Intégration (corrigé des indispensables).

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

1. Tout d'abord, toutes les fonctions proposées sont continues sur les intervalles où on les intègre et les intégrales correspondantes existent.
   De façon générale, dans la suite, on les désigne toujours par I.
   Puis :
   • pour la première, on utilise une intégration par parties :
   $$\int_0^1 \arctan(x).dx = [x.\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\ln(2),$$
   • pour la deuxième, même technique :
   $$\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx = \left[x.(\ln(2.x))^2\right]_1^2 - 2.\int_1^2 \ln(2.x).dx = 2.(\ln(4))^2 - (\ln(2))^2 - 2.\left[[x.\ln(2.x)]_1^2 - \int_1^2 dx\right],$$
   soit finalement : $\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx = 7.(\ln(2))^2 - 6.\ln(2) - 1$
   • pour la troisième, on la coupe en deux puis on utilise des changements de variable :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{2-\sin^2(x)}.dx + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+u^2},$$
   où on a pose : u = cos(x), dans la deuxième partie qui donne :
   $$\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}.$$
   Et la première partie, avec le changement de variable : u = sin(x), donne :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{2-\sin^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right).du = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\ln(3).$$
   Finalement l'intégrale initiale vaut : $I = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\ln(3) + Arc\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$.
   • Pour l'intégrale suivante, on commence par une intégration par parties, et :
   $$\int_0^1 (1-x^2).Arc\tan(x).dx = \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right).Arc\tan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{x^3}{3}\right).\frac{1}{1+x^2}.dx,$$
   soit : $I = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\ln(2) + \frac{1}{3}.\int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\ln(2) + \frac{1}{3}.\left[x - \frac{1}{2}.\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}.\ln(2) + \frac{1}{3}$.
   • Pour cette dernière intégrale (dont l'existence est garantie par la continuité sur [0,1] des fonctions partie réelle et partie imaginaire, on écrit :
   $$\int_0^1 \frac{dt}{i.t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - i.\int_0^1 \frac{t.dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}.\ln(2).$$

2. a. Cette première fonction est définie et continue sur ℝ donc y admet des primitives, toutes égales entre elles à une constante additive près (ℝ est un intervalle).
   Puis : $F(x) = \int (e^{2.x} - 2.e^x + 1).dx = \frac{e^{2.x}}{2} - 2.e^x + x + C$, avec : C ∈ ℝ.
   b. • La fonction admet des primitives sur ℝ, et pour les calculer, on peut utiliser la partie réelle d'une exponentielle puis des intégrations par parties, et :
   $$F(x) = \int (x^2+1).\mathrm{Re}(e^{(1+i).x}).dx = \mathrm{Re}\left((\frac{1}{2}.(1-i).x^2 + i.x - i).e^{(1+i).x}\right) + C,$$
   soit : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2}.(\cos(x)+\sin(x)) - x.\sin(x) + \sin(x)\right).e^x + C$, avec : C ∈ ℝ.
   • La fonction admet des primitives sur les deux intervalles (-∞,2[et]2,+∞).

Sur ces intervalles on procède à une intégration par parties :

$$F(x) = \int \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right).dx = x.\arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3.\int \frac{x}{2.x^2 - 2.x + 5}.dx.$$

On met la fraction sous la forme : $\frac{x}{2.x^2 - 2.x + 5} = \frac{1}{4}.\frac{4.x-2}{2.x^2 - 2.x + 5} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x^2 - x + \frac{5}{2}}$.

La première fraction s'intègre alors en ln et on met le trinôme dans la deuxième sous forme canonique :

$$\frac{1}{x^2 - x + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} = \frac{4}{9}.\frac{1}{\left(\frac{2.x-1}{3}\right)^2 + 1},$$

qui s'intègre en Arctan (avec un changement de variable).

Finalement : $F(x) = x.\arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + \frac{3}{4}.\ln(2.x^2 - 2.x + 5) + \frac{1}{2}.\arctan\left(\frac{2.x-1}{3}\right) + C$, avec : C ∈ ℝ.

• La fonction étant définie et continue sur ℝ$^{+*}$, elle y admet des primitives et :

$$F(x) = \int x.\ln(x).dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \int \frac{x}{2}.dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$, avec : C ∈ ℝ.

• La fonction est définie et continue sur ℝ et y admet des primitives :

$$F(x) = \int \ln(1+x^2).dx = x.\ln(1+x^2) - \int \frac{2.x^2}{1+x^2}.dx = x.\ln(1+x^2) - 2.\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right).dx,$$

et finalement : $F(x) = x.\ln(1+x^2) - 2.x + 2.Arc\tan(x) + C$, avec : C ∈ ℝ.

• La fonction est définie et continue sur tout intervalle : $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + 2.k\pi, \frac{3.\pi}{2} + 2.k\pi\right[$, avec : k ∈ ℤ, et :

$$F(x) = \int \sin(x).\ln(1+\sin(x)).dx = -\cos(x).\ln(1+\sin(x)) + \int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}.dx,$$

soit : $F(x) = -\cos(x).\ln(1+\sin(x)) + \int (1-\sin(x)).dx = -\cos(x).\ln(1+\sin(x)) + x + \cos(x) + C_k$,

où C_k est une constante réelle pour chaque intervalle.

c. • La première fonction est définie, continue sur les intervalles (-∞,0[et]0,+∞) et y admet des primitives.

Puis : $F(x) = \int \frac{dx}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}.\int \frac{2.x.dx}{x^2.(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}.\int \frac{du}{u.(1+u)^3}$,

avec : u = x^2, = φ(x), φ étant une fonction C^1 de ℝ$^{+*}$ (ou ℝ$^{-*}$) dans ℝ$^+$.

On décompose alors la fraction en éléments simples : $\frac{1}{u.(1+u)^3} = \frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)} - \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{(1+u)^3}$,

d'où : $F(x) = \ln|u| - \ln|1+u| + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+u)^2} + C_\pm = 2.\ln|x| - \ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + C_\pm$,

où $C_\pm$ est une constante réelle pour chaque intervalle.

