

b. T est-il injectif ? surjectif ?

65. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et Δ (dérivée discrète), l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

a. Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on notera Δ_n .

b. Montrer que : $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'ordre $n+1$).

c. En déduire qu'il existe des constantes a_0, \dots, a_{n+1} (que l'on déterminera) telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot P(X+k) = 0.$$

On pourra faire intervenir l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], T(P) = P(X+1)$.

66. Soit f un endomorphisme d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E .

On suppose que pour tout élément x de E , $(x, f(x))$ est une famille liée.

Montrer que f est une homothétie.

Remarque : en dimension finie, on pourra utiliser une base de l'espace.

67. Soit : $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et soit p , qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = u_0, v_1 = u_1, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 6.v_n.$$

Montrer que p est un projecteur de E .

68. Soient f , g et h trois endomorphismes d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E , tels que :

$$f \circ g = h, g \circ h = f, h \circ f = g.$$

a. Montrer que f , g et h ont même image et même noyau.

b. Montrer que : $f^5 = f$.

- c. En déduire que : $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.
69. Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E tels que : $f \circ g = \text{id}_E$.
- Montrer que : $\ker(g \circ f) = \ker(f)$, et : $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
 - Montrer que : $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$.
 - Dans quel cas peut-on conclure : $g = f^{-1}$?
 - Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.
70. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie.
On veut montrer que : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, |rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$.
- Montrer que : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, et en déduire la deuxième inégalité.
 - En adaptant l'inégalité précédente, démontrer que : $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, (rg(f) - rg(g)) \leq rg(f + g)$.
 - En déduite la première inégalité.
71. Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie.
On pose E' un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E , soit : $E = E' \oplus \ker(u)$.
- Montrer que : $\ker(v \circ u) = \ker(u) \oplus \ker(v \circ u|_{E'})$.
 - On note (e'_1, \dots, e'_k) , une base de $\ker(v \circ u|_{E'})$.
Montrer que $(u(e'_1), \dots, u(e'_k))$ est libre et en déduire que : $\dim(\ker(v \circ u|_{E'})) \leq \dim(\ker(v))$.
 - Montrer que : $\dim(\ker(v \circ u)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.
72. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel, et : $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, tels que : $g \circ f \circ g = g, f \circ g \circ f = f$.
- Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans E .
 - Justifier que : $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.
73. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , et : $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que : $u^{-1}(u(F)) = F + \ker(u)$.
 - Exprimer de même $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\text{Im}(u)$.
 - Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que : $u^{-1}(u(F)) = u(u^{-1}(F))$.
74. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques sur \mathbb{R} .
A toute fonction f de E , on associe : $\phi(f) = f - \int_0^1 f(t).dt$.
Montrer que ϕ est une projection vectorielle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Matrices.

75. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit f dans $\mathcal{L}(E)$, tel que : $f^2 = 0$.
- On suppose E de dimension 4.
Que peut-on dire de $rg(f)$?
Montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice représentative de f est 'simple'.
 - Si E est de dimension n , montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que : $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
matrice définie par blocs, avec : $r = rg(f)$.
76. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n , et : $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que : $\ker(u) = \text{Im}(u)$, si et seulement si : $u^2 = 0$, et : $n = 2.rg(u)$.
 - Montrer que : $\ker(u) = \text{Im}(u)$, si et seulement si il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée inversible de type $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

77. On note : $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où : $n \in \mathbb{N}^*$.

On note par ailleurs u_n , de E_n dans E_{n+1} , tel que : $u_n(P) = Q$, où : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{-x^2} \cdot P(x))$.

Vérifier que ces données sont cohérentes, trouver $\text{Im}(u_n)$, $\text{ker}(u_n)$, et $\text{mat}(u_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1})$, où \mathcal{B}_n est la base canonique de E_n .

78. Soit : $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i}\right)$.

Préciser P pour : $n = 3, Q = X^3$.

79. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$.

Calculer A^2 puis A^{-1} .

80. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A , calculer A^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

b. En déduire M^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

Calcul de déterminants.

81. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et A' déduite de A par : $\forall 1 \leq i, j \leq n, a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j}$.

Calculer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

82. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = \pm 1$.

Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1} .

83. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} \geq 0$, et : $\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1$.