• La fonction suivante est définie et continue sur chaque intervalle : $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + 2.k\pi, \frac{\pi}{2} + 2.k\pi\right[$, avec :

k ∈ ℤ, et : $F(x) = \int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.\sin(x).dx = -\int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}.du$, avec : u = cos(x).

D'où : $F(x) = -\int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}.du = -2.\sqrt{u} + \frac{2}{5}.u^{\frac{5}{2}} + C_k = -2.\sqrt{\cos(x)} + \frac{2}{5}.(\cos(x))^{\frac{5}{2}} + C_k$, avec : C_k ∈ ℝ.

• La fonction suivante est définie et continue sur [$-\frac{1}{2}$, +∞), et y admet donc des primitives.

Puis : $F(x) = \int 3^{\sqrt{2.x+1}}.dx = \int u.e^{u.\ln(3)}.du$, avec le changement de variable : $u = \sqrt{2.x+1}$.

D'où : $F(x)=\int u.e^{u.\ln(3)}.du=\frac{u}{\ln(3)}.e^{u.\ln(3)}-\frac{1}{(\ln(3))^2}.e^{u.\ln(3)}+C=\left(\frac{\sqrt{2.x+1}}{\ln(3)}-\frac{1}{(\ln(3))^2}\right).3^{\sqrt{2.x+1}}+C$,

avec toujours : C ∈ ℝ.

• Enfin, pour cette fonction, elle est définie et continue sur les intervalles :

$\left]-\frac{\pi}{2}+2.k.\pi,+\frac{\pi}{2}+2.k.\pi\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}+2.k.\pi,\pi+2.k.\pi\right[$ et : $\left]\pi+2.k.\pi,\frac{3.\pi}{2}+2.k.\pi\right[$.

Sur ces intervalles : $F(x)=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x).(1+\cos(x))}.dx=-\int\frac{du}{u.(1+u)}$, avec : u = cos(x).

d'où : $F(x)=\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\right).du=\ln|u+1|-\ln|u|+C_k=\ln\left(\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right)+C_k$,

où il y a une multitude de constantes : C_k ∈ ℝ.

d. • La première fraction est définie et continue sur ℝ, donc y admet des primitives.
On peut ensuite effectuer un changement de variable : u = x + 2, et :
Puis on utilise une transformation de la fraction :

$$F(x)=\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+4.x+5)^2}.dx=\int\frac{(u^2-5.u+7)}{(u^2+1)^2}.du=\int\left[\frac{1}{u^2+1}-\frac{5}{2}.\frac{2.u}{(u^2+1)^2}+\frac{6}{(u^2+1)^2}\right].du,$$

et : $F(x)=\int\left[\frac{1}{u^2+1}-\frac{5}{2}.\frac{2.u}{(u^2+1)^2}+\frac{6}{(u^2+1)^2}\right].du=\arctan(u)+\frac{5}{2}.\frac{1}{u^2+1}+6.\int\frac{du}{(u^2+1)^2}$.

Enfin : $\arctan(u)+C=\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{u}{u^2+1}+\int\frac{2.u^2}{(u^2+1)^2}.du=\frac{u}{u^2+1}+2.\int\frac{du}{u^2+1}-2.\int\frac{du}{(u^2+1)^2}$.

D'où : $\int\frac{du}{(u^2+1)^2}=\frac{1}{2}.\int\frac{du}{u^2+1}+\frac{1}{2}.\frac{u}{u^2+1}=\frac{1}{2}.\arctan(u)+\frac{1}{2}.\frac{u}{u^2+1}+C$.

Finalement : $F(x)=4.\arctan(u)+\frac{1}{2}.\frac{6.u+5}{u^2+1}+C=4.\arctan(x+2)+\frac{1}{2}.\frac{6.x+17}{(x+2)^2+1}+C$, avec : C ∈ ℝ.

• La fonction est définie, continue sur tout intervalle]k.π, (k+1).π[, et :

$F(x)=\int\frac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}.dx=\int\frac{du}{u^2.(1+u^2)^2}$, avec le changement de variable : u = tan(x), (règles de Bioche).

Puis : $F(x)=\int\left[\frac{1}{u^2}-\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)^2}\right].du=-\frac{1}{u}-\frac{3}{2}.\arctan(u)-\frac{1}{2}.\frac{u}{1+u^2}+C_k$.

D'où : $F(x)=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{3}{2}.x-\frac{1}{2}.\sin(x).\cos(x)+C_k$, avec C_k, constante réelle par intervalle.

e. • La première fonction est définie sur ℝ où elle y admet des primitives.
On met alors le trinôme sous forme canonique, puis on utilise un changement de variable en sh :

$F(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}.dx=\frac{2}{\sqrt{3}}.\int\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{2.x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}.dx=\frac{1}{2}.\int(1+\sqrt{3}.sh(u)).du$, avec : $\frac{2.x-1}{\sqrt{3}}=sh(u)$.

Puis : $F(x)=\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.ch(u)+C=\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{1+sh^2(u)}+C=\frac{1}{2}.\arg sh\left(\frac{2.x-1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{x^2-x+1}+C$, C ∈ ℝ.

• La fonction est définie, continue sur les trois intervalles (-∞, -3[,]-3,1[et]2,+∞) où elle y admet des primitives.

On transforme alors l'écriture de la fonction et on utilise le changement de variable : $u=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, et :

$$F(x)=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-3.x+2}}=\int\frac{1}{(x+3).(x-1)}.\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.dx=-2.\int\frac{du}{5.u^2-4}.$$

Finalement : $F(x) = -\frac{1}{2.\sqrt{5}}.\ln\left|\frac{u.\sqrt{5}-2}{u.\sqrt{5}+2}\right| + C = \frac{1}{2.\sqrt{5}}.\ln\left|\frac{\sqrt{|5.x-5|}+2.\sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|5.x-5|}-2.\sqrt{|x-2|}}\right| + C$, avec : C ∈ ℝ.

3. a. Tout d'abord, I_n et J_n existent puisque les fonctions sous les intégrales sont définies et continues sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   Puis on peut utiliser dans la deuxième intégrale le changement de variable : $u = \frac{\pi}{2} - t$, et :

   ∀ n ∈ ℕ, $J_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).du = I_n$.

   b. Pour cela : ∀ n ∈ ℕ, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(u) - \sin^n(u)).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).(\sin(u) - 1).du \leq 0$,
   car la fonction sous l'intégrale est négative (et les bornes sont dans le bon sens).
   De plus pour : n ∈ ℕ, la fonction dans l'intégrale définissant I_n est positive, continue et non nulle en $\frac{\pi}{2}$ donc I_n est strictement positive.

   c. Soit n entier fixé.
   Une intégration par parties donne :

   $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(u).\sin(u).du = \left[-\cos(u).\sin^{n+1}(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1).\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).\cos^2(u).du$.

   En transformant le cosinus en sinus, on obtient : $I_{n+2} = 0 + (n+1).(I_n - I_{n+2})$, d'où le résultat.

   d. Pour n pair : n = 2.p ≥ 2, on peut écrire : $I_{2.p} = \frac{2.p-1}{2.p}.I_{2.p-2}$.

   On propose alors, après tâtonnements : ∀ p ≥ 0, $I_{2.p} = \frac{2.p-1}{2.p}.\frac{2.p-3}{2.p-2}...\frac{1}{2}.I_0 = \frac{(2.p)!}{2^{2.p}.(p!)^2}.\frac{\pi}{2}$, que l'on démontre ensuite proprement par récurrence.

   De même, on obtient : ∀ p ≥ 0, $I_{2.p+1} = \frac{2.p}{2.p+1}.\frac{2.p-2}{2.p-1}...\frac{2}{3}.I_1 = \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}.1 = \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}$.

   e. Il suffit de multiplier l'égalité obtenue en c par I_{n+1} pour avoir : ∀ n ∈ ℕ, $(n+2).I_{n+2}.I_{n+1} = (n+1).I_n.I_{n+1}$, et constater ainsi que la suite proposée est bien constante.
   La valeur constante cherchée est donc : $1.I_1.I_0 = \frac{\pi}{2}$.

   f. On procède maintenant en deux étapes :
   • la suite étant décroissante et strictement positive, on a : ∀ n ∈ ℕ, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, puis en divisant par I_n, et en utilisant l'égalité du c, on obtient : ∀ n ∈ ℕ, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

   Le théorème des gendarmes montre alors que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, d'où : $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.

   • puis : ∀ n ∈ ℕ, $\frac{\pi}{2} = (n+1).I_n.I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n.I_n^2$, d'où : $I_n^2 = \frac{\pi}{2.n}.(1 + o(1))$, et : $I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2.n}}.\sqrt{1 + o(1)}$.

   On peut ainsi conclure que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2.n}}$.

   Remarque : en partant de : $n! \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}$, et en utilisant cet équivalent dans l'égalité donnant $I_{2.p}$, par exemple, on peut en déduire que : $C = \sqrt{2.\pi}$, d'où la formule de Stirling.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

4. Notons F_a la primitive de F sur [a,b] qui s'annule en a : $\forall$ x $\in$ [a,b], $F_a(x) = \int_a^x f(t).dt$.

Toute primitive de f sur [a,b], s'écrit : F = F_a + C, avec : C $\in$ $\mathbb{R}$.

Trouver F qui répond au problème revient donc à résoudre : $\int_a^b F(t).dt = \int_a^b F_a(t).dt + C.(b-a) = 0$.

Le problème a donc bien une unique solution, la primitive correspondant à la valeur : $C = -\dfrac{\int_a^b F_a(t).dt}{b-a}$.

5. La fonction g proposée est définie et continue sur [0,1].
Si elle ne s'y annule pas, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle y garde un signe constant.
Supposons alors, quitte à la changer en son opposée, que g soit strictement positive sur [0,1].
Alors étant de plus continue, on aurait : $\int_0^1 g(t).dt > 0$.
Or : $\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
Conclusion : g s'annule sur [0,1] et f admet bien un point fixe.

6. Sous l'hypothèse proposée, on a donc : $\int_0^1 (f^2 + g^2 + 2.f^2g^2 - 2.f^2g - 2.g.f^2) = 0$.
Sous l'intégrale apparaît la fonction : $f^2 + g^2 + 2.f^2g^2 - 2.f^2g - 2.g.f^2 = f^2.(g-1)^2 + g^2.(f-1)^2$.
Puisque cette fonction est continue, positive, d'intégrale nulle sur [0,1], on en déduit que :

$\forall$ x $\in$ [0,1], $\begin{cases} f(x) = 0, \textit{ou} : g(x) = 1 \\ \qquad et \\ g(x) = 0, \textit{ou} : f(x) = 1 \end{cases}$, soit : f(x) = g(x) = 0, ou : f(1) = g(1) = 0.

Supposons alors qu'en une valeur a de [0,1], on ait : f(a) = 0.
Puisque f est supposée non nulle, il existe une valeur b dans [0,1] où : f(b) $\neq$ 0, donc telle que : f(b) = 1.
Mais alors le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f montre que : $\exists$ c $\in$ [0,1], f(c) = $\frac{1}{2}$, ce qui n'est pas possible vue l'alternative précédente.
Conclusion : $\forall$ a $\in$ [0,1], f(a) $\neq$ 0, donc : f(a) = 1 = g(a).

7. Puisque f est de classe C^1 sur [a,b], on peut écrire :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $\int_a^b f(t).\cos(n.t).dt = \left[\frac{\sin(n.t)}{n}.f(t)\right]_a^b - \frac{1}{n}.\int_a^b f'(t).\sin(n.t).dt$.

Donc, en notant M un majorant de |f| sur [a,b], on a :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $\left|\int_a^b f(t).\cos(n.t).dt\right| \leq \frac{2.M}{n} + \frac{1}{n}.\int_a^b |f'(t)|.dt$.

En faisant tendre n vers +∞, on en déduit bien que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t).\cos(n.t).dt = 0$.

8. a. On peut commencer par écrire que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $|I_n - 1| = \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - 1\right).dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}.dx \leq \int_0^1 x^n.dx = \frac{1}{n+1}$,

et le théorème des gendarmes garantit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - 1) = 0$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

b. En partant de l'expression de (I_n – 1), on a encore :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $I_n - 1 = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \left[x.\frac{\ln(1+x^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}.\int_0^1 \ln(1+x^n).dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}.\int_0^1 \ln(1+x^n).dx$.