Montrer à l'aide d'une récurrence que : $|\det(A)| \leq 1$.

84. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, tels que : $A \cdot B - B \cdot A = B$.

a. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, A \cdot B^k = B^k \cdot (A + k \cdot I_n)$.

b. En déduire que : $\det(B) = 0$.

c. Que peut-on dire de $\text{tr}(B)$?

85. Pour a, b, c dans \mathbf{K} , on définit les matrices carrées : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et : $M(a, b) = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix}$.

a. Montrer que : $x \mapsto \varphi(x) = \det(M(a, b) - x \cdot J)$, est un polynôme en x de degré au plus 1.

En déduire dans le cas où : $a \neq b$, et après avoir calculé $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, la valeur de $\det(M(a,b))$.

b. Montrer que : $x \mapsto \psi(x) = \det(M(a,x))$, est un polynôme en x , et donc une fonction continue de x .

En déduire la valeur de $\det(M(a,a))$, (soit $\det(M(a,b))$ lorsque : $a = b$).

c. Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

86. Soit : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$, pour : $n \geq 1$.

a. En écrivant la dernière colonne sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$, et à l'aide de la n -linéarité, trouver

une relation entre D_n et D_{n+1} .

b. En déduire la valeur de D_n à l'aide en particulier de : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminants tridiagonaux.

87. On pose : $A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$, pour : $n \geq 1$, et : $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\det(A_n(x))$ pour tout entier n suivant la valeur de x .

Déterminant de Vandermonde.

88. Soient (x_1, \dots, x_n) des réels, et f_1, \dots, f_{n-1} , des polynômes normalisés de degrés respectifs $1, 2, \dots, n-1$.

a. Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, et en déduire la valeur du déterminant.

b. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\cos(k.x)$ est un polynôme en $\cos(x)$, de degré k et de coefficient dominant

égal à 2^{k-1} , et en déduire la valeur de : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix}$, où : $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Déterminants, systèmes, applications linéaires et matrices.

89. Résoudre le système : $(S_2) \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ a.x + b.y + c.z & = d \\ a.(a-1).x + b.(b-1).y + c.(c-1).z & = d.(d-1) \end{cases}$,

avec : $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

90. Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, telle que : $f(X) = {}^tX$.

a. Calculer $\det(f)$.

b. Pouvait-on prévoir sa valeur ? ou que ce déterminant serait non nul ?

91. Soit A une matrice réelle à diagonale strictement dominante, donc telle que : $\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$.

On rappelle qu'une telle matrice est inversible (voir exercice 38).

On suppose de plus que : $\forall 1 \leq i \leq n, a_{i,i} > 0$.

a. Montrer que $f : x \mapsto \det(A + x.I_n)$, est polynomiale de degré n et préciser son coefficient dominant.

b. Montrer que la matrice $(A + x.I_n)$ est à diagonale strictement dominante pour tout : $x \in \mathbb{R}^+$.

c. Etudier la limite de f en $+\infty$, et en déduire que : $\det(A) > 0$.

92. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que : $\exists P \in \text{Gl}_n(\mathbb{C}), B = P^{-1}.A.P$.

On décompose P en partie réelle et imaginaire : $P = P_1 + i.P_2$, avec : $(P_1, P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a. Montrer que : $P_1.B = A.P_1$, et : $P_2.B = A.P_2$.

b. Montrer que l'application : $x \mapsto \det(P_1 + x.P_2)$, est polynomiale en x .

c. En déduire que : $\exists a \in \mathbb{R}, \det(P_1 + a.P_2) \neq 0$.

d. Conclure que : $\exists Q \in \text{Gl}_n(\mathbb{R}), B = Q^{-1}.A.Q$.

e. Que vient-on de démontrer ?

Niveau 3.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

93. Soient : $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $E^+ = \{ f \in E, f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^- \}$, $E^- = \{ f \in E, f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^+ \}$, et E^0 l'ensemble des fonctions constantes sur \mathbb{R} .

a. Montrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de E .

b. Montrer que : $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

94. Soient : $F = \{ f \in C^0([-1, +1], \mathbb{C}), \int_{-1}^{+1} f(t).dt = 0 \}$, et : $G = \{ f \in C^0([-1, +1], \mathbb{C}), f \text{ constante} \}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^0([-1, +1], \mathbb{C})$.

95. Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites complexes, les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 = u_1 = 0 \},$$

$$G = \{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u_0 \in \mathbb{C}, u_1 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5.u_{n+1} - 4.u_n \},$$

sont-ils supplémentaires ?

Applications linéaires, projecteurs.

96. Soit f un endomorphisme d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension n .

On suppose que f est nilpotent d'indice p , à savoir : $f^p = 0, f^{p-1} \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe : $x \in E$, tel que : $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ libre.

b. En déduire que : $p \leq n$, puis que : $f^n = 0$.

97. On note : $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et D l'application dérivée dans E .

On définit par ailleurs : $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, par : $\forall f \in E, \varphi(f) = f'' - 3.f' + 2.f$.

a. Exprimer φ en fonction de D .

b. Montrer que : $\ker(\varphi) = \ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E)$.

c. En déduire $\ker(\varphi)$ sans l'aide de la résolution des équations différentielles du second ordre.

98. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie n .

Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- $\exists u \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $\text{Im}(u) = F$, et : $\ker(u) = G$,

- $\dim(F) + \dim(G) = n$.

99. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel, E' un sous-espace vectoriel et F_1, F_2 des supplémentaires de E' dans E .
Soit p la projection de E sur F_1 parallèlement à E' .
Montrer que p définit un isomorphisme de F_2 sur F_1 .

100. Soient E_0, E_1, \dots, E_n , des \mathbf{K} -espaces vectoriels, et f_0, f_1, \dots, f_{n+1} , des applications linéaires, vérifiant :

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n+1}} \{0\},$$

et la propriété de suite exacte, à savoir : $\forall 0 \leq k \leq n, \text{Im}(f_k) = \ker(f_{k+1})$.

a. Que cela signifie-t-il pour f_1 et f_n ?

b. En supposant tous les espaces de dimension finie, montrer que : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \dim(E_k) = 0$.

c. Construire une suite exacte avec $F + G$, $F \cap G$ et $F \times G$, où F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie E et retrouver la formule de Grassmann.

Matrices.

101. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, soit : $\{ C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), X.C = C.X \}$.

On pourra utiliser une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

102. Soit : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang r .

Montrer qu'on peut trouver deux matrices : $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et : $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$, telles que : $A = BC$.

103. Montrer par récurrence sur n que toute matrice nilpotente de taille n est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire une matrice triangulaire dont la diagonale est formée de 0).

104. Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, telle que : $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$.

Pour : $n \geq 2$, on note : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Montrer que : $\forall n \geq 2$, on a : $b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Trace.

105. Soit : $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, telle que : $\text{rg}(H) \leq 1$.

a. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, telle que : $H = U \cdot {}^t V$, et : $\text{tr}(H) = {}^t V \cdot U$.

b. En déduire que : $H^2 = \text{tr}(H) \cdot H$.

c. Soit : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrer l'équivalence : $(A^2 = 0) \Leftrightarrow (\text{rg}(A) \leq 1, \text{ et } : \text{tr}(A) = 0)$.

106. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système d'inconnues X et Y suivant :

$$\{ \text{tr}(X) \cdot Y + \text{tr}(Y) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \text{ et } : X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \}.$$

107. Soient : $N = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists p \in \mathbb{N}, M^p = 0 \}$, et : $T = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0 \}$.

Montrer que : $\text{Vect}(N) = T$.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

108. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E .

a. En utilisant une base de E adaptée à F , montrer que F est l'intersection d'un nombre fini

d'hyperplans.

b. Montrer que le nombre minimum d'hyperplans permettant d'obtenir le résultat précédent est $\dim(E) - \dim(F)$.

109. a. Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifient : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \operatorname{tr}(A.X) = \operatorname{tr}(B.X)$, montrer que : $A = B$.

b. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$.

Montrer que : $\exists ! F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), f(A) = \operatorname{tr}(A.F)$.

c. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, f(A.B) = f(B.A)$.

Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbf{K}, f = \lambda \operatorname{tr}$.