Mais de plus : $\left|\int_0^1 \ln(1+x^n).dx\right| \leq \int_0^1 |\ln(1+x^n)|.dx = \int_0^1 \ln(1+x^n).dx \leq \int_0^1 x^n.dx = \frac{1}{n+1}$,

et cette dernière quantité tend vers 0 en +∞.

Donc : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, en +∞, soit le résultat voulu avec : a = 1, b = ln(2).

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

9. a. On peut écrire : ∀ x ∈ [0,1], F(x) = $\int_0^x t.f(t).dt + \int_x^1 x.f(t).dt = \int_0^x t.f(t).dt - x.\int_1^x f(t).dt$.

On fait ainsi apparaître deux primitives de fonctions continues sur [0,1], et par opérations, F est bien de classe C^1 sur [0,1].

De plus : ∀ x ∈ [0,1], $F'(x) = x.f(x) - [\int_1^x f(t).dt + x.f(x)] = -\int_1^x f(t).dt$.

Cette écriture de F' montre maintenant que F' est elle-même de classe C^1 sur [0,1], et :
∀ x ∈ [0,1], $F''(x) = -f(x)$.

b. Puisque [0,1] est un intervalle, on en déduit en primitivant que F' s'écrit :
∀ x ∈ [0,1], $F'(x) = -\int_0^x f(t).dt + C$,

et comme F' s'annule en 1, on en déduit que : $C = \int_0^1 f(t).dt$, d'où : ∀ x ∈ [0,1], $F'(x) = \int_x^1 f(t).dt$.

On en déduit de même, F s'annulant en 0 que : ∀ x ∈ [0,1], $F(x) = \int_0^x F'(u).du = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t).dt\right).du$.

10. a. La fonction f : t ↦ $\frac{\ln(1+t)}{t}$, est définie et continue sur ℝ$^{+*}$, donc y admet des primitives.

F apparaît alors comme la primitive de f qui s'annule en 1.

On peut alors noter : ∀ x ∈ ℝ$^{+*}$, $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}.(\ln(x))^2$, et par opérations, G est de définie et de classe C^1 sur ℝ$^{+*}$.

Puis : ∀ x ∈ ℝ$^{+*}$, $G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}.F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x^2}.[x.(\ln(1+x) - \ln(x))] - \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc G est constante sur l'intervalle ℝ$^{+*}$, et comme elle s'annule en 1, on en déduit le résultat voulu.

b. On peut alors en déduire que : ∀ x ∈ ℝ$^{+*}$, $\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \int_1^x \frac{1}{t}.[\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right)].dt$.

La première partie de l'intégrale se calcule immédiatement et on peut effectuer dans la deuxième le changement de variable : t = u.x, pour obtenir :

∀ x ∈ ℝ$^{+*}$, $\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \ln(x).\ln(x) + \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(1+u)}{u}.du = (\ln(x))^2 - F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2 + F(x)$.

11. On peut définir : ∀ a ∈ ℝ, $F(a) = \int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\cos^2(a)} \arccos(\sqrt{x}).dx$.

Puisque : x ↦ $\arcsin(\sqrt{x})$, est définie, continue sur [0,1], elle y admet des primitives et on peut noter S celle qui s'annule en 0.

De même on note C la primitive sur [0,1] et s'annulant en 0 de : x ↦ $\arccos(\sqrt{x})$.

Puisque : ∀ a ∈ ℝ$^+$, $\sin^2$(a) ∈ [0,1], $\int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx$ existe, vaut S($\sin^2$(a)), et avec un raisonnement similaire, l'autre partie vaut C($\cos^2$(a)).

Donc F est définie sur ℝ, et : ∀ a ∈ ℝ, F(a) = C(a) + S(a).

On constate alors que F est paire : ∀ a ∈ ℝ, F(-a) = S($\sin^2$(-a)) + C($\cos^2$(-a)) = F(a), et π périodique puisque : ∀ a ∈ ℝ, $\sin^2$(a + π) = $\sin^2$(a), et : $\cos^2$(a + π) = $\cos^2$(a).

On peut donc restreindre son étude à [0, $\frac{\pi}{2}$], où elle est, par opérations, de classe C^1.

Puis : ∀ a ∈ ℝ, F'(a) = 2.sin(a).cos(a).S'($\sin^2$(a)) – 2.sin(a).cos(a).C'($\cos^2$(a)).

Or sur [0, $\frac{\pi}{2}$], on a : $S'(\sin^2(a)) = \arcsin(\sqrt{\sin^2(a)}) = \arcsin(\sin(a)) = a$, et : $C'(\cos^2(a)) = a$.

Donc : $\forall$ a $\in [0,\frac{\pi}{2}]$, F'(a) = 0, et F est constante sur ce segment, donc sur ℝ par parité et périodicité.

Comme enfin : $F(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{x}).dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}.dx = \frac{\pi}{4}$, on en déduit le résultat.

12. a. On peut écrire :

$\forall$ x $\in$ ℝ, g(x) = $\int_0^x [\sin(x).\cos(t) - \sin(t).\cos(x)].f(t).dt = \sin(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt - \cos(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt$,

et comme somme de produits de fonctions C^1 sur ℝ (puisque f est continue sur ℝ), g est aussi de classe C^1 sur ℝ.

Puis : $\forall$ x $\in$ ℝ,

g'(x) = $\cos(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt + \sin(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt + \sin(x).\cos(x).f(x) - \sin(x).\cos(x).f(x)$,

et donc : $g'(x) = \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.

b. Le même argument que précédemment montre que g' est de classe C^1 sur ℝ, et : $\forall$ x $\in$ ℝ,

g''(x) = $-\sin(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt + \cos(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt + [\cos^2(x).f(x) + \sin^2(x).f(x)]$.

D'où : $\forall$ x $\in$ ℝ, $g''(x) = -g(x) + f(x)$,

et g est bien solution sur ℝ de l'équation différentielle : y'' + y = f(x).

c. La solution générale sur ℝ de l'équation homogène associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants pour la partie homogène est :

$\forall$ x $\in$ ℝ, y(x) = α.sin(x) + β.cos(x), avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions sur ℝ de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$\forall$ x $\in$ ℝ, y(x) = α.sin(x) + β.cos(x) + g(x), avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales impropres.

13. • La fonction dans la première intégrale proposée est définie, continue sur]0,1] et l'intégrale est généralisée en sa borne inférieure.

Puis : $\forall$ x $\in$]0,1], $\int \ln(x).dx = x.\ln(x) - \int 1.dx = x.\ln(x) - x + C$, avec : C $\in$ ℝ.

Ces primitives admettent une limite finie en 0, donc l'intégrale proposée converge.

En notant par exemple F la primitive qui s'annule en 1, on a alors :

$\int_0^1 \ln(x).dx = F(1) - \lim_{x\to 0} F(x) = -1 + 0 = -1$.

• La fonction sous la deuxième intégrale est définie, continue sur [0,+∞) et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure.

Si : a ≠ 0, on a : $\forall$ x $\in \mathbb{R}^+$, $\int e^{-a.x}.dx = \frac{e^{-a.x}}{-a} + C = \frac{e^{-\alpha.x}}{-a}.e^{-i.\beta.x} + C$, avec : C $\in$ ℂ, et : a = α + i.β, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

et ces primitives admettent une limite finie en +∞ si et seulement si : α = Re(a) > 0.

Si : a = 0, alors : $\int 1.dx = x + C$, qui n'admet pas de limite finie en +∞.

Donc l'intégrale proposée converge si et seulement si : Re(a) > 0.

En notant F une de ces primitives, on a : $\forall$ a ≠ 0, $\int_0^{+\infty} e^{-a.x}.dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = C - [-\frac{1}{a} + C] = \frac{1}{a}$.

• La fonction sous l'intégrale est définie, continue sur [0,+∞) et l'intégrale est généralisée en +∞.

Puis : $\forall$ x $\in$ ℝ, $\int \sin^2(x).dx = \int \frac{1-\cos(2.x)}{2}.dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2.x)}{4} + C \geq \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + C$, avec : C $\in$ ℝ,

et ces primitives n'admettent pas de limite finie en +∞ du fait de la minoration.

Donc l'intégrale proposée diverge.

14. • La première intégrale proposée ne peut exister puisque la fonction sous l'intégrale n'est même pas définie sur l'intervalle d'intégration.

Si maintenant on envisage $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$, alors la fonction sous l'intégrale est définie, continue et positive sur]1,+∞) et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

Puis en $+\infty$, on a : $\dfrac{1}{t^a.(t-1)^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+b}}$, et par comparaison de fonctions à valeurs positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{a+b}}$ converge, soit : a + b > 1.

En 1, on a : $\dfrac{1}{t^a.(t-1)^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(t-1)^b}$, et de même, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^b}$ converge, soit : b < 1.

Finalement l'intégrale (corrigée) est convergente si et seulement si : (b < 1) et (a + b > 1).

• La fonction dans la deuxième intégrale est définie, continue sur]0,+∞), positive, donc l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

Pour l'étude en $+\infty$, on distingue alors plusieurs cas :

(b > 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{b-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : b – a > 1,

(b = 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2.t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : -a > 1,

(b < 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : -a > 1.

Pour l'étude en 0, on distingue aussi plusieurs cas :

(b > 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : -a < 1,

(b = 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2.t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : -a < 1,

(b < 0) : $\dfrac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{b-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : b – a < 1.

Conclusion :
l'intégrale converge si et seulement si : (b > 0, et : -1 < a < b – 1) ou (b < 0, et : b – 1 < a < -1).

• La fonction dans cette dernière intégrale est définie, continue et positive sur]0,+∞) et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

Les équivalents précédents permettent d'affirmer qu'en $+\infty$, la fonction est toujours négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$, donc l'intégrale est toujours convergente sur [1,+∞).

Conclusion : l'intégrale est convergente si et seulement si elle converge sur]0,1], autrement dit :
(b ≥ 0, et : a > -1) ou (b < 0, et : b – 1 < a).

15. a. Les fonctions dans les deux intégrales sont définies, continues et positives sur [0,+∞) et les deux intégrales sont généralisées en $+\infty$.

De plus : $\dfrac{1}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$, et : $\dfrac{t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$; toutes les fonctions étant positives, I et J convergentes.

b. Comme proposé, utilisons dans J le changement de variable : u = $\dfrac{1}{t}$ = φ(t), qui est bien une bijection C^1 de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même.

On obtient alors : $J = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{u}.\frac{1}{1+\frac{1}{u^3}}.\left(-\frac{1}{u^2}\right).du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = I$.

c. Là encore, comme proposé : $I + J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-t+t^2} = \frac{4}{3}.\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\left[\arctan\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$.

Donc : $I + J = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{4.\pi}{3.\sqrt{3}}$, et : $I = J = \dfrac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}$.

d. Enfin, on peut commencer par écrire : $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b.t+c}{1-t+t^2}$, et on trouve : $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.

On cherche alors une primitive de cette fonction en :

$$F(t) = \frac{1}{3}.\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6}.\int \frac{2.t-1}{t^2-1+1}.dt + \frac{1}{2}.\int \frac{dt}{t^2-1+1} = \frac{1}{3}.\ln(1+t) - \frac{1}{6}.\ln(t^2-1+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\arctan\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right).$$

F admet une limite finie en +∞ qui vaut (en regroupant les ln) : $0 + \frac{\pi}{2.\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2.\sqrt{3}}$, et : $F(0) = -\frac{\pi}{6.\sqrt{3}}$.

On retrouve ainsi le résultat précédent pour I.

16. a. La fonction proposée (appelons la f) est définie, continue et positive sur [0,+∞).