110. Soient a_0, \dots, a_n $n+1$ réels distincts deux à deux.

Pour tout k , on pose : $P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(X - a_j)}{(a_k - a_j)}$.

a. Montrer que (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et trouver les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.

b. Montrer que : $\forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que :

$$\forall 0 \leq i \leq n, Q(a_i) = b_i.$$

c. Montrer que : $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t).dt = \sum_{k=0}^n c_k \cdot P(a_k)$.

d. Déterminer les éléments c_0, \dots, c_n .

111. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, et a un réel.

Soient y_0, y_1, y_2 les formes linéaires qui à P de E font correspondre $P(a), P'(a), P''(a)$.

a. Ces formes sont-elles indépendantes ?

b. Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$, et aux formes y_k qui à P font correspondre $P^{(k)}(a)$.

c. Montrer qu'on obtient ainsi une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

112. Dans : $E = \mathbb{R}_3[X]$, avec a, b, c réels deux à deux distincts, on note y_a, y_b, y_c les formes qui à P dans E ,

font correspondre $P(a), P(b), P(c)$, et y définie par : $y(P) = \int_a^b P(t).dt$.

La famille (y_a, y_b, y_c, y) est-elle libre dans E^* ?

113. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel, et y^*, z^* des éléments de E^* non nuls.

Montrer qu'il existe un vecteur x de E vérifiant : $y^*(x).z^*(x) \neq 0$.

Formes multilinéaires.

114. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n , soit \mathcal{B} une base de E , et soit : $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour : $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on pose : $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \det \mathcal{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Montrer que f est n -linéaire alternée, puis que : $f = \operatorname{tr}(u) \cdot \det \mathcal{B}$.

115. a. Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et a, x_1, \dots, x_n des vecteurs de E .

Montrer que : $\det \mathcal{B}(a + x_1, a + x_2, \dots, a + x_n) = \det \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \det \mathcal{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

b. En déduire :
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}, \text{ où } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \text{ sont des scalaires.}$$

Calculs de déterminants.

116. Calculer le déterminant de la matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{i,j} = (i + j - 1)^2$.

On pourra faire intervenir une famille de n polynômes de degré 2, notamment pour : $n \geq 3$.

117. On note, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, A la matrice $n \times n$ dont le terme générique $a_{i,j}$ vaut :

$$S_k = \sum_{p=1}^k p \text{ où : } k = \min(i, j).$$

Préciser la matrice A et calculer son déterminant.

118. Soit : $(a, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, et :

$$D_n = \begin{vmatrix} a + x_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a + x_n \end{vmatrix}, E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \text{ où le } 1 \text{ est sur la } i^{\text{ème}} \text{ ligne et : } C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

a. Ecrire D_n à l'aide des colonnes E_i et C .

b. En déduire, à l'aide de la n -linéarité du déterminant, la valeur de D_n .

119. Déterminants de Cauchy et de Hilbert.

Soient : $n \geq 2$, et : $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels tels que : $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_i + b_j \neq 0$.

On pose par ailleurs : $D_n = \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

a. En utilisant comme pivot la dernière colonne dans un premier temps, puis la dernière ligne dans un

deuxième temps, montrer que : $D_n = \frac{(b_1 - b_n) \dots (b_{n-1} - b_n) \cdot (a_1 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n) \cdot (a_n + b_n) \cdot (a_n + b_{n-1}) \dots (a_n + b_1)} \cdot D_{n-1}$.

b. En déduire la valeur de D_n pour tout : $n \geq 1$ (déterminant de Cauchy).

c. Dans le cas où : $a_i = i, b_j = j, \forall 1 \leq i, j \leq n$, donner la valeur de D_n (déterminant de Hilbert).

120. Pour : $(p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note : $\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que : $\forall (p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \varphi_p(x+1) - \varphi_p(x) = (p+1)! \cdot x^p$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \varphi_p(n+1) = (p+1)! \cdot \sum_{k=1}^n k^p$.

c. En déduire la valeur de : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$, en calculant 3 déterminants.

121. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

a. Que dire de A si : $n = 1$?

Pour : $n \geq 2$, on note : $r = \text{rg}(A)$.

b. Montrer que : $\det(A) = 0$, puis que : $r < n$.

c. Montrer qu'il existe une matrice X de rang $n - r$ telle que : $\det(A + X) \neq 0$.

En déduire que : $r = 0$, puis que A est nulle.