De plus, on constate que : $\lim_{x\to+\infty} x^2.e^{-x^2} = 0$, donc : $e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2.}\right)$, en +∞, d'où l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

b. On peut démontrer ces deux inégalités en étudiant des fonctions intermédiaires sur $\mathbb{R}^+$ comme :
$\varphi(u) = e^{-u} - (1 - u)$, et : $\psi(u) = e^{u} - (1 + u)$,
montrer qu'elle sont croissantes et nulles en 0, donc positives ce qui conduit aux inégalités demandées.
On peut aussi pour les fonctions précédentes, dire qu'elles sont convexes sur $\mathbb{R}^+$ et utiliser le fait que leurs courbes représentatives sont au-dessus de leur tangente en 0, ce qui donne à nouveau le résultat.

c. Pour : $t \in [0,\sqrt{n}]$, on en déduit que : $\varphi\left(\frac{t^2}{n}\right) \geq 0$, donc : $0 \leq \left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$, $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

En utilisant le fait que : $x \mapsto x^n$, est croissante sur $\mathbb{R}^+$, cela donne le premier résultat.

Puis, pour : $t \in \mathbb{R}^+$, $\psi\left(\frac{t^2}{n}\right) \geq 0$, d'où : $0 \leq e^{\frac{t^2}{n}} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)$, et à nouveau : $e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

d. Dans $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt$, on réalise le changement de variable : $t = \sqrt{n}.\sin(x)$, et :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^n.\sqrt{n}.\cos(x).dx = \sqrt{n}.J_{2.n+1}.$$

L'autre intégrale est généralisée en +∞ mais converge pour : n ≥ 1, car : $0 \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} \leq \frac{n^n}{t^{2.n}}$, sur [1,+∞).

On effectue alors le changement de variable : $t = \sqrt{n}.\tan(x)$, dans cette intégrale et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\tan^2(x))}{(1+\tan^2(x))^n}.dx = \sqrt{n}.J_{2n-2}.$$

e. La fonction exponentielle étant positive, on a : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}.dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt$.

En intégrant les inégalités de la question c, on obtient alors :

$$\forall\, n \geq 1,\ \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}.dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

De plus : $\sqrt{n}.J_{2.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{2.(2.n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et : $\sqrt{n}.J_{2.n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{2.(2.n-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (constante) égale à I, encadrée ci-dessus, tend donc vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et finalement : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

17. Pour : $n \in \mathbb{N}$, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [0,+∞) et l'intégrale est généralisée en +∞.

Pour : A > 0, et : n ∈ ℕ*, on a ensuite : $\int_0^A t^n.e^{-t}.dt = [-t^n.e^{-t}]_0^A + n.\int_0^A t^{n-1}.e^{-t}.dt$.

Si maintenant, on fait tendre A vers +∞, on obtient la relation : $I_{n+1} = 0 + n.I_n$, soit : $I_{n+1} = n.I_n$.

Puisque de plus : $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, il est alors immédiat par récurrence que : ∀ n ∈ ℕ, $I_{n+1} = n!.I_1 = n!$.

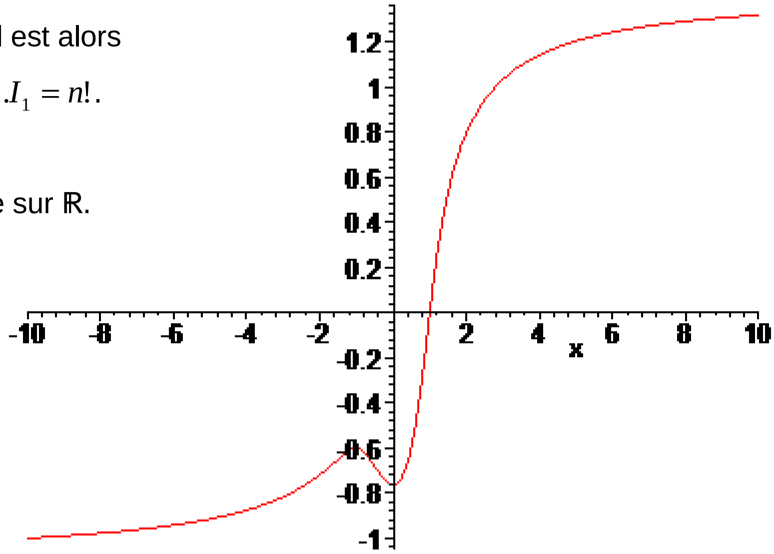
Exercices divers : série, fonctions, équivalents.

18. La fonction f sous l'intégrale est définie, continue sur ℝ.

La fonction proposée qu'on notera F est donc la primitive de f sur ℝ, s'annulant en 1.
A ce titre, elle est définie, de classe C^1 sur ℝ.

De plus : ∀ x ∈ ℝ, $F'(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^8 + 1}}$, et donc

F' s'annule en 0 et -1.
F est croissante sur (-∞,-1[et]0,+∞),
décroissante sur]-1,0[, et : F(0) < 0.
Enfin, F admet une limite finie en ±∞, car :



- sur [1,+∞), f est positive et : $\dfrac{t^2 + t}{\sqrt{t^8 + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{t^2 + t}{\sqrt{t^8 + 1}}.dt$ converge et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie.
- sur (-∞,-1[, f est également positive, et le même équivalent montre la convergence de $\int_1^{-\infty} \dfrac{t^2 + t}{\sqrt{t^8 + 1}}.dt$

puis l'existence d'une limite finie pour F en -∞.
La courbe représentative de F présente donc deux asymptotes en +∞.

19. a. Il suffit de remarquer, à l'aide d'un développement limité que : $\lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -1$, pour constater qu'on peut prolonger cette fonction φ en 0 en posant : φ(0) = -1.

b. Pour x fixé dans : (-∞,0[∪]0,+1[, $\int_0^x \dfrac{\ln(1-t)}{t}.dt$ est une intégrale généralisée en 0.

En effet φ est définie, continue sur]0,x] (ou [x,0[) et garde un signe constant négatif sur l'intervalle d'intégration.
Enfin, φ est prolongeable en 0 donc l'intégrale converge.

Si on note φ_0 ce prolongement, alors on a encore : ∀ x ∈ (-∞,0[∪]0,+1[, $f(x) = -\int_0^x \varphi_0(t).dt$.

f apparaît alors comme l'opposé de la primitive de φ_0 s'annulant en 0, et elle a une limite finie nulle en 0.

c. f étant la primitive de φ_0 sur (-∞,1[, elle est y même de classe C^1.

d. On pose : ∀ x ∈ (-∞,+1[, $F(x) = f(x) + f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \dfrac{1}{2}.(\ln(1-x))^2$.

On remarque tout d'abord que : ∀ x ∈ (-∞,+1[, $\dfrac{x}{x-1}$ ∈ (-∞,+1[.

Puis : ∀ x ∈ (+∞,+1[, $F'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{(x-1)^2}.f'\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x.(x-1)} - \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = 0$.

Cette dernière égalité est en fait valable pour : x ≠ 0, mais puisque f est C^1, F l'est aussi et par continuité de F', on a encore : F'(0) = 0.
F est donc constante sur son intervalle de définition, et : ∀ x ∈ (-∞,+1[, F(x) = F(0) = 0, d'où le résultat.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

20. • La première fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et : ∀ x ≥ 1, $|f(x)| = \dfrac{|\cos(x)|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$,

donc la majoration garantit sont intégrabilité sur [1,+∞) donc sur [0,+∞).

• La deuxième fonction est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et : ∀ x > 0, $|g(x)| = \frac{|e^{i.x}|}{1+x^a} = \frac{1}{1+x^a}$.

Distinguons alors trois cas :

a < 0, et la fonction g n'est pas intégrable sur [1,+∞) puisque $\int_1^{+\infty} dt$ diverge,

a = 0, et la fonction n'est toujours pas intégrable sur [1,+∞) puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}.dt$ diverge encore,

a > 0, et dans ce cas : $|g(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^a}$, donc g est intégrable sur [1,+∞), si et seulement si : a > 1.

Dans ce dernier cas, g est alors intégrable sur]0,1], puisque |g| est prolongeable par continuité en 0, ayant pour limite 1 en 0.
Conclusion : g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si : a > 1.
Remarque : dans les deux premiers cas, on aurait pu dire que g n'était pas intégrable sur [1,+∞) puisque |g| avait une limite en +∞ et cette limite était non nulle.
• La troisième fonction est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

en 0 : $|h(x)| \underset{0}{\sim} x^{\alpha+3} = \frac{1}{x^{-\alpha-3}}$, donc h est intégrable sur]0,1] si et seulement si : – α – 3 < 1, ou : -4 < α,

en +∞ : $x^2.|h(x)| \le x^{\alpha+2}.e^{-x}$, ce qui garantit que : $\lim_{x\to+\infty} x^2.|h(x)| = 0$, et l'intégrabilité de h sur [1,+∞).

Conclusion : h est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si : -4 < α.

21. a. La première fonction est définie, continue sur]0,π/2], et négative.

De plus : $\sqrt{x}.\ln(\sin(x)) = \sqrt{x}.\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \sqrt{x}.\ln(x) \xrightarrow[0]{} 0$, donc elle est intégrable sur]0,1], puisque l'exposant de la puissance utilisée vérifie : $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

L'intégrabilité étant conservée avec un changement de variable bijectif de classe C^1, ici en posant : $u = \frac{\pi}{2} - x$, l'intégrabilité de la première fonction sur]0,π/2] donne celle de la deuxième sur [0,π/2[

b. De plus, le changement de variable précédent donne : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)).dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos(u)).(-du) = J$.

Puis : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))].dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(2.x)) - \ln(2)].dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2.x)).dx - \frac{\pi}{2}.\ln(2)$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2.x)).dx = \frac{1}{2}.\int_0^{\pi} \ln(\sin(u)).du = \frac{1}{2}.\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)).du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)).du\right]$.

Et pour finir avec le changement de variable : u = π – x, on obtient :
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)).du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(x)).(-dx) = I$.

En rassemblant ces résultats, on conclut que : $I + J = I - \frac{\pi}{2}.\ln(2)$, d'où : $J = I = -\frac{\pi}{2}.\ln(2)$.

22. Un exercice immédiat.

Si on note F une primitive de f sur [0,+∞), alors : ∀ x ∈ |0,+∞), $\int_x^{x+1} f(t).dt = F(x+1) - F(x)$.

Puisque F est intégrable sur [0,+∞), $\int_0^{+\infty} f(t).dt$ converge, F a une limite finie en +∞, et la différence écrite au-dessus tend vers 0 quand x tend vers +∞.

23. Notons F une primitive de f sur [0,+∞).
Puisque f est intégrable sur [0,+∞), F a une limite finie en +∞.
De plus, f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$,on peut écrire :

$\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^+$, $\int_x^{2.x} f(t).dt \le \int_x^{2.x} f(x).dt = (2.x - x).f(x) = x.f(x)$,

et : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^+$, $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t).dt \ge \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x).dt = (x - \frac{x}{2}).f(x) = \frac{x}{2}.f(x)$.

On en déduit que : $F(2.x) - F(x) \le x.f(x) \le 2.[F(x) - F(\frac{x}{2})]$.

Le théorème des gendarmes garantit alors que x.f(x) tend vers 0 en +∞.

Semi-convergence.

24. a. On constate immédiatement que : $\forall$ x ≠ 0, $\frac{g(x)}{f(x)} = 1 + \frac{e^{-i.x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[+\infty]{} 1$, donc : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

b. On calcule : $\forall$ A > 1, $\int_1^A f(x).dx = \left[\frac{e^{i.x}}{i.\sqrt{x}}\right]_1^A - i.\int_1^A \frac{1}{2}.\frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}.dx$.

Quand A tend vers +∞, le crochet à une limite finie (qui est : i.e^i), et la fonction apparaissant dans le deuxième intégrale est intégrable sur [1,+∞) car : $\forall$ x ≥ 1, $\left|\frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Donc l'intégrale sur [1,+∞) de cette dernière fonction converge, $\int_1^A \frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}.dx$ a une limite finie quand A tend vers +∞, et finalement, $\int_1^A f(x).dx$ aussi.

c. Cette intégrale diverge car, par combinaison linéaire, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, comme différence de deux intégrales convergentes (celle de (g – f)), serait convergente.

d. La convergence d'intégrales n'est pas conservées en fonctions équivalentes en un point.

25. a. La fonction est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et se prolonge par continuité en 0 (on la notera f).
Il n'y a pas de problème d'intégrabilité sur]0,1].
Puis : $\forall$ n ≥ 2, $\int_\pi^{n.\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k.\pi}^{(k+1).\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt$.
Dans chaque intégrale on effectue le changement de variable : t = k.π + u, et :

$$F(n.\pi) = \int_\pi^{n.\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|.dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \left|\frac{\sin(u)}{u + k.\pi}\right|.du = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k.\pi}.du \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k.\pi}.\int_0^\pi \sin(u).du = \frac{2}{\pi}.\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}.H_{n-1}.$$

Si maintenant on suppose f intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc sur [π,+∞), alors toutes les primitives sur $\mathbb{R}^{+*}$ de |f| auraient une limite finie en +∞, en particulier F.
Mais la minoration de F(n.π) par H_{n-1} montre que ça n'est pas possible et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. On sait déjà que $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}.dx$ converge.

Puis : $\forall$ A > π, $\int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x}.dx = \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\cos(x)}{x^2}.dx$.

Quand A tend vers +∞, la partie intégrée a une limite (théorème des gendarmes, cos étant bornée) et la fonction qui apparaît dans la deuxième intégrale est intégrable sur [π,+∞), puisque :

$\forall$ x $\in$ [π,+∞,), $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$.

Donc la deuxième intégrale a une limite quand A tend vers +∞ et la première aussi.

c. Effectuons une intégration par parties sur [ε,A] avec (1 – cos) comme primitive du sinus et :

$$\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\sin(x)}{x}.dx=\left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.dx=\left[\frac{2}{x}.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\varepsilon}^{A}+2.\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}.dx.$$

On effectue alors le changement de variable : x = 2.u, dans la dernière intégrale, et :

$$\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\sin(x)}{x}.dx=\left[\frac{2}{x}.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\varepsilon}^{A}+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{A}{2}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}.du.$$

Si maintenant, on fait tendre A vers +∞ et ε vers 0, alors le crochet tend vers 0 en +∞ (th des gendarmes) et un équivalent montre qu'il tend aussi vers 0 en 0.

Finalement : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}.dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2.du$.

26. a. Notons que toutes les intégrales I_n convergent puisque les fonctions qui apparaissent sont définies, continues sur]0,π/2], et prolongeables par continuité en 0.

Puis : ∀ n ∈ ℕ*, ∀ t ∈ ℝ, $\sin((2.n+2).t)-\sin(2.nt)=2.\cos((2.n+1).t).\sin(t)$, d'où :

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2.\cos((2.n+1).t).\cos(t).dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos((2.n+2).t)+\cos(2.n.t)].dt=0.$$

La suite (I_n) est donc constante à la valeur : $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2.\cos^2(t).dt=\left[t+\frac{\sin(2.t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

b. On commence par calculer : ∀ n ∈ ℕ*, $I_n-J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2.n.t).\left[\frac{1}{t}-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right].dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2.n.t).\varphi(t).dt$.

La fonction φ donnée par : ∀ t ∈]0,π/2], $\varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$, est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur [0,π/2].

En effet : $\varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t}.(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)).(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2))^{-1}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t}.(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)).(1+\frac{t^2}{6}+o(t^2))=\frac{t}{3}+o(t)$,

ce qui montre que φ se prolonge par continuité en 0, avec : φ(0) = 0, et :

$$\forall\ t>0,\ \varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\sin^2(t)}=\frac{1}{t^2}.\left(-1+(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2))^{-1}\right)=\frac{1}{6}+o(1),$$

donc φ est dérivable en 0, $\varphi'(0)=\frac{1}{6}$, et φ' est continue en 0, donc φ est de classe C^1 sur [0,π/2].

Le lemme de Lebesgue (exercice 7) s'applique et : $\lim_{n\to+\infty}[I_n-J_n]=0$.

c. On en déduit, puisque (I_n) est constante donc convergente, que (J_n) converge et que : $\lim_{n\to+\infty}J_n=\frac{\pi}{2}$.

d. Enfin : ∀ n ≥ 1, $J_n=\int_0^{n.\pi}\frac{\sin(u)}{u}.du$, avec le changement de variable : u = 2.n.t, et en faisant tendre n vers +∞, on conclut que : $\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}J_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n.\pi}\frac{\sin(u)}{u}.du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}.du$, puisque l'intégrale de Dirichlet est convergente.

Comparaison série – intégrale.

27. Pour : 0 ≤ α < 1, la fonction f_α est décroissante sur [1,+∞).

Donc : ∀ k ≥ 1, ∀ t ∈ [k,k+1], $\frac{1}{(k+1)^\alpha}\le\frac{1}{t^\alpha}\le\frac{1}{k^\alpha}$, puis en intégrant sur [k,k+1] : $\frac{1}{(k+1)^\alpha}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\le\frac{1}{k^\alpha}$.

Si maintenant, on somme pour k variant de 1 à n (avec : n ≥ 1), on obtient :

∀ n ≥ 1, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^\alpha}\le\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, ou : $S_{n+1}-1\le\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}\le S_n$, avec : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

On en déduit que : $\forall$ n ≥ 1, $\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n$, et : $\forall$ n ≥ 2, $S_n \leq 1+\int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha}$.

Enfin : $\int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}+1$.

Donc l'encadrement précédent (avec le théorème des gendarmes) conduit à : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Remarque : l'équivalent redonne la divergence de la série.
Si maintenant : $\alpha < 0$, le principe est conservé, mais f_α est cette fois croissante, et on aboutit à :

$\forall$ n ≥ 2, $1+\int_1^{n}\frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}$, ce qui donne encore : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

28. Pour : $\alpha > 1$, la série de Riemann proposée est convergente.
Soit alors : n ≥ 1, et : k ≥ n.

On peut écrire : $\forall$ t $\in$ |k,k+1], $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et en intégrant sur [k,k+1] : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

On somme alors pour k variant de n à : N ≥ n + 1, et : $\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}$.

Toutes les quantités qui apparaissent ont une limite quand N tend vers +∞ (série ou intégrale convergente), donc on en déduit : $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

L'intégrale vaut : $\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, et on reconnaît R_n à gauche et R_{n-1} à droite.

D'où : $\forall$ n ≥ 2, $\frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Enfin, les quantités encadrantes étant équivalentes entre elles en +∞, on conclut que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.